UPS - Toulouse - Licence d'Ingénierie Mathématique
Corrigé de l'examen de Probabilités du 16 Mai 2003

1 Renouvellement

a) Pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}[\exp(itX_1)] = \int_0^{+\infty} \exp(itx - x)dx = \left[\frac{\exp(itx - x)}{it - 1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1 - it}. \qquad (1)$$

Puisque les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d. on obtient

$$\varphi_{S_n}(t) = \mathbb{E}[\exp(it(X_1 + \cdots + X_n))] = (\varphi_{X_1}(t))^n = \frac{1}{(1 - it)^n}.$$

b) Montrons, par récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} e^{itx} dx = \frac{(n-1)!}{(1 - it)^n} \quad (t \in \mathbb{R}). \qquad (2)$$

L'égalité (2) est vraie pour $n = 1$ (c'est le calcul qui a été fait en (1)). Supposons que l'égalité (2) soit vraie jusqu'au rang $N \in \mathbb{N}^*$. Posons alors, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in \mathbb{R}$, $g_N(x, t) = x^{N-1} \exp(x(it - 1))$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $g_N(x, t)$ est dérivable en son argument t sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\left|\frac{\partial g_N}{\partial t}(x, t)\right| = x^N e^{-x}.$$

Cette fonction ne dépend plus de t et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous permet alors de conclure que, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} x^{N-1} e^{-x} e^{itx} dx = i \int_0^{+\infty} x^N e^{-x} e^{itx} dx.$$

En dérivant l'égalité (2) pour $n = N$ on obtient :

$$i \int_0^{+\infty} x^N e^{-x} e^{itx} dx = i \frac{N(N-1)!}{(1 - it)^{N+1}}.$$

En simplifiant les deux membres de l'égalité précédente par i, on obtient l'égalité (2) pour $n = N + 1$ et cela achève la démonstration.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-x) \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après la question précédente, en prenant $t = 0$ dans (2) on obtient que f_n est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit Z_n une variable aléatoire de densité f_n. L'équation (2) dit précisement que la fonction caractéristique de Z_n est $(1 - it)^{-n}$ ($t \in \mathbb{R}$). La fonction caractéristique caractérise complétement la loi. Donc, S_n a la même loi que Z_n. C'est-à-dire que S_n a pour densité $f_{S_n} = f_n$.

d) Posons $S_0 = 0$. La suite (S_n) est presque sûrement strictement croissante. Donc, pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t > k) &= \mathbb{P}(S_1 \leq t, S_2 \leq t, \ldots, S_k \leq t, S_{k+1} \leq t) = \mathbb{P}(S_{k+1} \leq t), \\
\mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(N_t > k-1) - \mathbb{P}(N_t > k) = \mathbb{P}(S_k \leq t) - \mathbb{P}(S_{k+1} \leq t)
\end{aligned}$$

On a d'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1} \leq t) = \int_0^t \frac{x^k}{k!} \exp(-x) dx &= \left[-\frac{x^k}{k!} \exp(-x) \right]_0^t + \int_0^t \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-x) dx \\
&= -\frac{t^k}{k!} \exp(-t) + \mathbb{P}(S_k \leq t).
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{t^k}{k!} \exp(-t).$$

N_t suit la loi de Poisson de paramètre t.

2 Estimateur à noyau

a) Posons

$$C = \sup_{t \in [x_0 - h_0, x_0 + h_0]} f(t)$$

cette constante est bien finie puisque la fonction f est supposée être continue. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x_0) \leq 2Ch_n$. Donc $p_n(x_0)$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, toujours grâce à la continuité de f, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ avec pour $n \geq n_\varepsilon$,

$$\sup_{t \in [x_0 - h_n, x_0 + h_n]} |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Donc, pour $n \geq n_\varepsilon$ on a

$$2h_n(f(x_0) - \varepsilon) \leq p_n(x_0) \leq 2h_n(f(x_0) + \varepsilon).$$

Par passage à la limite, on obtient,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{p_n(x_0)}{2h_n} \leq f(x_0) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \liminf_{n \to \infty} \frac{p_n(x_0)}{2h_n} \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire on obtient,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_n(x_0)}{2h_n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{p_n(x_0)}{2h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x_0)}{2h_n} = f(x_0).$$

b) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\mathbb{I}_{[x_0-h_n, x_0+h_n]}(X_j)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_n(x_0)$. D'autre part, les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. Donc, $2nh_n\widehat{f}_n(x_0)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n(x_0))$. D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widehat{f}_n(x_0)] &= \frac{1}{2nh_n}\mathbb{E}\left[2nh_n\widehat{f}_n(x_0)\right] = \frac{np_n(x_0)}{2nh_n} = \frac{p_n(x_0)}{2h_n}, \\
\mathrm{Var}[\widehat{f}_n(x_0)] &= \frac{1}{4n^2h_n^2}\mathrm{Var}\left[2nh_n\widehat{f}_n(x_0)\right] = \frac{np_n(x_0)(1-p_n(x_0))}{4n^2h_n^2} = \frac{p_n(x_0)(1-p_n(x_0))}{4nh_n^2}.
\end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\widehat{f}_n(x_0) - f(x_0))^2\right] &= \mathrm{Var}\left[\widehat{f}_n(x_0)\right] + \left[\mathbb{E}[\widehat{f}_n(x_0)] - f(x_0)\right]^2 \\
&= \left[\frac{1-p_n(x_0)}{2nh_n}\right]\left[\frac{p_n(x_0)}{2h_n}\right] + \left[\frac{p_n(x_0)}{2h_n} - f(x_0)\right]^2.
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats de la question a), on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[(\widehat{f}_n(x_0) - f(x_0))^2\right] = 0.$$

Donc $(\widehat{f}_n(x_0))$ converge en moyenne quadratique (et donc en probabilité) vers $f(x_0)$.