MATHEMATIQUES - Module F311

Michel Fournié

michel.fournie@iut-tlse3.fr ou michel.fournie@math.ups-tlse.fr

Matrice ??

Quelles notions faut-il bien comprendre ?

- Une matrice est un tableau de nombres
  avec des **règles de calcul** à maitriser :
  [matrice].[matrice], [matrice].[vecteur]
- La définition d'une base
- La définition d'une matrice dans une base donnée
  Ex : symétrie, projection, rotation
- Le changement de base

Opérations sur les matrices

Définition (simpliste) :

Une matrice est un tableau de valeurs
(généralement les valeurs sont dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)).

Définition (plus précise) :

L'ensemble des matrices A ayant n lignes et p colonnes sera notée $M_{np}(\mathbb{R})$ (tableau rectangulaire à np éléments de $\mathbb{R}$). On note

$$A \in M_{np}(\mathbb{R})$$

Notation :

On note a_{ij} le $j^{\text{ième}}$ élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne.

Notation

Écriture de la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

L'indice i correspond à la ligne
L'indice j correspond à la colonne
a_{ij} est un élément de la matrice

Vecteur et matrice carrée:

- Une matrice ayant 1 colonne ($p = 1$) est appelée vecteur.
- Une matrice telle que $n = p$ est appelée matrice carrée
  on note $A \in M_n(\mathbb{R})$)

Matrice Identitée

Matrice Identitée

La matrice identitée est une matrice carrée remplie de 0 avec des 1 sur la diagonale ($a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ij} = 1$ si $i = j$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transposition

Définition :

Soit $A \in M_{np}$. On appelle transposée de A notée ${}^tA$ la matrice $B \in M_{pn}$ définie par

$$b_{ij} = a_{ji}, \;\; 1 \leq i \leq p, \; 1 \leq j \leq n$$

- ${}^tA$ a pour lignes les colonnes de A et pour colonnes les lignes de A
- Pour une matrice carrée cela revient à faire une "symétrie" par rapport à la diagonale

Propriétés :

- ${}^t({}^tA) = A$

Transposition - Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad {}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrices particulières

Définition :

- A diagonale : $a_{ij} = 0$ lorsque $i \neq j$. Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
- A triangulaire inférieure (resp. supérieure) :
  $a_{ij} = 0$ lorsque $i < j$ (resp. $i > j$) Ex : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
- A symétrique : ${}^tA = A$. Ex : $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
- $\cdots$

Opérations sur les matrices

- Dans ce qui suit nous allons voir comment effectuer des opérations sur les matrices

- Si on note A une matrice et X un vecteur que signifie

$$A + B, \qquad \lambda.A, \qquad A.B, \qquad A^{-1}$$

Attention, certains calculs sont impossibles !!!

- Les automatismes permettant de faire les calculs sont à connaître parfaitement

L'addition

Définition :

- $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$

Les deux matrices doivent avoir la même dimension (même nombre de lignes et de colonnes)

Propriétés :

- $A + B = B + A$ $\exists$ = il existe
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $\exists$ une élément neutre : O matrice nulle. $A + O = A$
- $\exists$ une matrice opposée : $A + (-A) = O$ avec $-A = [-a_{ij}]$

Propriétés :

- ${}^t(A + B) = {}^tA +^t B$

L'addition - Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 44 & 55 & 66 \\ 77 & 88 & 99 \end{pmatrix}$$

Produit par un scalaire λ

Définition :

- $\lambda[a_{ij}] = [\lambda a_{ij}]$

Propriétés :

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

Propriétés :

- ${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$

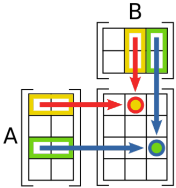
Produit par un scalaire - Exemple

$$10 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices (suite)

Propriétés :

- $A \in M_{qn}, \;\; B \in M_{np} \implies C = AB \in M_{qp}$
- $$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$



Remarques pratiques importantes:

- Dans le produit AB, le nombre de colonne de A doit être égal au nombre de ligne de B
- c_{ij} s'obtient en multipliant élément par élément la $i^{\text{ième}}$ ligne de A par la $j^{\text{ième}}$ colonne de B et en faisant la somme des produits obtenus
- c_{ij} est le produit scalaire du $i^{\text{ième}}$ vecteur ligne de A par le $j^{\text{ième}}$

Produit de matrices

$$\overbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & b_{1j} & \cdot & b_{1p} \\ b_{21} & \cdot & b_{2j} & \cdot & b_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdot & b_{mj} & \cdot & b_{mp} \end{pmatrix}}^{B}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdot & \cdot & a_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_{ij} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{np} \end{pmatrix} = C$$

Exercice : Produit de matrices

Effectuer le produit matriciel AB suivant

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Le produit BA est-il possible ?

Exercice : Produit de matrices

Effectuer le produit matriciel AB suivant

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Correction :

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 10 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Le produit BA est-il possible ?

Produit de matrices (suite)

Propriétés :

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB) = \lambda AB$
- $IA = A$ et $AI = A$ où I est la Matrice Identitée
- ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Attention au produit

ATTENTION:

Le produit de deux matrices n'est pas (en général) commutatif $\boxed{\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}}$

Exercice :

Calculer les deux produits matriciels AB et BA pour

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Correction :

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Déterminant d'une matrice (signification concrète)

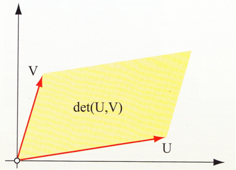
Définition:

• Soient 2 vecteurs du plan U et V qui déterminent un parallélogramme.

• Le déterminant, noté $det(U, V)$ est l'aire du parallélogramme affecté du signe $-$ si le trajet de U à V se fait dans le sens des aiguilles d'une montre.

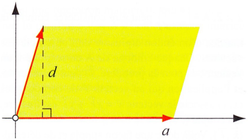
• Si U a pour coordonnées (a, b) et V pour coordonnées (c, d) on notera

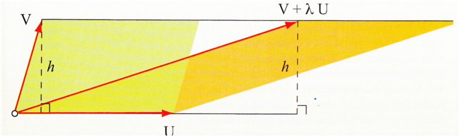
$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = det(U, V)$$



Déterminant d'une matrice (Propriétés graphiques)

Propriétés:



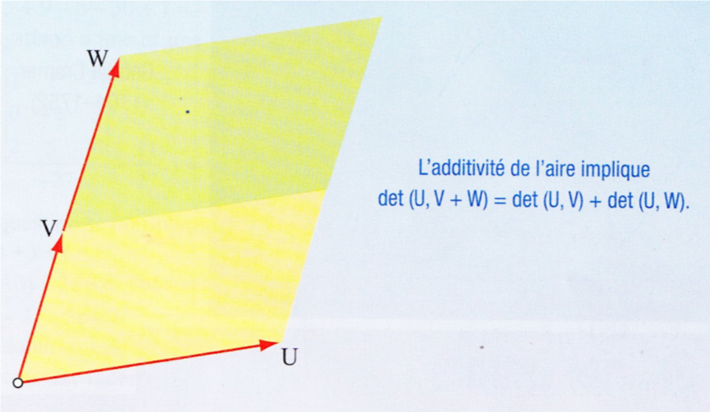


$$\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad$$

$$det(U, V + \lambda U) = det(U, V)$$

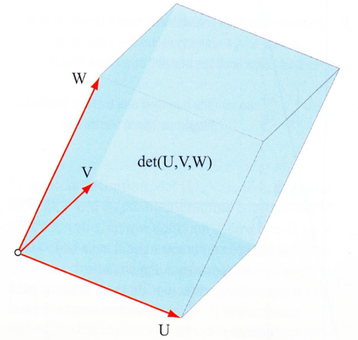
Déterminant d'une matrice (Propriétés graphiques)

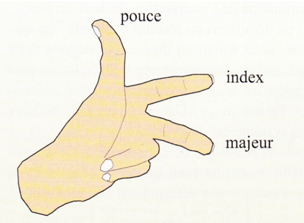
Propriétés:



Déterminant d'une matrice (Propriétés graphiques)

Extension:





- Si U, V et W sont dans le sens (majeur, index, pouce) de la main gauche alors le déterminant est $+$.
- Le signe est donc changé si on échange deux des vecteurs.

Déterminant d'une matrice (abstrait mais général)

Définition : (Par récurrence)

- Dans M_{22} :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Dans M_{33} :

Développement par rapport à une ligne (ex: 1ère)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{(1+1)}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+3)}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Déterminant dans M_{33}

Développement par rapport à une colonne (ex: 2ième)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2)} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(2+2)} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{(3+2)} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Définition : $(-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ cofacteur associé à $a_{12} \cdots$

Généralisation : en dimension. supérieure par récurrence

Déterminants (suite)

Propriétés :

- $\det(A) = \det({}^t A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A) = \det({}^t A)$

- la fonction déterminant est linéaire par rapport aux éléments d'une ligne (col.)

$$\Longrightarrow \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

- Echanger 2 lignes (col.) change le signe du déterminant
- Le déterminant est inchangé si on ajoute à une ligne (col.) une combinaison linéaire des autres lignes (col.)

Calcul pratique de déterminants

Faire apparaître des 0 dans la ligne (ou col.) choisie pour le développement :

- en ajoutant à la ligne (ou col.) des multiples convenables des autres lignes (ou col.)
- Attention : on doit toujours conserver au moins une ligne (ou col.) inchangée

Propriété :

Si la matrice A est triangulaire (ou diagonale)

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Exercice : déterminant

Montrer que le déterminant $\det(A)$ de la matrice A est nul

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 3a+2 \\ b & 2 & 3b+4 \\ c & 3 & 3c+6 \end{bmatrix}$$

Interprétation (déterminant)

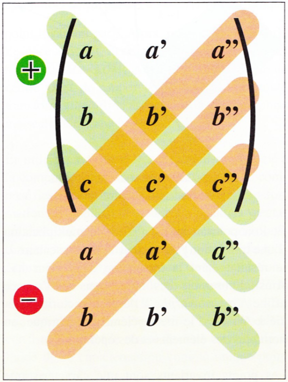
- Partant d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$,
on lui associe la matrice A (de dimension 3×3) alors $\det(A)$ représente la mesure du volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs colonnes (soit le produit mixte de ces trois vecteurs)

- Pour $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 12 & a_{13} \\ a_{21} & 22 & a_{23} \\ a_{31} & 32 & a_{33} \end{pmatrix} = (V_1, V_2, V_3)$ où

$V_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ alors

$$\det(A) = V_1.(V_2 \wedge V_2)$$

La règle de Sarrus (uniquement pour les matrices 3x3)



Règle de Sarrus :
on recopie les deux premières lignes du déterminant sous celui-ci, puis on additionne les facteurs verts et soustrait les facteurs rouges.
Autrement dit, le déterminant est égal à :

Inversion d'une matrice

Définition :
A est inversible si et seulement si il existe une matrice notée A^{-1} telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = Id$$

où Id est la matrice identitée.

Théorème :
A est inversible si et seulement $\det(A) \neq 0$

Inversion d'une matrice (suite)

Théorème :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^{t}[\text{matrice des cofacteurs}]}$$

Pour obtenir l'inverse de A on divise par $\det(A)$ la transposée de la matrice des cofacteurs

Autre méthode plus importante (en pratique):

Méthode de Gauss

qui sert aussi à résoudre les systèmes linéaires

Exercice : Inversion d'une matrice

Calculer l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Correction : $\det(A) = 9$, la matrice des cofacteurs vaut

$$\begin{bmatrix} -13 & -4 & 7 \\ 10 & 1 & -4 \\ -8 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ d'où } A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -13 & 10 & -8 \\ -4 & 1 & 1 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Méthode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 - L_1 \\ L_3^{(1)} = L_3 - L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + 2L_2^{(1)} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss (suite)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1^{(3)} = L_1^{(2)} + L_3'' \\ L_2^{(3)} = L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} = L_3^{(2)} \end{array} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1^{(4)} = L_1^{(3)} - L_2^{(3)} \\ L_2^{(4)} = L_2^{(3)} \\ L_3^{(4)} = L_3^{(3)} \end{array} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1^{(5)} = L_1^{(4)} \\ L_2^{(5)} = L_2^{(4)} \\ L_3^{(5)} = -L_3^{(4)} \end{array} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss (suite)

Etapes de la méthode de Gauss

1- Faire apparaitre $\boxed{1}$ en Ligne 1 (L_1), Colonne 1 (C_1) (pivot-1)

2- Utiliser pivot-1 pour faire apparaitre des 0 en dessous

$\Longrightarrow$ On a obtenu la 1ère colonne qui ne changera plus
La 1ere ligne sera modifiée par la suite mais
ne sera plus utilisée pour modifier les autres lignes

3- Faire apparaitre un $\boxed{1}$ en L_2, C_2 (pivot-2)

4- Utiliser ce 1er pivot pour faire apparaitre des 0 en dessous

5- Faire apparaitre un $\boxed{1}$ en L_3, C_3 (pivot-3)

6- Utiliser ce 3ième pivot pour faire apparaitre des 0 en dessus

$\Longrightarrow$ On a obtenu C_3 (elle ne changera plus)

7- Utiliser le 2ième pivot pour faire apparaitre le dernier 0

Méthode de Gauss (Pivot $= 0$)

- Si un pivot est égal à 0, on permute cette ligne avec une autre
- Si il apparait une ligne complète de 0, c'est que la matrice est non inversible
  (son déterminant est nul).

Matrice Inversibe

Théorème :

A inversible $\Longleftrightarrow$ les vecteurs colonnes (respectivement lignes) sont linéairement indépendants

Propriété :

Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Définition :

A matrice orthogonale si $A^{-1} = {}^{t}A$ (en général $A^{-1} \neq {}^{t}A$)

Exercice : Matrice Inversible

Soit la matrice A suivante

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Calculer A^2
- Vérifier que $A^2 = 2A + 8I$
- En déduire A^{-1}

$$A^2 = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 6 & 10 & 6 \\ -2 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(A - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Déterminant (Complément)

Propriétés :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

- Les déterminants de 2 matrices semblables sont égaux

A et B sont semblables s'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$

Remarque : Si on note $B = A^{-1}$ on peut voir que

$$b_{ij} = \frac{\det(C_1, \cdots, C_{j-1}, e_j, C_{j+1}, \cdots, C_n)}{\det(A)}$$

où e_j (que des 0 et un 1 à la $j^{\text{ième}}$ place) se trouve à la place du $i^{\text{ième}}$ vecteur colonne de la matrice A

Systèmes d'équations linéaires

Théorème :

Soit un système de p équations à n inconnues

$$\boxed{\text{AX=b}} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{array} \right.$$

Théorème :

Pour $b_i = 0,\ i = 1, \cdots, p$ (on parle de système homogène)

Systèmes d'équations linéaires (suite)

Définition : (non vu dans ce cours)

- Si $n > p$ on par le système sous-déterminé
- Si $n < p$ on par le système sur-déterminé

Théorème :

Si $n = p$ le système homogène ($b = 0$) n'admet que la solution triviale 0

$\iff$ le système possède une unique solution

$\iff$ $\det(A) \neq 0$ pour A matrice associée au système

$\iff$ A est inversible

Systèmes d'équations linéaires (complément)

Système de Cramer :

On parle de système de Cramer quand $n = p$ et $\det(A) \neq 0$.
Dans ce cas la matrice A est inversible et $X = A^{-1}b$

Méthode de résolution :

On passe par A^{-1} (si possible !!!), **Méthode de Gauss**, $\cdots$

Remarque :

On montre que $x_j = \dfrac{\det(C_1, \cdots, C_{j-1}, b, C_{j+1}, \cdots, C_n)}{\det(A)}$
avec $\det(A) = \det(C_1, \cdots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \cdots, C_n)$

Méthode de Gauss appliquée aux systèmes

Résolution du système : MAPLE : GAUSS.MWS

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_+ 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

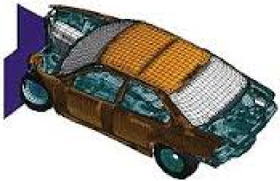
- On effectue les mêmes opérations que celles réalisées pour inverser une matrice par la méthode de Gauss (pivots).
- Il n'est pas nécessaire de faire apparaitre la matrice Identité, on peut s'arrêter à une **matrice triangulaire**.
- Avoir conscience que les éliminations de Gauss sont celles faites pour résoudre un système sans les matrices

Elimination de Gauss (démo)

- A quoi correspond l'élimination de Gauss réalisée pour inverser une matrice A ?
- On résout 3 systèmes linéaires en même temps. Quels sont ils ?
- $AX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $AX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $AX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Pour les 3 systèmes les éliminations de Gauss sont les mêmes.
- Que représente la matrice $(X_1 \;\; X_2 \;\; X_3)$?

Taille des systèmes en pratique

- En pratique, les systèmes linéaires résolus matriciellement sont de très grande taille
  $10^6 \times 10^6$ (plusieurs millions d'équations)
  d'où l'importance de l'ordinateur $\cdots$
- Illustration : La méthode des éléments finis (ingénierie)



Notations

Notations dans ce qui suit :

- $\mathbb{R}$ pourra être remplacé par $\mathbb{C}$, on notera K
  très souvent $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$
  ("K" pour les constantes, "E" pour le plan ou l'espace)
- V est un élément de E
- $\forall$ signifie $\longleftrightarrow$ pour tout
- $\exists$ signifie $\longleftrightarrow$ il existe
- * dans les titres indique des compléments de cours

Structure d'espace vectoriel

Le corps **K** ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est le corps des **scalaires**.

Il est muni de deux lois:

- la loi "+" (loi de composition interne)
- la loi "." (loi de composition externe)

avec les propriétés usuelles connues

Définition :

- Un ensemble E (non vide) muni de deux lois vérifiant certaines propriétés sera appelé espace vectoriel sur K
- On le note $(E, +, .)$
- Ses éléments sont appelés vecteurs

* Espace vectoriel (e.v.)

Définition : $(E, +, .)$

Un ensemble E est un e.v. sur $\mathbb{R}$(ou$\mathbb{C}$) si et seulement si

- Propriété pour la loi $+$:

  $\forall x, y \in E : x + y \in E$

  $\forall x, y, z \in E : x + (y + z) = (x + y) + z$

  $\forall x \in E, \exists$ élément noté0 tq $x + 0 = 0 + x = x$

  $\forall x \in E, \exists$ élément noté $-x$ tq $x + (-x) = (-x) + x = 0$

  $(E, +)$ est appelé groupe abélien

- Propriété pour la loi . :

Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$:

$1.x = x$ (1: élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}$)

$\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$, $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$, $(\lambda\mu).x = \lambda.(\mu x)$

Remarque : Dans $\mathbb{R}$(ou$\mathbb{C}$) "." représente bien la multiplication classique, "+" l'addition et "-" la différence

* Exemples d'e.v. sur $I\!R$

a) E = l'ensemble des vecteurs libres du plan (ou espace)

- $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ la somme (loi interne)
- $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$ le produit par un scalaire (loi externe)

b) $E = \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^3, \ldots. \boldsymbol{R}^n$

les lois "$+$" et "." sont définies comme suit:

- $X + Y = ((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), ..., (x_n + y_n))$
  $\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $\forall Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de $\boldsymbol{R}^n$
- $\lambda \cdot X = (\lambda \times x_1, \lambda \times x_2, ..., \lambda \times x_n)$ $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$

c) $E = \mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$

- $r = p + q \implies r(x) = p(x) + q(x) \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}$

$\forall p \in \mathcal{P}_n \;, \;\; \forall q \in \mathcal{P}_n$

- $r = \lambda \cdot p \implies r(x) = \lambda \times p(x)$ $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $\forall \lambda \in K$

Sous espace vectoriel (s.e.v)

Définition : Sous espace vectoriel sur $\mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$)

F est un s.e.v de E si $F \subset E$ possède les mêmes propriétés que E

Théorème :

F sous espace vectoriel de $E \iff$

$$\boxed{\{\forall\lambda \in \mathbb{R}(\text{ou}\,\mathbb{C}), \forall x, y \in F : x + y \in F, \lambda.x \in F\}}$$

* Exemples de sous espace vectoriel

a) $E =$ l'ensemble des vecteurs libres de l'espace
$F =$ l'ensemble des vecteurs parallèles à un vecteur $\vec{u}$
$G =$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$
Alors F et G sont des s.e.v. de E

b) $E = \mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$
$F =$ l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2 est un s.e.v. de $\mathcal{P}_n$

Combinaison linéaire

Définition :

$\{$ V est une **combinaison linéaire** de n vecteurs $\{V_1, \cdots, V_n\}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \boldsymbol{R} \text{ tels que} \\ V = \alpha_1 . V_1 + \cdots + \alpha_n . V_n \end{cases}$$

Remarque :

On peut exprimer V en fonction de $V_1, \cdots, V_n$

e.v. engendré par une famille finie de vecteurs

- Soient p vecteurs $V_1, V_2, \cdots, V_p$
  et F l'ensemble des combinaisons linéaires des V_i
- $F = \{X \in E$ tel que $X = \lambda_1.V_1 + \lambda_2.V_2 + \cdots + \lambda_p.V_p,$
  $\forall \lambda_i \in K, \; \forall i = 1, 2, \cdots, p\}$
- F est le s.e.v. engendré par ces p vecteurs
- F est noté $\boxed{Vect(V_1, V_2, \cdots, V_p)}$

Indépendance linéaire

Définitions :

$V_1, \cdots, V_n$ linéairement indépendants

$$\iff \{\alpha_1.V_1 + \cdots + \alpha_n.V_n = 0 \implies \qquad\qquad \}$$

On parle de système libre

$V_1, \cdots, V_n$ linéairement dépendants

$$\iff \{\alpha_1.V_1 + \cdots + \alpha_n.V_n = 0 \implies \qquad\qquad \}$$

On parle de système lié
On cherche alors la relation de dépendance

Indépendance linéaire

Définitions :

$V_1, \cdots, V_n$ linéairement indépendants

$$\Longleftrightarrow \{\alpha_1.V_1 + \cdots + \alpha_n.V_n = 0 \Longrightarrow \forall i\ \alpha_i = 0\}$$

On parle de système libre

$V_1, \cdots, V_n$ linéairement dépendants

$$\Longleftrightarrow \{\alpha_1.V_1 + \cdots + \alpha_n.V_n = 0 \Longrightarrow \qquad\qquad \}$$

On parle de système lié

On cherche alors la relation de dépendance

Indépendance linéaire

Définitions :

$V_1, \cdots, V_n$ linéairement indépendants

$$\iff \{\alpha_1.V_1 + \cdots + \alpha_n.V_n = 0 \implies \forall i \ \alpha_i = 0\}$$

On parle de système libre

$V_1, \cdots, V_n$ linéairement dépendants

$$\iff \{\alpha_1.V_1 + \cdots + \alpha_n.V_n = 0 \implies \exists \alpha_i \neq 0 \ \}$$

On parle de système lié
On cherche alors la relation de dépendance

Exemples d'indépendance linéaire

On se place dans $\boldsymbol{R}^2$

- Montrer que $V_1 = (1, 1)$, $V_2 = (2, 2)$ sont linéairement dépendants.

Exprimer V_1 en fonction de V_2 (relation de dépendance).

- Montrer que $V_1 = (1, 1)$, $V_2 = (1, 2)$ sont linéairement indépendants.

On se place dans $\boldsymbol{R}^3$

- Montrer que $V_1 = (-1, 0, -1)$, $V_2 = (1, -1, 1)$, $V_3 = (1, -3, 1)$ sont linéairement dépendants.

Exprimer V_3 en fonction de V_1 et V_2 (relation de dépendance).

- Montrer que $V_1 = (0, 1, 1)$, $V_2 = (1, 0, 1)$, $V_3 = (1, 1, 0)$ sont linéairement indépendants.

Lien avec les systèmes linéaires* (élimination de Gauss)

- On pose $V_j = (a_{1j}, \cdots, a_{pj}),\ \forall j = 1, \cdots, n$ et $b = (b_1, \cdots, b_n)$ avec V_j et b éléments de $\boldsymbol{R}^p$,
Le système linéaire s'écrit

$$x_1 V_1 + \cdots + x_j V_j + \cdots x_n V_n = b$$

On reconnaît la décomposition du vecteur b sur le système de vecteurs $S = \{V_1, \cdots, V_n\}$

Problématique :

On se se pose le problème de l'existence et de l'unicité de cette décomposition

Remarque :

Dans le cas d'un système de Cramer, S est une base de $\boldsymbol{R}^n$ et la décomposition sur cette base est unique

Lien avec les déterminants (élimination de Gauss)

Théorème :
Le déterminant d'une matrice est nul
si et seulement si
les vecteurs lignes (ou colonnes) de la matrice sont linéairement dépendants

Rang d'un système linéaire

Définition :
Rang S = nombre maximal de vecteurs linéairement indépéndants contenus dans S

Définition :
Le rang d'une matrice A est le rang du système formé des vecteurs colonnes de A

Générateur

Définition :
$S = \{V_1, \cdots, V_n\}$ est un système générateur de E si et seulement si tout élément V de E se décompose sur S :
$\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $V = \alpha_1.V_1 + \cdots + \alpha_n.V_n$

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$
Ces deux vecteurs génèrent $\mathbb{R}^2$ car tout vecteur $V = (\lambda_1, \lambda_2)$ de E s'écrit $V = \lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2$

Bases

Définition :

$S = \{V_1, \cdots, V_n\}$ est une base de E si et seulement si tout élément de E s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire des éléments de S

Théorème :

Tout espace vectoriel E de dimension finie (famille génératrice finie) admet une base

Proposition :

La décomposition d'un vecteur sur une base est unique

Bases (suite)

Notation : Soit $B = (X_1, \cdots, X_n)$ une base de$E$

Tout élément X de E se décompose sur la base B :

$$X = \lambda_1.X_1 + \cdots + \lambda_n.X_n$$

où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)_B$ sont les composantes de X

Définition :

$\{V_1, \cdots, V_n\}$ base de $E \Longleftrightarrow$

$\{\{V_1, \cdots, V_n\}$ libre ET générateur $\}$

Définition :

$\{V_1, \cdots, V_n\}$ base de $E \Longleftrightarrow$

$\{\{\dim(E) = n, \{V_1, \cdots, V_n\}$ libre OU générateur $\}$

Exemple classique

Base canonique

La base canonique de $\boldsymbol{R}^n$ est $B_0 = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$
où $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ avec un "1" à la i$^{\text{ème}}$ place

- On en déduit que la dimension de $\boldsymbol{R}^n$ est

$$dim(R^n) = n$$

Exercice : Bases

Montrer que $V_1(1,1)$, $V_2(-1,1)$ forment une base de R^2

- $dim(R^2) = 2$ et on a 2 vecteurs
- $\alpha V_1 + \beta V_2 = 0 \iff \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \times 1 + \beta \times 1 = 0 \\ \alpha \times -1 + \beta \times 1 = 0 \end{array} \right. \iff \alpha = \beta = 0$$

puis on applique le théorème

Montrer que $V_1 = (1,1,0)$, $V_2 = (-1,1,0)$, $V_3 = (0,0,1)$ forment une base de R^3

- $dim(R^3) = 3$ et on a 3 vecteurs
- $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha \times 1 + \beta \times -1 + \gamma \times 0 = 0 \\ \alpha \times 1 + \beta \times 1 + \gamma \times 0 = 0 \\ \alpha \times 0 + \beta \times 0 + \gamma \times 1 = 0 \end{array} \right. \iff$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ puis on applique le théo.

Application linéaire

Définition :

• Soient E et F 2 e.v. sur K et f une application de E dans F, g est une application linéaire si et seulement si $\forall u \in E$, $\forall v \in E$ et $\forall \lambda \in K$

$$\boxed{\boxed{\begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) \\ f(\lambda.u) = \lambda.f(u) \end{cases}}}$$

• L'ensemble des ces applications est noté $L(E, F)$
• Si $E = F$ on dira que f est un endomorphisme
• Si f est bijective on dira que f est un isomorphisme
• Si $F = \boldsymbol{R}$ on dira que f est une forme linéaire

Caractérisation : Noyau et Image*

Définitions :

a) Noyau: le noyau de f est caractérisé par :

$$\boxed{Ker(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}}$$

- $Ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E

b) Image: l'image de f est caractérisée par :

$$\boxed{Im(f) = \{y \in F \ / \ y = f(x)\}}$$

- $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de F

c) Rang: le rang de l'application est égal à la dimension de l'image,

$$\boxed{rg(f) = dim(Im(f))}$$

Exemple de caractérisation*

Exemple :

$E =$ l'ensemble des vecteurs libres de l'espace et l'application $f = p_{\vec{u}}$ (Proj. orthogonale sur $\vec{u}$),

$Ker(p_{\vec{u}}) = \{$ vecteurs orthogonaux à $\vec{u}\}$

$dim(Ker(p_{\vec{u}})) = 2$

$Im(p_{\vec{u}}) = \{$ vecteurs parallèles à $\vec{u}\}$ $= \mathbb{R}\vec{u}$

$dim(Im(p_{\vec{u}})) = 1 = rg(p_{\vec{u}})$

Théorème de la dimension :

Si E est de dimension finie

$$\boxed{dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))}$$

Application linéaire

$A \in M_{np}(\mathbb{R})$, E et F deux e.v. sur K tels que dim(E)=p, dim(F)=n
On associe à E la base $(e_1, \cdots, e_p)$ et à F la base $(f_1, \cdots, f_n)$

Définition :

$f_A : x \longrightarrow y$ est une application linéaire de E dans F associée à la matrice A quand

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \cdots, p, \text{ avec } \begin{cases} x = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j e_j \\ y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j f_j \end{cases}$$

- L'expression de A dépend du choix des bases
- L'application $A \longrightarrow f_A$ est une bijection de M_{np} sur $L(E, F)$

Représentation matricielle d'une application linéaire

Définition :

Soient $A \in M_{np}$, X et Y les deux matrices colonnes (vecteurs)

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Alors

$$\boxed{y = f_A(x) \iff Y = AX}$$

- On voit apparaître sous cette écriture la définition du

$$\boxed{\text{produit d'une matrice par un vecteur}}$$

Produit de matrices

Définition :

E, F, G e.v. de dim. n, p, q et 3 bases associées
$f_A \in L(F, G)$ et $f_B \in L(E, F)$ associées aux matrices
$A \in M_{qn}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{np}(\mathbb{R})$

$$x \in E \underset{f_B}{\longrightarrow} y \in F \underset{f_A}{\longrightarrow} z \in G$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{p} b_{kj} x_j, \ k = 1, \cdots, n \text{ et } z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k, \ i = 1, \cdots, q$$

On appelle produit de A par B la matrice notée AB associée à l'application linéaire $f_A \circ f_B$

Interprétation des Opérations Matricelles

- $A + B \longleftrightarrow f_A + f_B$
- $\lambda A \longleftrightarrow \lambda f_A$
- $BA \longleftrightarrow f_B(f_A) = f_B \circ f_A \quad (AB \longleftrightarrow f_A(f_B) = f_A \circ f_B)$
- $A^{-1} \longleftrightarrow f_A^{-1}$
- $det(A) = 0 \longleftrightarrow$ les vecteurs lignes (ou colonnes) sont dépendants (voir combinaisons linéaires)

Exemples d'applications linéaires

Soit $E = F =$ l'ensemble des vecteurs libres du plan ou de l'espace

- L' homothétie $\mathcal{H}_\lambda : v \longrightarrow \lambda \cdot v \quad \forall v \in E$
- La projection orthogonale $p_{\vec{u}}$ sur un vecteur $\vec{u}$
- La symétrie orthogonale $s_{\vec{u}}$ par rapport à $\vec{u}$
- La rotation d'angle θ

Toutes ces applications sont linéaires de E dans E

La rotation est une application linéaire (graphiquement)

- On note R la rotation d'angle θ autour de O dans le plan (idem dans l'espace).
- On note V_1 et V_2 deux vecteurs du plan.

Justifier graphiquement que R est une application linéaire

$$R(V_1 + V_2) = R(V_1) + R(V_2) \quad \text{et} \quad R(\lambda V_1) = \lambda R(V_1)$$

Construction de la matrice A via f_A

Théorème :
Les éléments de la $k^{\text{ième}}$ colonne de A sont les composantes de $f_A(e_k)$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = (f_A(e_1), \cdots, f_A(e_p)) \\ \\ \text{avec } f_A(e_k) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ik} f_i, \ \forall k = 1, \cdots, p \end{array}}$$

Remarque :
Selon le choix des bases l'expression de A est différente

Démonstration :
Prendre dans les formules qui définissent f_A tous les $x_j = 0$ sauf $x_k = 1$, ce qui nous donne $x = e_k$ et $y = f_A(e_k)$

Exercice fondamental : Rotation dans $\mathbb{R}^2$

- On note R la rotation d'angle θ autour de O dans le plan ayant pour base $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (idem dans l'espace).
- On note $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.
- On retrouve le théo. sachant que R est une app. linéaire

$$\begin{aligned} R(V) &= R(x\vec{i} + y\vec{j}) = xR(\vec{i}) + yR(\vec{j}) \\ &= x\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{V} \end{aligned}$$

A retenir

Autre lecture du théorème qui donne un procédé de calcul :

Connaissant l'application linéaire
Comment définir la matrice associée dans une base donnée

il suffit :

- de calculer les images des éléments de la base par l'application

- puis de les ranger dans le même ordre **en colonne**

Exercice fondamental : Rotation dans $\mathbb{R}^2$

Exemple fondamental :
Dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé (O, i, j),
déterminer la matrice de la rotation d'angle θ autour de l'origine notée r_θ

Correction :

- C'est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ d'où $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$
- $r_\theta(\vec{i}) = \cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}$
- $r_\theta(\vec{j}) = -\sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}$ d'où

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Exercice fondamental : Rotation

Exemple fondamental :
Dans $\boldsymbol{R}^3$ muni du repère orthonormé (O, i, j, k),
déterminer la matrice de la rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz)
Correction :

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice fondamental : Symétrie dans $\mathbb{R}^2$

Exemple fondamental :

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé (O, i, j),
déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ notée $s_{\vec{u}}$

Correction :

- C'est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ d'où $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$
- $s_{\vec{u}}(\vec{i}) = \vec{j}$
- $s_{\vec{u}}(\vec{j}) = \vec{i}$ d'où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice fondamental : Symétrie dans $\mathbb{R}^3$

Exemple fondamental :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé (O, i, j, k),
déterminer la matrice de la symétrie par rapport au plan $y = z$

Correction :

- C'est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ d'où $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$
- i est invariant par la symétrie
- j devient k
- k devient j d'où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice fondamental : Projection dans $\mathbb{R}^2$

Exemple fondamental :

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé (O, i, j),
déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $\vec{i}$ notée $p_{\vec{i}}$

Exercice fondamental : Projection dans $\mathbb{R}^2$

Exemple fondamental :

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé (O, i, j),
déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $\vec{i}$ notée $p_{\vec{i}}$

Correction :

- C'est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ d'où $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$
- $p_{\vec{i}}(\vec{i}) = \vec{i}$
- $p_{\vec{i}}(\vec{j}) = \vec{0}$ d'où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice fondamental : Projection

Exemple fondamental :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé (O, i, j, k), déterminer la matrice de la projection sur le plan xOy parallèlement au vecteur $V = (1, 1, 1)$

Correction :

- C'est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ d'où $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$
- i et j sont invariants par la projection
- k a pour image le vecteur $(-1, -1, 0)$ d'où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice : Application Linéaire

Dans $\boldsymbol{R}^3$ déterminer la matrice de la transformation composée d'une rotation d'angle α autour de (Oz) par une rotation d'angle β autour de (Ox)

Changement de base

Soient E,F deux sous espace vectoriel (s.e.v.) rapportés aux bases

$$(e_1, \cdots, e_p), (f_1, \cdots, f_n) \text{ et } f \in L(E, F)$$

A : matrice de f par rapport aux 2 bases (e_i) et (f_j).

Question : Déterminer A' matrice de f par rapport à deux autres bases (e'_i) et (f'_j).

On écrit les vecteurs de la nouvelle base en fonction de l' ancienne :

$$\boxed{e'_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} e_i, \quad j = 1, \cdots, p}$$

Changement de base (suite)

Définition:

P matrice de passage de la base (e_i) à la base (e'_j)

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pp} \end{bmatrix}$$

où P a pour vecteurs colonnes les vecteurs lignes de la nouvelle base exprimés à l'aide de leurs composantes dans l'ancienne base

Propriété :

La matrice de passage (inversible) de (e'_i) à (e_i) est l'inverse de la matrice de passage de (e_i) à (e'_i)

Effet d'un changement de base sur un vecteur

Théorème :

(…criture sous forme matricielle) Avec les notations des deux transparents précédents

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{\text{X = P X'}}$$

Démonstration : Soit V un vecteur de E qui s'écrit dans les 2 bases

$$V = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \qquad \text{et} \qquad V = \sum_{j=1}^{p} x'_j e'_j$$

On a alors $V = \sum_{j=1}^{p} x'_j (\sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} x'_j) e_i$

$\Longrightarrow x_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} x'_j, \quad i = 1, \cdots, p$

Repère local et global (cours DDS)

En pratique dans un problème on travaille dans un

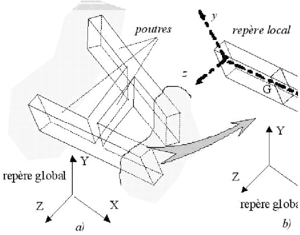
repère local

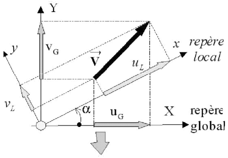
(Ex : moments quadratiques, torseurs de cohèsion, contraintes)

et dans un repère global

(Ex: chargements, déplacements).

$\Longrightarrow$ tout ramener dans un même repère





$$\begin{Bmatrix} u_L \\ v_L \end{Bmatrix}_{Local} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} u_G \\ v_G \end{Bmatrix}_{Global}$$

avec $c = \cos\alpha$ et $s = \sin\alpha$

Exercice : changement de base

Exercice :

Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à la base canonique,
on considère le vecteur $V = (-3, 2)$.
Quelles sont les coordonnées de V par rapport à la base (e'_1, e'_2) pour $e'_1 = (2, 1)$ et $e'_2 = (3, 2)$.

Correction :

$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, son inverse $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Les composantes de V vérifient

$$X' = P^{-1}X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Effet d'un changement de base sur une matrice

Données du problème :

P : matrice de passage de la base (e_i) à la base (e'_i)
Q : matrice de passage de la base (f_i) à la base (f'_i)

Pour $x \in E$: $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i = \sum_{i=1}^{p} x'_i e'_i$

Pour $y \in F$: $y = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{i=1}^{n} y'_i f'_i$

A : matrice de f par rapport aux bases (e_i) et (f_i)
A' : matrice de f par rapport aux bases (e'_i) et (f'_i)

Effet d'un changement de base sur une matrice

Théorème :

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$$

Théorème :

Sous les mêmes hypothèses avec

$E = F$, $(e_i) = (f_j)$ et $(e'_i) = (f'_j)$ alors $\boxed{A' = P^{-1}AP}$

Démonstration :

La relation $y = f(x)$ s'écrit sous forme matricielle pour $X = PX'$ et $Y = QY'$:
$Y = AX$ (anciennes bases) et $Y' = A'X'$ (nouvelles)
En reportant on a $QY' = APX'$ et $Y' = Q^{-1}APX'$ d'où $A' = Q^{-1}AP$.
Ainsi $Y = AX \iff Y' = (Q^{-1}AP)X'$

Définition :

Si A et A' vérifient $A' = Q^{-1}AP$ alors A et A' sont dites **équivalentes**

Exercice : Changement de base

Exercice :

Dans $\boldsymbol{R}^2$ rapporté à la base canonique, on considère la transformation f de matrice

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Déterminer la matrice de f dans la base déduite de la base canonique par rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour de O.

Correction de l'exercice

On a $e'_1 =$,

$e'_2 =$ d'où P et P^{-1}

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Dans la nouvelle base f a pour représentation matricielle

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque : C'est une symétrie par rapport au support de e'_2

Correction de l'exercice

On a $e'_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2,$

$e'_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2$ d'où P et P^{-1}

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Dans la nouvelle base f a pour représentation matricielle

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque : C'est une symétrie par rapport au support de e'_2

Réduction des matrices carrées

Définition :
Un vecteur V est appelé vecteur propre de A s'il existe un scalaire $\lambda \in \boldsymbol{R}$ tel que

$$AV = \lambda V$$

Le scalaire λ est appelé valeur propre de A.

On dira que V est un vecteur propre associé à la valeur propre λ

Valeurs propres

Définition :

Les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

$\det(A - \lambda I)$ est un polynôme de degré n en λ appelé polynôme caractéristique

Propriété :

$$\det(A) =$$

Valeurs propres

Définition :

Les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

$\det(A - \lambda I)$ est un polynôme de degré n en λ appelé polynôme caractéristique

Propriété :

$$\det(A) =$$

Valeurs propres

Définition :

Les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

$\det(A - \lambda I)$ est un polynôme de degré n en λ appelé polynôme caractéristique

Propriété :

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Sous espace propre

- Pour une valeur propre λ_i, on peut lui associer un certain nombre de vecteurs propres.
Ces vecteurs génèrent un espace noté E_{λ_i} espace propre lié à λ_i qui est un sous espace vectoriel de $\boldsymbol{R}^n$

Définition :
A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale

- On dit que l'on diagonalise une matrice A quand on cherche une matrice diagonale qui lui est semblable

Diagonalisation

- p vecteurs propres $V_1, \cdots, V_p$ associés à p valeurs propres 2 à 2 distinctes sont linéairement indépendants
- A est diagonalisable si et seulement si on peut trouver une base formée de vecteurs propres de A
$\Longrightarrow$ La matrice formée par ces vecteurs (colonnes) est une matrice de passage
- Toute matrice carrée $\in M_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable

Propriété :

- Toute matrice symétrique est diagonalisable

Diagonalisation

Théorème (général):

A est diagonalisable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$ et que la dimension du sous espace vectoriel engendré par chaque vecteur propre (sous espace propre) est égal à l'ordre de la valeur propre associée.

Théorème :

A matrice carrée d'ordre n diagonalisable.
On peut donc écrire que $D = P^{-1}AP$ où D est une matrice diagonale d'où

$$\boxed{A^k = PD^kP^{-1} \text{ et } A^{-k} = PD^{-k}P^{-1}}$$

Exemple

- Montrer que A est semblable à T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Application

Réduction d'une forme quadratique

- Exemple 1 :

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

- Exemple 2 :

$$xy + yz + zx = 0$$