UPS - Toulouse - Licence d'Ingénierie Mathématique

Probabilités - Feuille 5

I

Montrer sur un exemple que deux v.a. gaussiennes peuvent être non corrélées et dépendantes. (*Indication : considérer deux v.a. indépendantes* X *et* ϵ *avec* $X \sim N(0,1)$ *et* $\epsilon = +1$ *ou* -1 *avec probabilité* $1/2$).

II

Les variables X et Y sont indépendantes et de lois normales centrées et réduites. Calculer la loi de (R, Θ) à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ où :

$$(X, Y) \ = \ (Rcos\Theta, Rsin\Theta).$$

En déduire que R et Θ sont indépendantes et donner leurs lois.

III

Soient X et Y deux variables aléatoires normales, centrées, réduites. Calculer $\mathbb{E}[Max(X,Y)]$.

IV

1. Soient X_1 et X_2 deux v.a.r. normales centrées réduites indépendantes. Calculer la fonction caractéristique de $Y = X_1^2/2$ puis celle de $Z = (X_1^2 - X_2^2)/2$.
2. Montrer que Z peut être considéré comme le produit de deux variables aléatoires normales indépendantes.
3. Soient A, B et C, trois v.a.r. normales centrées réduites. On considère le couple aléatoire (Z_1, Z_2) :
$$\begin{cases} Z_1 & = & AB \\ Z_2 & = & AC \end{cases}$$
Quelle est la fonction caractéristique du couple (Z_1, Z_2)? Retrouver la fonction caractéristique de Z.

V

Soit $X = {}^t(X_1, X_2, X_3, X_4)$ un vecteur gaussien centré de matrice de variance :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Que peut-on dire de X_3 et de (X_1, X_2, X_4)?
2. Donner la loi marginale de (X_1, X_2) et calculer $\mathbb{E}(X_1|X_2)$.
3. Même question pour (X_1, X_2).
4. En déduire deux variables indépendantes de X_2, fonctions respectivement de X_1, X_2 et X_4, X_2.
5. Trouver une décomposition de X en quatre vecteurs indépendants.

VI

Soit $X = {}^t(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire avec $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et de même loi, d'espérance m, de variance σ^2 finie. On pose

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \ \Sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2, \ S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

A On suppose que $X_i \sim N(m, \sigma^2)$, pour $i = 1, \ldots, n$.

1. Quelle est la loi de $\bar{X}$?
2. Quelle est la loi de $n\Sigma^2/\sigma^2$?
3. Montrer que $\bar{X}$ et S^2 sont indépendantes.
4. Montrer que $n\left[S^2 + (\bar{X} - m)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$. En déduire la fonction caractéristique de S^2 et reconnaître la loi correspondante.

B On ne suppose plus connue la loi des X_i mais on suppose que $\bar{X}$ et S^2 sont indépendantes. On note ϕ la fonction caractéristique de X_i.

1. Soit $m = 0$. Calculer $\mathbb{E}(nS^2)$ en fonction de σ^2, et montrer que $\mathbb{E}(nS^2 e^{int\bar{X}}) = \phi^n(t)\mathbb{E}(S^2)$ pour tout réel t. En déduire que ϕ est solution de:

$$\begin{cases} \dfrac{\phi''}{\phi} - \left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)^2 = -\sigma^2 \\ \phi(0) = 1, \ \phi'(0) = 0. \end{cases}$$

   En déduire que $X_i \sim N(0, \sigma^2)$ pour $i = 1, \ldots, n$.
2. Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse $m = 0$.