UPS TOULOUSE III
MIM 2006

Le 07/09/2006

EXAMEN
PROBABILITÉS & APPLICATIONS

Durée 2 heures

PROBLÈME I

5 points

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(1/n)$ et soit $Y_n = X_n - [X_n]$ où $[X_n]$ désigne la partie entière de X_n.

1) Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?
2) Montrer que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \leq 0, \\ \dfrac{1-\exp(-x/n)}{1-\exp(-1/n)} & \text{si } \; 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } \; x \geq 1. \end{cases}$$

3) En déduire que (Y_n) converge en loi vers Y dont on précisera la loi.
4) Proposer un programme `MATLAB` avec `histo` pour visualiser cette convergence.

PROBLÈME II

8 points

La loi de Paréto, encore appelée loi de puissance, est souvent utilisée pour modéliser les dépassements d'un seuil. On dit que X suit une loi de Paréto $\mathcal{P}(a,b)$ avec $a, b > 0$ si $X = b\exp(Z)$ où Z suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.

1) Déterminer la fonction de répartition de X puis vérifier que sa densité de probabilité est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{ab^a}{x^{a+1}} & \text{si } \; x \geq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2) Pour $a > 2$, calculer l'espérance et la variance de X.
3) Si $Y = 1/X$, montrer que sa densité de probabilité est donnée par

$$f_Y(y) = \begin{cases} ab^a y^{a-1} & \text{si } \; 0 \leq y \leq 1/b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4) Calculer l'espérance et la variance de Y.
5) Proposer un code MATLAB pour simuler une loi de Paréto et visualiser la loi forte des grands nombres à partir d'un n-échantillon $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de même loi que X ainsi qu'un n-échantillon $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ de même loi que Y où les paramètres n, a et b sont affectés par l'utilisateur.

PROBLÈME III

7 points

Un laboratoire de recherche Toulousain, spécialisé dans la sécurité des transports aériens, veut valider ses techniques d'entrainement pour les contrôleurs aériens. Il décide de mener une étude sur cinq techniques utilisées pour l'entrainement de 40 contrôleurs soumis à des simulations de trafic intense impliquant des collisions potentielles. Il obtient les résultats suivants pour les cinq techniques d'entrainement notées $T_1, T_2, \cdots, T_5$ où un score élevé signifie une meilleure attention.

T_1	10	11	9	11	10	12	8	10	
T_2	11	10	13	11	12	11	8	10	12
T_3	12	10	12	14	12	10	11	13	
T_4	10	11	8	9	14	10	12		
T_5	10	12	11	10	11	11	12	10	

Soit y_{ij} le score obtenu avec la technique d'entrainement T_i par le j^e contrôleur. On suppose que pour $i = 1, 2, \cdots, 5$, y_{ij} est une réalisation d'une variable aléatoire Y_{ij} satisfaisant

$$Y_{ij} = m_i + \varepsilon_{ij}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n_i$$

où (ε_{ij}) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1) Estimer les paramètres inconnus $m = (m_1, m_2, \cdots, m_5)$ et σ^2.
2) Tester l'hypothèse d'égalité des cinq techniques d'entrainement en dressant au passage le tableau d'Analyse de la Variance.
3) Proposer un code MATLAB permettant d'estimer les paramètres inconnus m et σ^2 du modèle.