UPS TOULOUSE III **Le 12/04/2005**
MIM 2005

EXAMEN
PROBABILITÉS & APPLICATIONS

Durée 3 heures

PROBLÈME I

5 points

La loi de Laplace est utilisée pour modéliser des erreurs d'expérience. Soit X une variable aléatoire de loi de Laplace, de densité de probabilité f donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|).$$

1) Calculer l'espérance et la variance de X.
2) Montrer que la fonction de répartition F de X est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} \exp(x) & \text{si } x \leq 0, \\ 2 - \exp(-x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3) Pour $y \in]0,1[$, calculer la fonction de quantile $F^{-1}(y)$ et en déduire un programme `MATLAB` pour simuler X à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

PROBLÈME II

5 points

Soit Y et Z des variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

1) Montrer que la différence $Y - Z$ suit la même loi que X.
2) En déduire un second programme `MATLAB` pour simuler une loi de Laplace.
3) Soit ε une variable aléatoire indépendante de Y et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. Montrer que $\varepsilon Y - (1-\varepsilon)Y$ suit la même loi que X et en déduire un troisième programme `MATLAB` pour simuler une loi de Laplace.

PROBLÈME III

10 points

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ des variables indépendantes et identiquement distribuées de loi de Laplace. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$U_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k \qquad \text{et} \qquad V_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

1) Trouver la loi de $-X_1$ et en déduire que U_n suit la même loi que $-V_n$.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{P}(U_n > x)$ et $\mathbb{P}(V_n \leq x)$ et proposer un programme `MATLAB` permettant de visualiser sur un histogramme l'égalité en loi de U_n et $-V_n$.
3) On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de la variable normalisée

$$W_n = \frac{V_n}{\log n}.$$

   a) On suppose tout d'abord que $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour $n \geq 3$,

$$\mathbb{P}(W_n > 1 + \varepsilon) = 1 - \Big(1 - \frac{1}{2n^{1+\varepsilon}}\Big)^n.$$

   En déduire que $\mathbb{P}(W_n > 1 + \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

   b) On suppose maintenant que $0 < \varepsilon \leq 1$. Montrer que, pour $n \geq 3$,

$$\mathbb{P}(W_n < 1 - \varepsilon) = \Big(1 - \frac{1}{2n^{1-\varepsilon}}\Big)^n.$$

   En déduire que $\mathbb{P}(W_n < 1 - \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

   c) On suppose finalement que $\varepsilon > 1$. Montrer que, pour $n \geq 3$,

$$\mathbb{P}(W_n < 1 - \varepsilon) = \left(\frac{n^{1-\varepsilon}}{2}\right)^n.$$

   En déduire que $\mathbb{P}(W_n < 1 - \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

   Déduire des questions précédentes a), b), c), que W_n converge en probabilité vers 1. Ecrire un programme `MATLAB` permettant de visualiser cette convergence.