

Troisième interrogation de Mathématiques (14/01/04)

1 Algèbre

On considère l'espace vectoriel E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ($\mathbb{R}_2[X]$). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, on considère l'application φ_θ de E dans E définie pour $P \in E$ par :

$$[\varphi_\theta(P)](x) = P(x - \theta), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- 1) Montrer que φ_θ est un endomorphisme de E .
- 2) Déterminer le noyau et l'image de φ_θ . En déduire que φ_θ est un isomorphisme.
- 3) On considère la base $\mathcal{B} = [1, x, x^2]$. Ecrire la matrice M_θ de φ_θ dans cette base. Décrire l'endomorphisme $\varphi_\theta \circ \varphi_{-\theta}$ et en déduire la valeur du produit $M_\theta M_{-\theta}$.
- 4) On rappelle que l'on note I_3 la matrice identité de dimension 3. Déterminer l'image et le noyau de l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $M_\theta - I_3$.

2 Analyse

On considère un jeu de 52 cartes. Après avoir bien mélangé les cartes on en choisit 5 au hasard (sans remise).

- 1) Montrer que le nombre de mains ne contenant aucune paire (c'est-à-dire 2 cartes identiques de couleurs différentes) vaut :

$$\frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{5!}.$$

- 2) Calculer la probabilité que la main de 5 cartes contienne au moins une paire.