IUFM de Toulouse
Préparation au CAPES de Maths
2001-2002

# Problème encadré de Probabilités du 30/11/2001

## 1 Polynômes de Bernstein

Soient $x \in [0,1]$ et $n$ un entier strictement positif. Soit $X_n$ une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$.

a) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de $X_n$. En déduire, pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \left|\frac{X_n}{n} - x\right| \geq \varepsilon \right\}\right) = \sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\varepsilon} C_n^k (1-x)^{n-k} x^k \leq \frac{x(1-x)}{n\varepsilon^2}.$$

b) Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$. On pose :

$$B_n(f,x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right] \quad (x \in [0,1]).$$

Montrer que pour $x \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$,

$$|f(x) - B_n(f,x)| \leq 2 \sup_{z\in[0,1]} |f(z)| \frac{x(1-x)}{n\varepsilon^2} + \sup_{|y-x|<\varepsilon} |f(x) - f(y)|.$$

En déduire que la suite de fonctions $(B_n(f,x))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $f(x)$ sur $[0,1]$.

## 2 Le problème des scrutins

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on considère une promenade aléatoire où les déplacements possibles sont, pour $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. de $(i,j)$ vers $(i+1, j+1)$ ou $(i+1, j-1)$.

a) Donner une condition nécessaire est suffisante sur $m, \mu, n, \nu$ pour qu'il existe une trajectoire $T_{M,N}$ reliant $M(m,\mu)$ à $N(n,\nu)$. Donner le nombre de trajectoires $T_{M,N}$.

b) **Principe de réflexion**
Soit $\mu > 0$, $\nu > 0$ et $M'$ le symétrique de $M$ par rapport à l'axe des temps. Montrer qu'il existe autant de trajectoires touchant l'axe des temps et menant de $M$ à $N$, que de trajectoires menant de $M'$ à $N$. En déduire, lorsque, partant de $M$, on arrive en $N$ la probabilité de ne jamais rencontrer l'axe des temps.

c) Au cours d'un scrutin opposant deux candidats, $C$ a obtenu 600 voix et $D$ 400. Quelle est la probabilité que $C$ ait été majoritaire tout au long du scrutin?

## 3 Rue Gamma

Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \qquad \text{et} \qquad f_a(x) = \frac{x^{a-1}\exp(-x)}{\Gamma(a)} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

a) Montrer que la fonction $\Gamma$ est bien définie. Montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ $(a > 0)$.

b) Vérifier que $f_a$ est bien une densité de probabilité. Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f_a$ $(a > 0)$, calculer l'espérance et la variance de $X$.

c) Soit $W$ une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, c'est-à-dire que $W$ a pour densité la fonction

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Montrer que $\frac{W^2}{2}$ a pour densité $f_{\frac{1}{2}}$. En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

d) Soit $Y$ une variable aléatoire indépendante de $X$ et de densité $f_{a'}$ $(a' > 0)$. Montrer que $Z = X+Y$ a pour densité $f_{a+a'}$. Utiliser la formule de convolution pour en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{a'-1} du$.

e) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X_j$ $(j = 1 \ldots n)$, a pour densité $f_{a_j}$ $(a_j > 0)$. En utilisant la question précédente, determiner la loi de $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$.

f) On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j = a < +\infty$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \mathrm{var} Z_n = 0$. En déduire que $\frac{1}{n} Z_n$ converge dans $L^2$ et en probabilité vers une limite à préciser.

## 4 Around the geometric distribution

a) Soit $\theta \in ]0,1[$, calculer pour $|z| < \frac{1}{\theta}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k z^k$.

b) Soit $X$ une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X = k) = Ck\theta^k$. $(C \in \mathbb{R}_+^*,\ k \in \mathbb{N}^*)$. Calculer la fonction génératrice de $X$ et en déduire la valeur de la constante $C$.

c) Calculer l'espérance et la variance de $X$.

d) On considère une partie de pile ou face de durée indéterminée. On suppose que sur 1 lancer, pile a la probabilité $\theta$. Soit $Y$ le nombre de lancers (y compris le dernier) avant d'observer une première fois face. Quelle est la loi de $Y$? Calculer la fonction génératrice de $Y$.

e) Soit $Y_1$ et $Y_2$ 2 variables aléatoires indépendantes de même loi que $Y$. Montrer que $Y_1 + Y_2 - 1$ a la même loi que $X$.

# 5 Circle

Soit $X$ une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 1]$.

a) Soit $A$ l'aire du disque de rayon $X$ centré en 0. Quelle est la loi de $A$?

b) Soit $A_1, \ldots A_{100}$ des variables i.i.d. de même loi que $A$. On pose $\overline{A} = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} A_j$. Évaluer

$$P\left(\overline{A} \geq \frac{\pi}{3} + 1,64 \frac{\pi\sqrt{5}}{75}\right),$$

on justifiera sa réponse.