Université Paul Sabatier
Probabilités-L.I.M.
2000-2001

Feuille d'exercices 6

1 Chaîne de Markov à 2 états

On considère une transition Π de $\{0,1\}$ dans $\{0,1\}$. La matrice de transition qui lui est associée, notée aussi Π, s'écrit $\Pi = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ pour deux nombres p et q de [0,1].

- On suppose que p ou q ne vaut pas 1. Prouver:

$$\Pi^n = \frac{1}{p+q}\left\{\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} - (1-p-q)^n \begin{pmatrix} -p & p \\ q & -q \end{pmatrix}\right\}.$$

  Soit μ la mesure définie par $\mu(0) = \frac{q}{p+q}$, $\mu(1) = \frac{p}{p+q}$. Montrer:

$$\begin{cases} \mu\Pi = \mu \\ \lim_{n\to\infty} \Pi^n(0,0) = \lim_{n\to\infty} \Pi^n(1,0) = \mu(0) \\ \lim_{n\to\infty} \Pi^n(0,1) = \lim_{n\to\infty} \Pi^n(1,1) = \mu(1) \end{cases}$$

  Pour une chaîne de markov de transition Π et d'état initial 0, calculer les nombres moyens $N_n(0,0)$ ou $N_n(0,1)$ de passages de passages en 0 ou en 1 pendant les n premiers pas. Etudier $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(0,0)}{n}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(0,1)}{n}$.

- Décrire la chaîne d'état initial 0 lorsque $p = q = 1$.

2 Etude d'une chaîne a 9 états

On considère une matrice de transition (9×9) de la forme suivante (les x représentent des coefficients > 0).

$$P = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\
0 & x & x & 0 & x & 0 & 0 & 0 & x \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\
x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 \\
0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & x
\end{pmatrix}$$

Décrire les états transients, absorbants, récurrents, et les classes de récurrence (classes ergodiques).

3 Chaîne sur $\mathbb{N}$

Soit (X_n) une chaîne de Markov d'ensemble d'états N, et $P(n, n+1) = \theta_n = 1 - P(n, 0)$, où $0 < \theta_n < 1$

- Etudier la nature de l'état 0, puis des autres états.
- Existe-t-il une mesure invariante?

4 Temps de passage (Bis)

Soit (X_n) une chaîne de Markov d'ensemble d'états E, $x \in E$ et $P(X_0 = x) = 1$. On suppose x non absorbant.

- Soit $S = \inf\{n > 0, X_n \neq x\}$. Montrer que S a une loi géométrique.
- On pose $T_1 = \inf\{n > 0, X_n = x\}$; puis $T_2 = \inf\{n > T_1, X_n = x\}$ etc... Avec la convention $\inf(\emptyset) = \infty$. Si $n_1, \ldots, n_k$ sont des entiers ≥ 1, montrer que:

$$P(T_1 = n_1, T_2 - T_1 = n_2, \ldots, T_k - T_{k-1} = n_k) = \prod_{i=1}^{n} P(T_1 = n_i).$$

  En déduire que $T_1, T_2 - T_1 =, \ldots, T_k - T_{k-1}$ sont indépendantes équidistribuées, et que

  - $P(T_k < \infty) = [P(T_1 < \infty)]^k$
  - $E\left(\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}}\right) = \sum_{n\geq 0} P^n(x, x) = \frac{1}{1 - P(T_1 < \infty)} \leq \infty$

  Conclure à la dichotomie suivante:

  - Ou bien $\sum_{n\geq 0} P^n(x, x) = \infty$ ce qui équivaut à $P(T_1 < \infty) = 1$: x est récurrent.
  - Ou bien $\sum_{n\geq 0} P^n(x, x) < \infty$ ce qui équivaut à $P(T_1 < \infty) < 1$: x est transient.

5 Chaîne d'Ehrenfest.

d molécules sont réparties à l'instant initial dans deux boites. A l'instant n on choisit une molécule au hasard, suivant la probabilité uniforme, et on la change de boite. On note X_n le nombre de molécules dans la première boite à l'instant n

(a) Déterminer le noyau de transition P de la chaine ainsi définie.
(b) Quelle est la loi de X_n si X_0 suit une loi binomiale $B(d, 1/2)$?
(c) Soit $T_0 = \inf\{n > 0 : X_n = 0\}$. déterminer $P_x(T_0 = n)$ pour $d = 3$.

6 Fiabilité

Une machine se met en route à l'instant 0 et possède une durée de vie aléatoire X, v.a. entière de loi $(p(x))_{x\geq 1}$ ($p(x) > 0,\ \forall x$). A l'instant où elle tombe en panne, elle est remplacée par une machine identique, de durée de vie donc de même loi mais indépendante de la première et ainsi de suite. On note $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ les durées de vie successives des machines et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. A_t désigne l'age de la machine en fonctionnement à l'instant t (entier ≥ 0). Par convention si une machine tombe en panne à l'instant t, A_t est l'age de sa remplaçante soit 0.

1) Si $\nu_t \geq 1$, ($t \in \mathbb{N}$) désigne le numéro (aléatoire) de la machine en marche au temps t, exprimer $\{\nu_t = n\}$ à l'aide des S_n et en déduire l'expression de A_t en fonction des variables S_n.

2) Montrer que A_t est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition Q.

3) Établir que l'état 0 est récurrent et que la chaîne est irréductible. Calculer les proportions de temps asymptotiques que la chaîne (A_t) passe dans ses différents états.

7 Chaîne de vie ou de mort

On considère la chaîne de Markov (X_t) à valeurs dans $\mathbb{N}$ de transition Q

$$Q(x, x-1) = q_x \quad Q(x, x+1) = p_x \quad Q(x, x) = r_x \quad p_x + q_x + r_x = 1.$$

On suppose que $p_x > 0\ \forall x \geq 0$, $q_x > 0\ \forall x \geq 1$, $q_0 = 0$ et on pose $\gamma_x = \frac{q_1 \ldots q_x}{p_1 \ldots p_x}$, $\forall x \geq 1$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on note T_a le temps d'atteinte de a.

1) Soit $a < b$ des entiers naturels. On pose $T = \min(T_a, T_b)$ et l'on construit la chaîne de Markov tuée $(\tilde{X}_t)$ à valeurs dans $[a, b]$:

   - $X_0 \in [a, b]$.
   - $\tilde{X}_t = X_t$ pour $t < T$.
   - $\tilde{X}_t = X_T$ pour $t \geq T$.

   On appelle $\tilde{Q}$ la transition de la chaîne $(\tilde{X}_t)$. Déterminer une *fonction* non triviale telle que $\tilde{Q}u = u$.

2) En déduire que $E_x[u(\tilde{X}_t)|\tilde{X}_{t-1} = k] = u(k)$ pour tout x avec $a < x < b$.

3) En déduire que $E_x(u(X_T)) = E_x(u(X_0))$.

4) Calculer $P_x(T = T_a)$ et $P_x(T = T_b)$ puis $P_1(T_0 < +\infty)$. Déduire de ce qui précède que la chaîne est récurrente si, et seulement si, $\sum_{x\geq 1} \gamma_x = +\infty$.