DEA de Mathématiques Appliquées
Examen de Grandes Déviations
2002-2003

Epreuve du 31 janvier 2003

Documents autorisés : notes de cours.

1 Processus des records

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes et identiquement distribuées de densité f. On définit la suite des rangs relatifs (R_n) associée à (X_n) en posant $R_1 = 1$ et pour $j \geq 2$,

$$R_j = 1 + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{1}_{X_j < X_i}.$$

R_j compte le nombre de variables parmi $X_1, \ldots X_j$ qui excèdent X_j.

1) Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, montrer que pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on a

$$\mathbb{P}\left(X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\right) = \frac{1}{n!}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, et $r = (r_1, \ldots, r_n)$ avec, pour $j = 1, \ldots, n$, $r_j \in \{1, \ldots, j\}$. Montrer qu'il existe une unique permutation σ_r de $\mathcal{S}_n$ avec

$$\{R_1 = r_1, R_2 = r_2, \ldots, R_n = r_n\} \overset{\text{p.s.}}{=} \left\{X_{\sigma_r(1)} < X_{\sigma_r(2)} < \cdots < X_{\sigma_r(n)}\right\}.$$

En déduire que les variables $R_1, \ldots, R_n$ sont indépendantes et que, pour $j \in \mathbb{N}^*$, R_j suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, j\}$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse maintenant au nombre Z_n^1 de records jusqu'à l'instant n :

$$Z_n^1 = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{R_j = 1\}}.$$

Calculer l'espérance et la variance de Z_n^1. En déduire que $(\log n)^{-1} Z_n^1$ converge en probabilité vers 1.

4) Pour $\theta \in]-1/2, +\infty[$, montrer que

$$\theta - 2\theta^2 \leq \log(1+\theta) \leq \theta.$$

Montrer que la suite $((\log n)^{-1} Z_n^1)$ satisfait un principe de grandes déviations de bonne fonction de taux J_1 à préciser et de vitesse $(\log n)$.

5) On pose maintenant :

$$Z_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{R_j = j\}}$$

et $Z_n = (Z_n^1, Z_n^2)^T$. Montrer que la suite des vecteurs aléatoires $((\log n)^{-1} Z_n)$ converge en probabilité et satisfait également un principe de grandes déviations (pour la vitesse $(\log n)$). Préciser la bonne fonction de taux J. Retrouver alors le résultat de grandes déviations de la question 4).

2 Modèle linéaire gaussien

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^{*2})$ ($\sigma^* \in \mathbb{R}_*^+$). On pose $\varepsilon_{(n)} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^T$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n > k$, on considère le modèle linéaire gaussien :

$$Y_{(n)} = A_{(n)} \theta^* + \varepsilon_{(n)},$$

où $Y_{(n)} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$, $A_{(n)}$ est une matrice $n \times k$ et $\theta^* \in \mathbb{R}^k$. On suppose que la matrice $A_{(n)}$ est de rang plein. On se propose d'estimer les paramètres σ^* et θ^* par la méthodes des moindres carrés (qui coïncide ici avec la méthode du maximum de vraisemblance). Pour cela on pose, pour $\theta \in \mathbb{R}^k$

$$L_n(\theta) = \left\| Y_{(n)} - A_{(n)} \theta \right\|^2 = \left\langle Y_{(n)} - A_{(n)} \theta, Y_{(n)} - A_{(n)} \theta \right\rangle.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^n$. La méthode des moindres carrés consiste alors, pour estimer θ^*, à minimiser en θ la fonction $L_n(\theta)$.

1) Montrer qu'il existe un unique vecteur $\widehat{\theta}_n$ qui satisfait :

$$L_n(\widehat{\theta}_n) = \inf_{\theta \in \mathbb{R}^k} L_n(\theta).$$

Montrer que l'on a $\widehat{\theta}_n = B_{(n)} Y_{(n)}$ où $B_{(n)}$ est une matrice $k \times n$ à préciser.

2) Afin d'étudier les propriétés de grandes déviations de $(\widehat{\theta}_n)$, on fait des hypothèses supplémentaires sur le modèle linéaire. Soit K un compact donné de $\mathbb{R}^k$. On note $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^T$ un élément générique de K. On suppose que, pour $n > k$, la matrice $A_{(n)}$ s'écrit

$$A_{(n)} = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} \quad \text{où } a_1, \ldots, a_n \in K.$$

On suppose qu'il existe une probabilité F sur K avec pour tout $f \in C(\mathbb{R}^k)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(a_j) = \int_K f(\alpha)F(d\alpha)$$

et que la matrice $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{1\le i,j\le k}$ $k \times k$ donnée par

$$\lambda_{i,j} = \int_K \alpha_i\alpha_j F(d\alpha),\ i,j \in \{1,2,\ldots,k\}$$

est inversible. Calculer la limite de $n(A_{(n)}^T A_{(n)})^{-1}$. Soit Σ une matrice $k\times k$ symétrique et définie positive. Montrer que, pour $\theta \in \mathbb{R}^k$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^k}\left(\langle t,\theta\rangle - \langle t,\theta^*\rangle - \frac{1}{2}t^T\Sigma^{-1}t\right) = \frac{1}{2}(\theta-\theta^*)^T\Sigma(\theta-\theta^*).$$

Montrer que sous les hypothèses précédentes la suite d'estimateurs $(\widehat{\theta}_n)$ satisfait un principe de grandes déviations pour la vitesse (n). Préciser la bonne fonction de taux J_1.

3) Pour estimer σ^{*2} on d'utiliser l'estimateur

$$S_n^2 = \frac{1}{n-k}\|Y_{(n)} - A_{(n)}\widehat{\theta}_n\|^2.$$

Montrer que $A_{(n)}B_{(n)}$ est un projecteur orthogonal et en déduire que S_n^2 et $\widehat{\theta}_n$ sont indépendants. Quelle est la loi de $(n-k)\sigma^{*-2}S_n^2$? Montrer que (S_n^2) satisfait un principe de grandes déviations (pour la vitesse (n)). Préciser la bonne fonction de taux J_2. Montrer que la suite de vecteurs aléatoires $(\widehat{\theta}_n, S_n^2)^T$ satisfait un principe de grandes déviations (pour la vitesse (n)). Donner la fonction de taux J de ce principe.

3 Problème des moments de Markov

On considère le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $L^\infty([0,1])$ constitué des fonctions presque partout positives et majorées par 1. Soit $\Phi(x) = (x,x^2)^T$, $(x\in[0,1])$. On pose

$$\mathcal{K} = \left\{\int_0^1 \Phi(x)f(x)dx :\ f\in\mathcal{C}\right\}.$$

1) Montrer que les ensembles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ sont convexes. On pose

$$\mathcal{K}' = \left\{(\alpha,\beta)^T \in \mathbb{R}^2 :\ 0\le\alpha\le\frac{1}{2},\ \frac{(2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{3} \le \beta \le \frac{1-(1-2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{3}\right\}.$$

En utilisant, pour $a\in[0,1]$, les fonctions $\mathbb{I}_{[0,a]}(x)$ et $\mathbb{I}_{[a,1]}(x)$ $(x\in[0,1])$ montrer que $\mathcal{K}$ contient $\mathcal{K}'$. On admettra dans la suite que l'on a aussi $\mathcal{K}\subset\mathcal{K}'$.

2) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

On considère la mesure positive aléatoire sur $[0,1]$:

$$\nu_n(dx) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \delta_{\frac{j}{n}}(dx).$$

Soit $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)^T \in (C([0,1]))^k$, on pose

$$\nu_n(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) \nu_n(dx).$$

Calculer l'espérance et la matrice de variance covariance du vecteur aléatoire $\nu_n(\varphi)$. En déduire que la suite $(\nu_n(\varphi))$ converge en probabilité vers une limite à préciser.

3) Montrer que la suite $(\nu_n(\varphi))$ satisfait un principe de grandes déviations (à la vitesse (n)). Préciser la bonne fonction de taux I_φ associée à ce principe.

4) On peut montrer, en utilisant une version fonctionnelle du théorème de Gärtner-Ellis, que (ν_n) satisfait un principe de grandes déviations sur l'espace des mesures $\mathcal{M}([0,1])$ sur $[0,1]$(pour la topologie de la convergence étroite). La bonne fonction de taux est définie, pour $\mu \in \mathcal{M}([0,1])$, par :

$$J(\mu) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 [f \log f + (1-f) \log(1-f)]\, dx + \log 2 & \text{si } \mu(dx) = f dx \text{ et } f \in \mathcal{C}, \\ \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

(On prend la convention que $0 \log 0 = 0$). Montrer que la fonction de taux J est convexe. Montrer que, pour $f \in \mathcal{C}$, on a

$$0 \leq J(f dx) \leq \log 2$$

et que $J(f dx) = 0$ si, et seulement si, $f \equiv 1/2$. Que peut-on en conclure sur la nature de la suite (ν_n)?

5) Montrer que, pour $z = (\alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^2$,

$$I_\Phi(z) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}_z} J(\mu),$$

où l'on a posé

$$M_z = \left\{ \mu \in \mathcal{M}([0,1]) : \int_0^1 \Phi(x) \mu(dx) = z \right\}.$$

6) En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$z = (\alpha, \beta)^T \in \mathcal{K}'$$

équivaut à

$$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}, \quad v_1 \alpha + v_2 \beta \leq \int_0^1 \log[1 + \exp(v_1 x + v_2 x^2)] dx.$$