Fonctions de plusieurs variables - M212

Michel Fournié

fournie@mip.ups-tlse.fr

TOULOUSE

1.1- Quelques définitions

Une fonction de 2 variables est

une application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

A tout couple de nombres réels $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

on associe un nombre réel $f(x, y) \in \mathbf{R}$.

Notation $f : (x, y) \longrightarrow f(x, y)$

Exemples :

- $f(x, y) = ax + by$ fonction linéaire
- $f(x, y) = ax + by + c$ fonction affine
- $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ fonction quadratique
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \cdots$

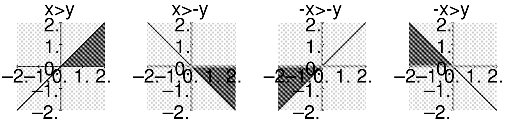
Domaine de définition

Définition

f est définie sur D ($\subset \mathbb{R}^2$) si $f(x,y)$ existe pour tout $(x,y) \in D$, D est appelé domaine de définition de f

Exemples :

- $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ est définie pour x et y tq $|x| > |y|$



Exemples de domaine de définition

- $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ est définie dans tout le plan sauf en 0.
- $f(x,y) = \frac{1}{x+y-1}$ est définie dans tout le plan sauf aux points de la droite $\Delta : x+y-1=0$.
- $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y-1}}$ est définie dans tout le demi-plan situé au dessus de la droite Δ, droite exclus.
- $f(x,y) = \sqrt{x+y-1}$ est définie dans tout le demi-plan situé au dessus de la droite Δ, droite inclus.

1.2- Représentation d'une fct à 2 variables

- (2D) Pour une fct f à 1 variable, on associe l'ensemble des couples $(x, f(x))$ appelé graphe de f.
- (3D) Pour une fct à 2 variables, on associe l'ensemble des triplets $(x, y, f(x, y))$. L'ensemble des pts correspondants de $\mathbb{R}^3$ est la surface représentative S de f

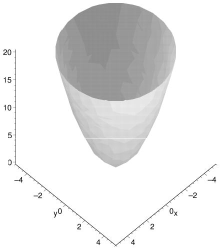
$$\boxed{= \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } z = f(x, y)\}}$$

- f peut être représentée à l'aide des points de $\mathbb{R}^2$ où f prend une valeur donnée K. Cet ensemble correspond à la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'éq. $f(x, y) = K$, appelée ligne de niveau et qui correspond à la projection sur le plan (xOy) de la section de la surface S par le plan de cote K.

Exemples de représentations

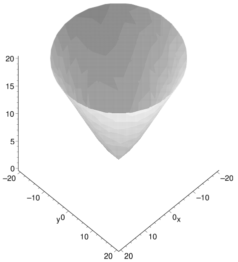
- $f(x, y) = x^2 + y^2$. On fait des sections par des plans :

– coupe par le plan $x = 0 \Longrightarrow z = y^2$ parabole (O min.),
– coupe par le plan $y = 0 \Longrightarrow z = x^2$ parabole (O min.),
– coupe par le plan $x = x_0 \Longrightarrow z = y^2 + Cte$ parabole,
– coupe par le plan $y = y_0 \Longrightarrow z = x^2 + Cte$ parabole.



Exemples de représentations

- $f(x, y) = ax + by$ un plan passant par l'origine,
- $f(x, y) = ax + by + c$ un plan,
- $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ paraboloïde,
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ cône, ...



Définition "non rigoureuse"

- $\lim_{M \longrightarrow M_0} f(M) = L$

Si M "se rapproche" de M_0 (leur "distance diminue") alors $f(M)$ se rapproche de L.
La notion de distance $d(M, M_0)$ est très générale. Pour fixer les idées on peut considèrer la distance Euclidienne $d(M, M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

- f est continue en M_0 si $\lim_{M \longrightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$

Remarque :

$f(x, y) = x$ et $g(x, y) = y$ sont continues en tout point $M_0(x_0, y_0)$.

Pour aller plus loin - Théorie

Continuité, Applications partielles

Théorème
Si f et g sont continues au point M_0 alors $f+g$, af $(a \in \boldsymbol{R})$, fg et $\dfrac{f}{g}$ si $g(M_0) \neq 0$ sont continues

Définition Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point donné.
Les applications $\hat{f}_1 : x \longrightarrow f(x, y_0)$ et $\hat{f}_2 : y \longrightarrow f(x_0, y)$ sont appelées applications partielles au point $M_0 = (x_0, y_0)$

Théorème
Si f est une fct continue en $M_0 = (x_0, y_0)$ alors $\hat{f}_1(x)$ est continue en x_0 et $\hat{f}_2(y)$ est continue en y_0

1.4- Fct de fct - Fonction composée

Définition Soit u une fonction de deux variables x et y $(u(x,y))$, f une fonction de la variable u $(f(u))$.
On définit F la fonction de fonction des deux variables x et y par $F(x,y) = f\left[u(x,y)\right]$.

Théorème Si u est continue au point $M_0(x_0, y_0)$ et f continue au point $u_0 = u(x_0, y_0)$ alors $F(x,y) = f\left[u(x,y)\right]$ est continue au point M_0.

Fonction composée

Définition Soit $f(u, v)$ une fonction de deux variables u et v, soit $u = g(x)$ et $v = h(x)$ deux fonctions de la seule variable x. On définit F fonction composée de x par
$F(x) = f(u, v) = f\left[g(x), h(x)\right]$.

Théorème Si $u(x)$ et $v(x)$ sont continues au point x_0 et si $f(u, v)$ est continues au point $(u_0 = u(x_0), v_0 = v(x_0))$ alors $F(x) = f(u(x), v(x))$ est continue au point x_0.

Quelques remarques

1.5- Changement de variables

Soient $u(x,y)$ et $v(x,y)$ deux fcts de 2 variables x et y, et $f(u,v)$ une fct de 2 variables u et v.
En remplaçant u et v par $u(x,y)$ et $v(x,y)$,
f devient F telle que : $\boxed{F(x,y) = f\left[u(x,y), v(x,y)\right]}$
qui résulte de $f(u,v)$ par le changement de variables défini par : $\boxed{u = u(x,y) \quad \text{et} \quad v = v(x,y)}$

Théorème

Si u et v sont continues au point (x_0, y_0) et si f est continue au point $(u_0 = u(x_0,y_0), v_0 = v(x_0,y_0))$
alors F est continue au point (x_0, y_0)

2- Fonctions de $I\!R^n$ dans $I\!R^p$

- Toutes les notions développées dans la section précédente peuvent s'étendre

- Non développé ici.

3.1- Définition - Théorème

- Soit $f(x,y)$, on peut définir 2 dérivées au point $M_0(x_0,y_0)$, ce sont les dérivées des applications partielles au point M_0 (on fixe une composante $\longrightarrow$ fct d'une variable) :

$$F(x) = \hat{f}_1 = f(x,y_0) \text{ et } G(y) = \hat{f}_2(y) = f(x_0,y)$$

- On appelle dérivée partielle de f par rapport à la variable x au point $M_0(x_0,y_0)$ la dérivée $F'(x_0)$ si elle existe.

$$\boxed{F'(x_0) = f'_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}$$

- De même la dérivée partielle de f par rapport à la variable y au point $M_0(x_0,y_0)$.

$$\boxed{G'_{y_0} = f'_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

Dérivées partielles (suite)

- Si les dérivées partielles existent en d'autres points que M_0, elles définissent à leur tour deux nouvelles fonctions de deux variables appelées les fonctions dérivées partielles :

$$(x, y) \longrightarrow f'_x(x, y) \text{ et } (x, y) \longrightarrow f'_y(x, y)$$

- Ces fonctions peuvent elles aussi admettrent des dérivées partielles par rapport à x et y.

- Nous les appellerons dérivées partielles secondes de $f(x, y)$ et nous les noterons :

$$f''_{x^2}(x, y),\ f''_{xy}(x, y),\ f''_{yx}(x, y), f''_{y^2}(x, y)$$

Dérivées partielles (exemple)

Remarque : De la même façon, on définit des dérivées partielles d'ordre quelconque

Exemples : Soit $f(x,y) = 5x^2 - 3xy + y^2$ alors
$f_x'(x,y) = 10x - 3y$ et $f_y'(x,y) = -3x + 2y$

$$f''_{x^2}(x,y) = 10$$
$$f''_{xy}(x,y) = -3$$
$$f''_{yx}(x,y) = -3$$
$$f''_{y^2}(x,y) = 2$$

Remarque: $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$

Dérivées partielles et continuité

Théorème

Si dans le voisinage de M_0, la fonction f admet des dérivées partielles premières continues et si les dérivées partielles secondes f''_{yx} et f''_{xy} existent et sont continues alors $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Démonstration

Admise

3.2- Dérivée d'une fonction composée

Théorème

On suppose que les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables en x_0 et que la fonction $f(u,v)$ admet des dérivées partielles continues au point M_0 alors

la dérivée de la fonction composée

$F(x) = f\,[u(x), v(x)]$ au point x_0 est égale à

$$\boxed{F'(x_0) = f'_u(u_0, v_0)u'(x_0) + f'_v(u_0, v_0)v'(x_0)}$$

Démonstration

3.3- Plan tangent en un point d'une surface

Application 1 : Dérivée suivant une direction

Définition - Théorème

Soit la surface S d'équation $z = f(x, y)$ et $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ un point de S. Les tangentes en M_0 aux courbes de la surface S passant par M_0 appartiennent au plan tangent à S en M_0. Ce plan est défini par le point M_0 et les deux vecteurs

$$\vec{u} = (1, 0, f'_x(x_0, y_0)) \text{ et } \vec{v} = (0, 1, f'_y(x_0, y_0))$$

Maple: planTgt.mws

Le plan tangent a pour équation cartesienne

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

Autre Démonstration

Plan tangent - Commentaires

On demande de bien comprendre

- la nature de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
  $\vec{u}$ tangent à la coupe $y = y_0$
  $\vec{v}$ tangent à la coupe $x = x_0$
- la notion de vecteur normal au plan :
  $\overrightarrow{N} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
- la construction de l'équation du plan :
  $\overrightarrow{M_0 M}.\overrightarrow{N} = 0$

Dérivées partielles d'une fct composée

Application 2 : Dérivées partielles d'une fct composée

- Soit $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ obtenue par cht. de variables $u(x,y)$ et $v(x,y)$
- Si au point x_0, les fcts $x \longrightarrow u(x,y_0)$, $x \longrightarrow v(x,y_0)$ sont dérivables
- Si au voisinage de $M_0(u_0,v_0)$, $f(u,v)$ a des dérivées partielles continues en M_0, $(u_0 = u(x_0,y_0), v_0 = v(x_0,y_0))$

- D'aprés le théorème (dérivée de fct composée)

$$\boxed{F'_x(x_0,y_0) = f'_u(u_0,v_0)u'_x(x_0,y_0) + f'_v(u_0,v_0)v'_x(x_0,y_0)}$$

- De même sous des conditions analogues

$$\boxed{F'_y(x_0,y_0) = f'_u(u_0,v_0)u'_y(x_0,y_0) + f'_v(u_0,v_0)v'_y(x_0,y_0)}$$

- Soient $M(x,y)$ et $M_0(x_0,y_0)$ avec $x = x_0 + h, y = y_0 + k$
- Soit le segment $[M_0M]$ et un point $P \in [M_0M]$

4.1- Formule des accroisssements finis (fcts de 2 variables)

Théorème

Si $f(u,v)$ possède des dérivées partielles continues dans un carré ouvert contenant M_0M (dans un voisinage de M_0) alors

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \\ & hf'_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + kf'_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \\ & \text{où } 0 < \theta < 1 \end{aligned}}$$

Démonstration

Théorème

Si $f(x, y)$ admet des dérivées partielles continues dans un carré ouvert contenant M_0M alors

$$\boxed{\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) = \\ & \qquad f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h, k), \\ & \qquad \text{où } \varepsilon(h, k) \text{ tend vers } 0 \text{ quand } (h, k) \text{ tend vers } (0, 0) \end{aligned}}$$

Démonstration

Théorème

Si $f(x,y)$ admet des dérivées partielles secondes continues dans un carré ouvert contenant M_0 alors

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) =& \\ & f(x_0,y_0) + hf'_x(x_0,y_0) + kf'_y(x_0,y_0) \\ & +\frac{1}{2}\Big(h^2 f''_{x^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \\ & \quad +2hkf''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \\ & \quad +k^2 f''_{y^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\Big) \text{ où } 0<\theta<1 \end{aligned}}$$

Démonstration

4.4- Développement limité d'ordre 2

Théorème

Si les dérivées partielles secondes de $f(x, y)$ sont continues au voisinage de (x_0, y_0) alors

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x_0+h, y_0+k) = \\ \qquad f(x_0, y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} \\ \qquad +\frac{1}{2}\left(h^2 f''_{x_0^2} + 2hkf''_{x_0 y_0} + k^2 f''_{y_0^2}\right) + \rho^2 \varepsilon(h, k) \\ \text{où } \rho = \sqrt{h^2+k^2} \text{ (distance } M_0 M) \\ \text{et } \lim\limits_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0 \end{array}}$$

Démonstration

Notation de Monge

Le D.L. d'ordre 2 peut s'écrire sous la forme

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + hp + kq + \frac{1}{2}\left(h^2 r + 2hks + k^2 t\right) + \rho^2 \varepsilon(h, k)$$

où $p = f'_{x_0}$, $q = f'_{y_0}$, $r = f''_{x_0^2}$, $s = f''_{x_0 y_0}$, $t = f''_{y_0^2}$

Définition :

La matrice $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ est appelèe le Hessien de f

(a) Calcul de $\boldsymbol{f(x,y)}$ connaissant $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ par des valeurs approchées $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$

- La formule A.F. $\Longrightarrow$ majoration de l'erreur quand on remplace $f(x,y)$ par $f(a,b)$. Si on note $h = x - a$ et $k = y - b$ alors $f(x,y) - f(a,b) =$ $hf'_x(a+\theta h, b+\theta k) + kf'_y(a+\theta h, b+\theta k), \quad 0 < \theta < 1$
- En connaissant des bornes d'erreur de h et k : $|h| < \alpha$ et $|k| < \beta$ ($\Longleftrightarrow |x-a| < \alpha, \quad |y-b| < \beta$) et en supposant que sur ce domaine les dérivées partielles sont bornées $|f'_x| < M$ et $|f'_y| < N$
- Nous obtenons $|f(x,y) - f(a,b)| \leq |h||f'_x| + |k||f'_y| < \alpha M + \beta N.$

Exemple

Calculer $f(x,y) = \dfrac{2xy^2 - 1}{y}$ connaissant les valeurs approchées de x et y à 10^{-2} près,

par exemple $a = 2.31$ et $b = 1.52$ ($|x - 2.31| < 10^{-2}$ et $|y - 1.52| < 10^{-2}$)

On a $f(a,b) = 2ab - \frac{1}{b} = 2 \times 2.31 \times 1.53 - \frac{1}{1.52} \approx 6.36$

Or $|f'_x| = |2y|$, $|f'_y| = \left|2x + \frac{1}{y^2}\right|$

Par hypothèse : $1.51 < y < 1.53$ d'où $|f'_x| < 4$.

De même on a $|f'_y| < 6 \Longrightarrow$

$|f(x,y) - f(a,b)| < 10 \times 10^{-2} = \frac{1}{10} \Longrightarrow \boxed{6.34 < f(x,y) < 6.38}$

Autre applications

(b)- Calcul de $f(x_0 + h, y_0 + k)$ connaissant x_0, y_0, h, k en prenant pour valeur approchée $f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

D'après la formule de Taylor, l'erreur commise est bornée par :

$$\frac{1}{2}\Big|h^2 f''_{x^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+2hkf''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+ k^2 f''_{y^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\Big|$$

Ainsi lorsque A, B, C désignent des bornes des dérivées secondes dans le rectangle $|x - x_0| < h$, $|y - y_0| < k$, l'erreur est bornée par

$$\frac{1}{2}\left(Ah^2 + 2B|h||k| + Ck^2\right)$$

Exemple

Calculer $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ pour $x = 0.01$ radian et $y = 0.02$ radian avec $x_0 = y_0 = 0$, $h = 0.01$, $k = 0.02$

$f'_x = \cos(x)\cos(y)$, $f'_y = -\sin(x)\sin(y)$

$f''_{x^2} = -\sin(x)\cos(y)$, $f''_{xy} = -\cos(x)\sin(y)$,

$f''_{y^2} = -\sin(x)\cos(y)$, d'où

$f(x_0, y_0) = 0$ et $hf'_{x_0} + kf'_{y_0} = 0.01$.

La valeur approchée de $f(x,y)$ est alors 0.001. Or les dérivées 2nd sont bornées par 1 $\Longrightarrow$ l'erreur est bornée par $\frac{1}{2}(h^2 + 2|h||k| + k^2)$.

On a donc $\varepsilon = \frac{1}{2}(h+k)^2 = \frac{9}{2}.10^{-4} \Longrightarrow$

$f(x,y) = 0.01$ à 10^{-3} près

Autre application

5.1- Définitions

- $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ admet en (x_0, y_0) un extremum (maximum ou minimum) local **si et seulement si**

il existe un voisinage V de ce point $((x_0 + h, y_0 + k) \in V)$ où

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \leq f(x_0, y_0) \quad \text{Maximum}$$
$$f(x_0 + h, y_0 + k) \geq f(x_0, y_0) \quad \text{Minimum}$$

Rq: $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$ garde un signe Cte $\forall h$ et $\forall k$

- On parle d'extremum strict si de plus

$f(x_0 + h, y_0 + k) \neq f(x_0, y_0)$ pour tous $(h, k) \neq (0, 0)$

- On parle d'extremum global quand il n'est plus question de voisinage

5.2- Conditions Nécessaires d'extremum

Théorème : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 (f continue et ses dérivées partielles premières continues).
Pour que f admette un extremum local en (x_0, y_0)
il est nécessaire mais non suffisant que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Démo: Etudier les applications partielles en (x_0, y_0)

Définition : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que (x_0, y_0) est un point critique ou point stationnaire de f lorsque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

5.3- Conditions Suffisantes d'extremum

Théorème :
Soient $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ de classe C^2 et (x_0, y_0) un point critique de f.
En utilisant la notation de Monge :

- Si $s^2 - rt < 0,\ r > 0$ alors f présente un minimum en (x_0, y_0)
- Si $s^2 - rt < 0,\ r < 0$ alors f présente un maximum en (x_0, y_0)
- Si $s^2 - rt > 0$ alors (x_0, y_0) est un point col (ni min. ni max.) pour f

Démonstration: Application de la formule de Taylor

Exemple

Préciser quand ils existent, la nature des extrémums de $f(x,y) = x + xy + y - 3x - 6y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - 6$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$

Condition Nécessaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \end{array} \right.$$

d'où si f admet un extremum c'est le point $(0,3)$

Condition Suffisante :

$r = 2, s = 1, t = 2$ d'où $s^2 - rt = -3 < 0$ et $r = 2 > 0$

$\Longrightarrow (0,3)$ est un minimum local.

6- Différentielles

6.1- Introduction et définition

- Si f'_x et f'_y sont continues $f(x_0, y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0}$ est une valeur approchée $f(x_0 + h, y_0 + k)$,
- Avec la formule de Taylor, on a une borne d'erreur
- Ainsi une valeur approchée de l'accroissement Δf est donnée par :

$$\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx hf'_{x_0} + kf'_{y_0} = \mathrm{d}f(x_0, y_0).$$

Différentielles (suite)

Définition La fonction : $(h,k) \longrightarrow hf'_{x_0} + kf'_{y_0}$ définit une application linéaire notée df de $\boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ appelée différentielle de la fonction f au point (x_0, y_0).

Notation : Par abus de langage, nous confondrons souvent la différentielle et sa valeur que nous noterons encore df.

Si f est la fonction définie par $f(x,y) = x$:
on a $f'_x = 1$ et $f'_y = 0$ d'où $\mathrm{d}f = \mathrm{d}x = h$.
Si f est la fonction définie par $f(x,y) = y$:
on a $f'_x = 0$ et $f'_y = 1$ d'où $\mathrm{d}f = \mathrm{d}y = k$.
Pour une fct f quelconque, nous écrirons donc :

$$\boxed{\mathrm{d}f = f'_{x_0}\mathrm{d}x + f'_{y_0}\mathrm{d}y}$$

Différentielles (suite)

6.2- Propriétés

Proposition

L'application $f \longrightarrow df$ est linéaire :

si $f = f_1 + f_2$, $df = df_1 + df_2$

si $g = \lambda f$ ($\lambda \in R$), $dg = \lambda df$.

Démonstration : A faire en exercice.

Proposition

Si $f = uv$ alors $df = udv + vdu$.

Si $f = \frac{u}{v}$ alors $df = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Démonstration Utiliser le théo sur les dérivées (partielles) d'un produit et d'un quotient de fcts.

Différentielle et tangente au graphe de la fonction.

– Soit $S = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x, y)\}$ la surface représentative de $f(x, y)$.

– Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ qui se projette en $m_0 = (x_0, y_0)$ sur le plan xOy.

– Soit $M = (x = x_0 + h, y = y_0 + k, z = z_0 + \Delta f)$ qui se projette en $m = (x_0 + h, y_0 + k)$ sur le plan xOy.

– Soit $P=(x_0+h, y_0+k, Z=z_0+hf'_{x_0}+kf'_{y_0})$ pt se déplaçant sur le plan tangent à S en M_0 lorsque h et k varient.

Différentielles (suite)

- Le plan tangent à pour éq. paramétrique (fct de h, k):

$$X = x_0 + h,\ Y = y_0 + k,\ Z = z_0 + hf'_{x_0} + kf'_{y_0}$$

et pour équation cartésienne :

$$Z - z_0 = (X - x_0)f'_{x_0} + (Y - y_0)f'_{y_0}.$$

- Soit H le point qui se projette sur xOy en m et qui a pour cote z_0. Nous avons donc une interprétation graphique grâce à

$$\bar{HP} = z_0 + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} - z_0 = hf'_{x_0} + kf'_{y_0} = \mathrm{d}f.$$

Différentielles (suite)

L'accroissement de la fonction a pour valeur :

$$\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = H\bar{M}$$

ce qui permet d'écrire avec un DL d'ordre 1 :

$$\Delta f = \mathrm{d}f + \rho\varepsilon(h, k)$$

où $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ et $\varepsilon(h, k)$ est une fonction qui tend vers 0 qund h et k tendent vers 0.

6.4- Formes différentielles

Soit la fonction $f(x,y)$ et le point (x_0,y_0).

- La différentielle de f en ce point s'écrit :
  $df_{(x_0,y_0)}(dx,dy) = f'_{x_0}dx + f'_{y_0}dy$.
- Si le point (x_0,y_0) est un point variable $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$, cette fonction linéaire varie et s'écrit :

$$df = A(x,y)dx + B(x,y)dy.$$

On a $A(x,y) = f'_x(x,y)$ et $B(x,y) = f'_y(x,y)$ et lorsque f possède des dérivées partielles continues $\Longrightarrow$
$f''_{xy} = f''_{yx} \Longrightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$.
Si $A(x,y)$ et $B(x,y)$ sont des fcts quelconques on aboutit à la notion de forme différentielle (2nd année)

Formes différentielles (2nd année)

Définition On appelle forme différentielle w une fct linéaire de dx et dy à coefficients variables $A(x, y)$ et $B(x, y)$.

Notation $w = A(x, y)\mathrm{d}x + B(x, y)\mathrm{d}y$

Proposition Soient deux formes différentielles $w_1 = A_1\mathrm{d}x + B_1\mathrm{d}y$ et $w_2 = A_2\mathrm{d}x + B_2\mathrm{d}y$.

- w_1 et w_2 sont égales lorsque $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$
- La somme de w_1 et w_2 est $(A_1 + A_2)\mathrm{d}x + (B_1 + B_2)\mathrm{d}y$
- Le produit de w_1 par une fonction $g(x, y, z)$ est

$gw = (gA)\mathrm{d}x + (gB)\mathrm{d}y$

Définition Une forme différentielle égale à la différentielle d'une fct est appelée forme différentielle totale.

Définition (théorique)

- Soit f définie dans un voisinage de M_0 (qui peut être vu comme un carré ouvert de centre M_0).

On dit que $f(x,y) = f(M)$ tend vers L quand $M = (x,y)$ tend vers $M_0 = (x_0, y_0)$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tq
$$\underbrace{0 < |x - x_0| < \alpha,\ 0 < |y - y_0| < \alpha} \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Notation : $\lim\limits_{M \longrightarrow M_0} f(M) = L.$

- Si L existe alors $L = f(M_0)$. On dit que la fonction f est continue en M_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\underbrace{0 < |x - x_0| < \alpha,\ 0 < |y - y_0| < \alpha} \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Retour au cours

Exemples de limites

(a)- $f(x, y) = 1 - x - 2y$ et $M_0 = (0, 0)$.
On a $|f(M) - f(M_0)| = |1 - x - 2y - 1| \leq |x| + 2|y|$.
Or $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = d(M, M_0)$ et $|y| \leq d(M, M_0)$
d'où $|f(M) - f(M_0)| \leq 3d(M, M_0) \longrightarrow 0$ quand $M \longrightarrow M_0$.
(b)- $f(x, y) = 3x - y + 1$ tend vers 2 quand $M(x, y)$ tend vers $M_0(1, 2)$.
(c)- $f(x, y) = (x + y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ tend vers 0 quand $M(x, y)$ tend vers 0 avec $M \neq 0$ (la fonction f n'étant pas définie en ce point).

Retour au cours

Remarques sur les limites

1 - Dans la déf. de la limite les conditions indiquées par les accolades peuvent être remplacées par
$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta$ tel que $M_0M < \beta \Longrightarrow |f(x,y) - L| \leq \varepsilon$.
En effet la 1ère condition entraîne la 2nd en considèrant $\beta = \alpha$ car le carré de coté 2α est inclus dans le cercle de rayon α.
Réciproquement, il suffit de prendre $\alpha = \frac{\beta}{2}$.
2 - Cette nouvelle déf. utilise la longueur M_0M qui correspond à la norme euclidienne ($d(M_0, M)$) entre les pts M_0 et M. Il existe bien d'autres "normes",$\cdots$ (toutes les normes sont "équivalentes" en dim finie) $\cdots$

3 - Pour montrer la continuité de f au point M_0, on vérifira (simplement) que $\lim\limits_{d(M,M_0)\longrightarrow 0} |f(M) - f(M_0)| = 0$. Retour au cours

Complèment - Normes

Soit E un espace vectoriel sur $\boldsymbol{R}$ (...). On appèle norme sur $\boldsymbol{R}$, toute application notée $\|.\|$ de E dans $\boldsymbol{R}^+$ ($X \longrightarrow \|X\|$) telle que $\forall X,\ Y \in E$ on ait :

$$\begin{array}{l}
(1)\ \|X\| = 0 \Longrightarrow X = 0_E, \\
(2)\ \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|, \quad \forall \lambda \in \boldsymbol{R}, \\
(3)\ \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y|, \quad \text{(inégalité triangulaire).}
\end{array}$$

Exemples :

(a)- $(x, y) \longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$
(b)- $(x, y) \longrightarrow \max\{|x|, |y|\}$
(c)- $(x, y) \longrightarrow |x| + |y|$

Retour au cours

Remarque fcts composées

- Ce théo permet de retrouver le théo portant sur la continuité des applications partielles en un point que l'on rappelle :

Si f est continue au point (x_0, y_0) les fcts $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ et $f_{x_0}(x) = f(x_0, y)$ sont continues aux points x_0 et y_0.

- Attention, la réciproque est fausse.

Considèrons $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ définie en dehors de 0 et $f(0, 0) = 0$. Les restrictions de f à (Ox) et (Oy) sont identiquement nulles et donc continues en 0. La restriction de f à la droite $y = 2x$ vaut $\frac{2}{5}$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$, elle n'est donc pas continue en 0 ce qui entraine d'aprés le théorème que f n'est pas continue en 0.

Retour au cours

Démo dérivée partielle de fct composée

Posons $u(x_0) = u_0$, $v(x_0) = v_0$, $u(x_0 + h) = u_0 + \Delta u$, et $v(x_0 + h) = v_0 + \Delta v$. L'accroissement de $F(x)$ s'écrit alors $F(x_0 + h) - F(x_0) = f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0)$.
$\iff F(x_0 + h) - F(x_0) = f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0 + \Delta v) + f(u_0, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0)$
Appliquons la formule des A.F. à la fct : $\psi_1(u) = f(u, v_0 + \Delta v)$, en supposant l'existence de la dérivée partielle f'_u de $f(u, v)$ dans le voisinage de M_0 :
$f(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-f(u_0, v_0+\Delta v)=\Delta u f'_u(u_0+\theta_1\Delta u, v_0+\Delta v)$, $0 <\theta_1 <1$
De même en supposant l'existence de la dérivée partielle f'_v dans le voisinage de M_0 avec $\psi_2(v) = f(u_0, v)$:
$f(u_0, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0) = \Delta v f'_v(u_0, v_0 + \theta_2\Delta v)$, $0 < \theta_2 < 1$ d'où :
$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{\Delta u}{h} f'_u(u_0 + \theta_1\Delta u, v_0 + \Delta v) + \frac{\Delta v}{h} f'_v(u_0, v_0 + \theta_2\Delta v)$
En faisant tendre h vers 0. Si $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables au point x_0, les rapports $\dfrac{\Delta u}{h}$ et $\frac{\Delta v}{h}$ tendent vers $u'(x_0)$ et $v'(x_0)$. $u(x)$ et $v(x)$ sont alors continues et Δu, Δv, $\theta_1\Delta u$, $\theta_2\Delta v$ tendent vers 0. Si l'on suppose les dérivées partielles f'_u et f'_v continues au point M_0 alors $\dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0 et cette limite est égale à $f'_u(u_0, v_0)u'(x_0) + f'_v(u_0, v_0)v'(x_0)$

Retour au cours

Démo plan tangent

Nous définissons une courbe (C), tracée sur S par une projection horizontale, ce qui revient à définir la représentation paramétrée suivante :
$x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t))$
Ainsi, sur cette courbe, z est fonction composée de t par $x(t)$ et $y(t)$.
Si de plus nous imposons à (C) de passer par le point M_0, il existe un nombre t_0 tel que
$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0$ Supposons que f admette au voisinage de (x_0, y_0) des dérivées partielles, continues en (x_0, y_0), et considèrons les courbes (C) passant apr M_0 dont la projection horizontale admet une tangente en (x_0, y_0). Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont alors dérivables en M_0 et d'après le théorème portant la dérivée de fonction composée, il en est de même de la fonction $z(t) = f(x(t), y(t))$. (C) admet donc une tangente en M_0. Nous avons donc $z'(t) = f'_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(t_0)$ Le vecteur tangent

$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ appartient par consèquent au plan passant apr M_0 et défini par les deux vecteurs :
$(1, 0, f'_x(x_0, y_0)),\ (0, 1, f'_y(x_0, y_0))$ Ce plan est indépendant du choix de la courbe (C) : c'est le plan tangent à la surface au point M_0.

Retour au cours

Démo du théo. A.F.

Les coordonnées d'un point $P \in M_0M$ sont : $u = x_0 + ht,\ v = y_0 + kt,\ (0 \leq t \leq 1)$, et la fonction $f(P) = f(x_0 + ht, y_0 + kt) = F(t)$ est une fonction de la variable t composée au moyen de $f(u, v)$ et des fonctions $u = x_0 + ht,\ v = y_0 + kt$. Ces fonctions $u(t)$ et $v(t)$ ont des dérivées respectivement égales à h et k.
Si la fonction $f(u, v)$ possède des dérivées partielles continues dans un carré ouvert contenant M_0M, nous pouvons appliquer le théorème sur la dérivée de fonction composée et écrire :

$$F'(t) = hf'_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + kf'_y(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

<u>La formule des accroissements finis</u> pour la fonction F donne alors :

$$F(1) - F(0) = (1 - 0)F'(\theta) \ \text{ avec } \ 0 < \theta < 1 \ \text{ d'où}$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),\ 0 < \theta < 1.$$

Retour au cours

Démo D.L. ordre 1

Si les dérivées f'_x et f'_y sont continues dans un carré et en particulier en M_0, nous pouvons écrire que : $f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = f'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1(h,k)$, $f'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = f'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2(h,k)$, où $\varepsilon_1(h,k)$ et $\varepsilon_2(h,k)$ sont des fonctions qui tendent vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$. La formule des accroissmentrs finis devient alors : $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k)$.

Introduisons la distance $M_0M = \rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, nous avons alors $h = \rho\cos(\alpha)$ et $k = \rho\sin(\alpha)$ et $h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k) = \rho\,(\varepsilon_1\cos(\alpha) + \varepsilon_2\sin(\alpha)) = \rho\varepsilon(h,k)$, où la fonction $\varepsilon(h,k)$ tend vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$ ce qui permet de conclure.

Retour au cours

Sous les hypothèses du théorème, nous pouvons appliquer à F la formule de Taylor jusqu'à l'ordre 2 sachant que $F'(t) = hf'_x(x_0+ht, y_0+kt) + kf'_y(x_0+ht, y_0+kt)$, et $F''(t) = h^2 f''_{x^2}(x_0+ht, y_0+kt) + 2hkf''_{xy}(x_0+ht, y_0+kt) + k^2 f''_{y^2}(x_0+ht, y_0+kt)$ d'où $F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta),\ 0 < \theta < 1$ ce qui permet de conclure.

Retour au cours

Démo D.L. ordre 2

Sous les hypothèses du théorème nous pouvons écrire $f''_{x^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = f''_{x^2}(x_0, y_0) + \varepsilon_1(h,k)$, $f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0, \theta k) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \varepsilon_2(h,k)$, $f''_{y^2}(x_0+\theta h, y_0, \theta k) = f''_{y^2}(x_0, y_0) + \varepsilon_3(h,k)$, où les fonctions $\varepsilon_1(h,k)$, $i = 1, 2, 3$ tendent vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$. La formule de Taylor s'écrit alors
$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + \frac{1}{2}\left(h^2 f''_{x_0^2} + 2hkf''_{x_0y_0} + k^2 f''_{y_0^2}\right) + \frac{1}{2}\left(h^2\varepsilon_1 + 2hk\varepsilon_2 + k^2\varepsilon_3\right).$$
Le dernier terme peut ensuite s'écrire (comme pour démontrer le théorème portant sur le DL d'ordre 1) sous la forme :

$\frac{\rho^2}{2}\left(\varepsilon_1\cos^2(\alpha) + 2\varepsilon_2\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \varepsilon_3\sin^2(\alpha)\right)$ ou encore $\left(h^2+k^2\right)\varepsilon(h,k)$ ce qui permet de conclure.

Retour au cours

Autre application (section 4.5)

Application aux polynômes du second degré

Considérons un polynôme du second degré en x et y

$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$

D'après la formule de Taylor (ses dérivées secondes sont constantes), nous obtenons

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + \frac{f''_{x^2}}{2} h^2 + 2\left(\frac{f''_{xy}}{2}\right) hk + \frac{f''_{y^2}}{2} k^2$$

$= f(x_0, y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$

En posant $\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, nous pouvons alors écrire :

$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + \varphi(h, k)$.

En particulier, si $f(x, y) = \varphi(x, y)$, nous avons

$\varphi(x_0 + h, y_0 + k) = \varphi(x_0, y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + \varphi(h, k)$

En échangeant les couples (x_0, y_0) et (h, k) dans cette dernière formule, le membre de gauche reste invariant ce qui permet d'égaler le membre de droite avant et aprés le changement ce qui donne :

$h\varphi'_{x_0} + k\varphi'_{y_0} = x_0\varphi'_h + y_0\varphi'_k$.

La première expression s'appelle la forme polaire de la forme quadratique $\varphi(x, y)$ par rapport au couples de variables (x_0, y_0) et (h, k). L'identité exprime quand à elle la symétrie de la forme polaire par rapport aux deux couples.

Retour au cours