UPS - Toulouse - Licence d'Ingénierie Mathématique
Examen de Probabilités du 10 septembre 2003

La durée de l'épreuve est 2h-Pas de document autorisé- Calculatrices UPS autorisées.

1. Distance à l'origine

On choisit un point M au hasard sur le disque de centre O de rayon 1. On note X la distance de M à l'origine. Quelle est la fonction de de répartition de X? Déterminer sa densité. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var} X}$.

2. Dé

On considère un dé équilibré à l faces. Soit X le score observé après un lancer.

a) Quelle est la loi de X. Calculer son espérance et sa variance. Indication : on rappelle que pour $M \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{i=1}^{M} i^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}.$$

b) On suppose $l = 10$. Soit $X_1, \dots X_{100}$ les scores de 100 lancers de dé indépendants. On pose $\overline{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$. Donner une évaluation de $\mathbb{P}(\overline{X} \leq 4)$. Indication : soit V une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, pour $v > 2$, on a :

$$\mathbb{P}(V < -v) \approx \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} v}.$$

3. Processus A.R.

On considère la suite de variables aléatoires (X_n) définie par :

$$X_{n+1} = \theta(X_n + \varepsilon_n), \; n \geq 0, \tag{1}$$

où (ε_n) est une suite de variables indépendantes, equidistribuées, de loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in [0,1]$), et θ est un réel fixé. On suppose que $\theta \neq -1$ et $\theta \neq 1$.

a) On suppose que $X_0 = 0$.
   - α) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer X_n en fonction des ε_j, $j = 0, \dots, n-1$.
   - β) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathrm{var} X_n$.
   - γ) Pour quelles valeurs de θ ces paramètres convergent-ils quand n tend vers l'infini? Que valent alors les limites de ces paramètres?

b) On suppose que $\theta = p = \frac{1}{2}$, que X_0 est indépendante de la suite (ε_n), et que cette variable suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la fonction de répartition de X_1, puis en déduire celle de X_n, $n \geq 2$. Quelle est la loi de X_n?

4. Exponentielle double

Soit Z une variable aléatoire de densité $h(z) = \frac{1}{2}\exp(-|z|)$, $(z \in \mathbb{R})$. On note φ_Z sa fonction caractéristique.

a) Calculer φ_Z.

b) Soit l une fonction mesurable, bornée et paire sur $\mathbb{R}$. On suppose que l est nulle en dehors de $[-1, 1]$. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{l(x)}{1+x^2} = \frac{1}{4}\int\int_{\mathbb{R}^2} \cos(zx) l(x) \exp(-|z|) dx dz \tag{2}$$

c) Déduire de (2) la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} \exp(-z) dz$$