1 METHODES DE SIMULATION, MONTE–CARLO

1.1 Approximation numérique d'une intégrale

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On se propose d'évaluer numériquement l'intégrale I définie par :

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

A titre d'exemple, on évaluera l'intégrale entre 0 et 2π de la fonction f définie par $f(x) = \cos(x)e^{-0.2*x}+1$ (on peut d'ailleurs calculer la valeur exacte de cette intégrale ...).

1.1.1 Méthodes déterministes

a) On peut approcher I par une intégrale de Riemann, en discrétisant l'intervalle $[a, b]$. On peut alors arbitrairement construire les deux approximations suivantes :

$$I_1(n) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_i), \qquad I_2(n) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_{i+1}),$$

où $x_1 = a$ et $x_n = b$.

a) En choisissant une discrétisation régulière, étudier $I_1(n)$ et $I_2(n)$ en fonction de n.

b) On peut améliorer l'approximation, en approchant I par des trapèzes (méthode des trapèzes). Comparer l'approximation $I_3(n)$ obtenue avec cette méthode à $I_1(n)$ et $I_2(n)$. Représenter graphiquement les trois approximations obtenues en fonction de n.

1.1.2 Méthode de Monte-Carlo

Cette méthode repose sur la loi des grands nombres. On définit un rectangle R de cotés $[a, b] \times [c, d]$ tel que $c \leq f(x) \leq d$ pour tout $a \leq x \leq b$. On choisit alors aléatoirement n points indépendants, avec une distribution uniforme dans le rectangle R.

a) Quelle est la probabilité pour qu'un de ces n points soit sous la courbe de f ? En déduire un estimateur $\hat{I}_n$ de I. Montrer que cet estimateur peut s'écrire comme la moyenne empirique de n variables aléatoires indépendantes et équidistribuées. Que nous dit la Loi des Grands Nombres ?

b) Utiliser cette méthode Monte-Carlo pour évaluer I, en utilisant différentes tailles d'échantillon n. Donner à chaque fois un intervalle de confiance à 95%.

1.2 Approximation numérique du volume d'un convexe

On peut bien sûr étendre ces méthodes à des situations plus compliquées, et évaluer, par exemple, le volume d'un convexe de $\mathbb{R}^d$, où $d > 2$. On se limitera ici au cas où $d = 3$ pour évaluer le volume V d'une sphère.

Le principe est le même : on définit un cube qui contient la sphère, puis on génère n points indépendants dans ce cube, avec une distribution uniforme.

a) En déduire un estimateur de V. Quelle est sa loi ?

b) Utiliser cette méthode Monte-Carlo pour évaluer V, avec différentes valeurs de n. Donner à chaque fois un intervalle de confiance à 95%.

1.3 L'urne de Polya

Une urne contient des boules blanches et noires. A l'étape 1, il y a une boule blanche et une boule noire. A l'étape n, on tire une boule au hasard, on la remet ensuite dans l'urne et on rajoute une boule de la même couleur. On appelle X_n le nombre de boules blanches et Y_n le nombre de boules noires à l'étape n.

a) Montrer que $X_n + Y_n = n + 1$ et que

$$\mathrm{P}(X_n = j) = \frac{1}{n}\ , \quad 1 \leq j \leq n.$$

b) Simuler plusieurs expériences, et tracer sur un même graphique les différentes trajectoires (X_n) obtenues. Commenter.

1.4 Marches aléatoires dans $\mathbb{Z}^d$

1.4.1 Marche aléatoires dans $\mathbb{Z}$

On définit la marche aléatoire suivante :

- On pose $X(0) = 0$.
- A l'étape k, on pose $X(k) = X(k-1) + 1$ avec une probabilité p et $X(k) = X(k-1) - 1$ avec une probabilité $1 - p$.

a) Que peut-on dire sur $\mathrm{E}X(k)$ et $\mathrm{Var}X(k)$ si $p = 1/2$? et si $p > 1/2$?

b) Simuler plusieurs trajectoires de longueur n dans le cas $p = 1/2$. Etudier $\min_{1 \leq k \leq n} X(k)$ et $\max_{1 \leq k \leq n} X(k)$.

c) Pour différentes valeurs de A, estimer le premier temps de passage de la chaîne en A lorsqu'elle part de 0.

1.4.2 Marche aléatoires dans $\mathbb{Z}^2$

On définit maintenant la marche aléatoire suivante :

- On pose $X(0) = (0, 0)$.
- A l'étape k, on définit les transitions de la composante X_1 par le tableau suivant :

	$X_1(k-1) = 0$	$X_1(k-1) > 0$	$X_1(k-1) < 0$
$\mathrm{P}\Big(X_1(k) = X_1(k-1) - 1\Big)$	$1/3$	p	q
$\mathrm{P}\Big(X_1(k) = X_1(k-1) + 1\Big)$	$1/3$	q	p
$\mathrm{P}\Big(X_1(k) = X_1(k-1)\Big)$	$1/3$	$1 - p - q$	$1 - p - q$

(Idem avec l'autre composante X_2)

a) Simuler et représenter graphiquement différentes trajectoires $(X(k))$ obtenues avec différentes valeurs de p et q.

b) Représenter sous forme d'un histogramme les distributions empiriques de X_1 et X_2. Commenter.

1.5 Simulation de variables aléatoires réelles

1.5.1 Variables aléatoires discrètes

a) Simuler une variable de Bernoulli de paramètre p fixé. En déduire comment simuler une v.a. X à valeurs dans $\{a; b\}$ et telle que $P(X = a) = 1 - P(X = b) = p$.

b) Simuler une v.a à valeurs dans $\{1, 2, \cdots, K\}$ et telle que $P(X = i) = p_i$, où les p_i sont fixés. On considèrera le cas où les p_i sont tous égaux ainsi que le cas où les p_i sont quelconques.

c) Simuler une v.a. de Poisson de paramètre λ.

d) Simuler une v.a. binomiale $B(N, p)$.

d) Simuler une v.a. multinomiale $multi(N, p_1, p_2, \dots, p_\ell)$.

e) Choisir une permutation aléatoire de l'ensemble $\{1, ..10\}$ avec une loi uniforme sur l'ensemble des permutations.

f) Simuler maintenant des n-échantillons avec les lois ci-dessus. Vérifier expérimentalement la loi des grands nombres et le TLC.

1.5.2 Variables aléatoires continues

a) Simuler une variable aléatoire uniforme à valeurs dans $[a, b[$.

b) Simuler une variable gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2.

c) Simuler une variable exponentielle de paramètre λ.

d) Simuler une variable aléatoire à valeur dans un intervalle $[a, b[$, de loi F continue, quelconque. On pourra simuler, par exemple, une variable dont la distribution est déteminée par :

$$\begin{array}{rll} i) & P(X < t) = \frac{1-\cos(\pi t)}{2} & 0 \leq t \leq 1, \\ ii) & P(X < t) = \frac{1-\cos(\pi t)}{3-t} & 0 \leq t \leq 1. \end{array}$$

e) Simuler maintenant des n-échantillons avec les lois ci-dessus. Vérifier expérimentalement la loi des grands nombres et le TLC.