INSA
Année 2003-2004
GMM-5ème année

Examen de plan d'expériences du 13 janvier 2004

Durée : 2h

Pour n un entier naturel non nul, on considère le modèle linéaire :

$$Y_i = a^* + b^* f(x_i) + \varepsilon_i,\ i = 1, \cdots, n,$$

où, pour $i = 1, \cdots, n$, $x_i \in [0,1]$ et les variables (ε_i) sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^{*2})$. On suppose que f est une fonction continue non constante sur $[0,1]$.

1) Que faut-il supposer sur $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ pour que le modèle soit identifiable? A partir de maintenant, on supposera que cette condition est vérifiée et on notera Σ l'ensemble des plans d'expériences qui vérifient cette condition. Soit $\theta^* = (a^*, b^*)^T$. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ^*. Que vaut la matrice de variance covariance de cet estimateur? On note Γ_{θ^*} cette matrice.

2) Afin de fixer les points $x = (x_i)_{i=1,\ldots,n}$ du plan d'expériences, on considère le critère :
$$D(x) = \frac{1}{\det \Gamma_{\theta^*}}.$$
Calculer D en fonction de x.

3) Montrer qu'il existe $m < M$ tels que la fonction f prenne toutes les valeurs de $[m, M]$. On pose
$$\tilde{D}(y) = D(x) \text{ où } y = (y_i)_{i=1,\ldots,n},\ y_i = f(x_i),\ i = 1, \ldots, n.$$
Montrer que
$$\max_{x\in\Sigma} D(x) = \max_{y\in\tilde{\Sigma}} \tilde{D}(y),$$
où
$$\tilde{\Sigma} = \{y :\ y_i \in [m, M]\ i = 1, \ldots, n,\ \exists i, i' \in \{1, \ldots, n\}, i \neq i', y_i \neq y_{i'}\}$$

4) Montrer que
$$\tilde{D}(y) = n \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2,$$
où $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. En déduire que
$$\max_{y\in\tilde{\Sigma}} \tilde{D}(y) = \max_{y: y_i\in[m,M],\, i=1\ldots n} \tilde{D}(y)$$

Soit y^* avec $\max_{y: y_i \in [m,M],\, i=1\ldots n} \tilde{D}(y) = \tilde{D}(y^*)$. Supposons qu'il existe un indice $i^* \in \{1, \cdots, n\}$ avec $m < y^*_{i^*} < M$ et considérons la fonction φ sur $]m, M[$ définie, pour $y \in]m, M[$, par

$$\varphi(y) = \tilde{D}(\tilde{y}^*), \text{ avec, pour } i \neq i^* \; \tilde{y}^*_i = y^*_i \text{ et } \tilde{y}^*_{i^*} = y.$$

Calculer la fonction φ et étudier ses variations sur $]m, M[$. En déduire que l'hypothèse faite sur $y^*_{i^*}$ est incorrecte et que, pour $i = 1, \ldots, n$, $y^*_i \in \{m, M\}$.

5) On pose

$$r^* = \operatorname{Card}\{i \in \{1, \ldots, n\} : \; y^*_i = m\}.$$

On suppose que $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), que vaut r^*? Dans le cas $n = 2p + 1$, quelles sont les valeurs possibles pour r^*.

6) Décrire tous les plans d'expériences D-optimaux.

7) On se place dans le cas où $f(x) = 2\pi x \sin(2\pi x)$. Déterminer précisement les plans D-optimaux.