Université Paul Sabatier
Année 2003-2004
1ere Année de Licence

Correction de la première interrogation de Mathématiques

1 Algèbre

Notons x_1 le coefficient pour les mathématiques, x_2 celui pour l'anglais et x_3 celui pour l'informatique. Le tableau des résultats des candidats conduit alors au système d'équations suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{llll} 7x_1 & +12x_2 & +6x_3 & =8 \\ 11x_1 & +6x_2 & +10x_3 & =9 \\ 11x_1 & +16x_2 & +14x_3 & =14 \end{array}\right.$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le sytème (S). Le système (S) s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 11 & 6 & 10 \\ 11 & 16 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

En faisant une permutation circulaire des lignes on obtient :

$$\begin{pmatrix} 11 & 6 & 10 \\ 11 & 16 & 14 \\ 7 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La première étape de la méthode du pivot donne alors :

$$\begin{pmatrix} 11 & 6 & 10 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & \frac{90}{11} & -\frac{4}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ \frac{25}{11} \end{pmatrix}.$$

On multiplie la dernière ligne par 11, puis l'on permute les deux dernières inconnues. Le système devient :

$$\begin{pmatrix} 11 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & -4 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

La dernière étape de la méthode du pivot donne alors :

$$\begin{pmatrix} 11 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Le système (S) est donc équivalent au système :

$$(S')\left\{\begin{array}{llll} 11x_1 & +10x_3 & +6x_2 & =9 \\ & 4x_3 & +10x_2 & =5 \\ & & 100x_2 & =30 \end{array}\right.$$

Ce dernier système se résout facilement. On trouve finalement :

$$\begin{cases} x_1 &= 0.2 \\ x_2 &= 0.3 \\ x_3 &= 0.5 \end{cases}$$

On vérifie que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et que ces coefficients sont bien positifs.

2 Analyse

a) Montrons par récurrence, sur $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}. \tag{1}$$

Pour $n = 1$ on a $S_1 = 1/2 = 1 - 1/2$ donc (1) est vraie.
On suppose que (1) est vraie pour $n = 1, 2, \ldots, N$ ($N \in \mathbb{N}^*$).
Au rang $N + 1$, on a (en utilisant l'hypothèse de récurrence) :

$$\begin{aligned} S_{N+1} = S_N + \frac{1}{(N+1)(N+2)} &= 1 - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} \\ &= 1 + \frac{1 - N - 2}{(N+1)(N+2)} \\ &= 1 - \frac{N+1}{(N+1)(N+2)} = 1 - \frac{1}{N+2}. \end{aligned}$$

Donc (1) est vraie au rang $N + 1$ et est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.

c) Puisque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq S_1 = 1/2$. La suite est donc minorée. D'autre part, en utilisant l'égalité (1) on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n < 1$. Elle est donc aussi majorée. En conclusion, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.