MATHEMATIQUES - Module M111

Michel Fournié

michel.fournie@iut-tlse3.fr ou michel.fournie@math.univ-toulouse.fr

Table des matières

Les cours de maths en amphi

Qui :	Michel Fournié
Quand :	Mercredi 14h30-15h30 (13 fois)
Où :	Amphi 033 $\approx$ 3 groupes (90 étudiants)
Comment :	? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?

Pendant du cours

Régles évidentes :

- Assiduité (cours obligatoires)
- Arriver à l'heure, s'installer rapidement
- Prendre tout le cours sur le chapitre
- Respecter les autres :
    - Propreté de l'amphi
    - Bruit


TOULOUSE
iut Midi-Pyrénées
Génie Mécanique et Productique
Techniques Aerospatiales

COMPORTEMENT ET DISCIPLINE DANS LES AMPHIS

21/09/11

CODE DE CIVILITE ET DE BONNE CONDUITE

➔ l'horaire du début du cours est indiqué dans l'emploi du temps, **ce n'est pas** l'heure d'entrée en amphi

➔ dans vos sacs, cartables ou sacoches

- **ETEINDRE** et y **RANGER** mobiles, smartphones, notebooks, portables, baladeurs etc
- y **GARDER** nourriture, boissons, journaux gratuits, revues, tracts, prospectus, etc

➔ sur les tables et les sièges, au sol:

- **NE PAS ACCROITRE** les détériorations, les graffitis, etc.. existants
- **RAMASSER** les papiers

● **sanctions pour les perturbateurs** :

exclusion immédiate de l'amphi **+ note 0** au contrôle continu TD de la discipline

tolérance "0"

signé : les enseignants assurant des cours dans les amphithéâtres

Il faut être actif :

- se poser des questions

  d'où sort ce résultat?

  où ai-je déjà vu ça ?

  a quoi ça sert ?· · ·
- chercher un exemple (contre exemple)
- ne pas hésiter à "interrompre" le professeur
- ne pas sortir avec des questions sans réponses

Aprés le cours

Il faut s'approprier le cours :

- relire le cours le plus souvent possible
  (idéal: le jour même, le lendemain, $\cdots$)
- arriver en ayant en tête les cours (TD) passés
- travailler le cours en se posant des questions
- faire le lien entre le cours et les exos vus en TD
- formuler et noter des questions
- présenter ses problèmes aux autres, au professeur
- faire un résumé ? lire des livres ? $\cdots$

Programme du module M111

Fonctions numériques d'une variable réelle

- Fonctions trigonométriques et leurs réciproques
- Fonctions hyperboliques et leurs réciproques
- Formules de Taylor, Développements Limités

Réf. bibliographique: Thuillier-Belloc, mathématiques IUT, Tome 2

Préliminaires,Prérequis

Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle si f est une application (relation) qui à tout élément de $\mathbb{R}$ fait correspondre un élément unique de $\mathbb{R}$.
On note $y = f(x)$ ou bien $f : x \longrightarrow f(x)$.

Notions pré-requises :

- domaine de définition
- composition de deux fonctions $g \circ f(x) = g(f(x))$
- variation d'une fonction (tableau)
- calcul de limite
- continuité (“on ne lève pas le stylo”)

Pré-requis - Formules de dérivation

Fonctions élémentaires

- $(u+v)'=u'+v'$, $(u-v)'=u'-v'$, $(\lambda u)'=\lambda u'$
- $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
- $(\sin(x))'=\cos(x)$, $(\cos(x))'=-\sin(x)$
- $(x^n)'=nx^{n-1}$, $(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$, $(\exp(x))'=\exp(x)$

Fonctions composées

- $(\sin(u))'=u'\cos(u)$, $(\cos(u))'=-u'\sin(u)$
- $(u^n)'=nu'u^{n-1}$, $(\sqrt{u})'=(u^{\frac{1}{2}})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$, $(\exp(u))'=u'\exp(u)$
- $(f\circ g(x))'=(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$

Dérivée

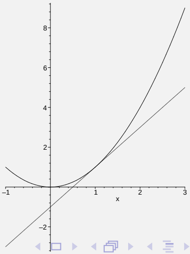
Définition :

On dit que f définie sur I est dérivable en x_0 un point de I si la fonction $\varphi : x \longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0. Cette limite est la dérivée de f en x_0 notée

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

- Approche géométrique :

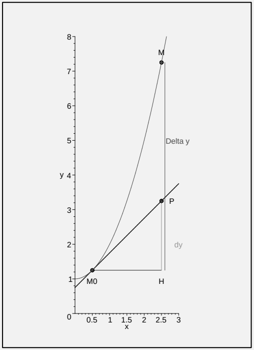
  Session Maple : derivable.mws
- Autres Définitions (pour aller plus loin)



Dérivée - Tangente

Equation de la tangente

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$



$$f'(x_0) = \frac{\overline{HP}}{\overline{M_0 H}}$$

Table des matières

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :

f strictement monotone sur I alors f est bijective de I sur $J = f(I)$.

Remarque : *En particulier, si f est continue, l'image par f d'un segment $[a, b]$ est un segment $[m, M]$.*

Théorème :

Théorème des Valeurs intermédiaires

Toute fonction continue sur $I = [a, b]$ est bornée ($f([a, b]) = [m, M]$).
De plus elle atteint ses bornes (m et M) et toute valeur comprise entre ces deux bornes.

$$\boxed{\forall y_0 \in [m, M], \exists \text{ au moins un } x_0 \in [a, b] \text{ tel que } y_0 = f(x_0)}$$

Fonction inverse d'une fonction continue strictement croissante

Théorème (fondamental):

Si f continue strictement croissante sur $I = [a, b]$
Alors $f(x) = y_0$ ($f(a) \leq y_0 \leq f(b)$) admet une solution unique x_0.
Démonstration

Définition :

La correspondance $y_0 \longrightarrow x_0$ définie par le théorème est une application de $[f(a), f(b)]$ sur $[a, b]$ que nous appelons la fonction inverse ou fonction réciproque de f.

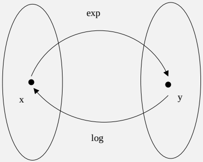
Notation : $x = \varphi(y)$ ou encore $\varphi = f^{-1}$

$$\boxed{(x = f^{-1}(y), f(a) \leq y \leq f(b)) \Longleftrightarrow (y = f(x), a \leq x \leq b)}$$

Fonctions inverses (suite)

Exemple :

$$\begin{cases} y = \exp(x), \\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln(y), \\ y \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$



$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id \text{ (Identité)}.$$

Attention au domaine de définition.

2.1- Fonctions inverses (suite)

Théorème :

Si f continue et strictement monotone sur I
Alors f admet une fonction réciproque continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$.

Démonstration

Théorème :

f dérivable et strictement monotone sur I. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction inverse $x = f^{-1}(y)$ admet une dérivée au point $y_0 = f(x_0)$

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

Démonstration

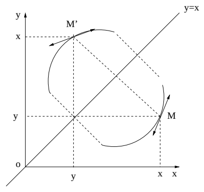
Graphes de deux fonctions inverses

On considère

- Un repère orthonormé (Ox, Oy),
- $M(x, y)$ un point du graphe de la fonction $y = f(x)$,
- $M'(y, x = f^{-1}(y))$.

Théorème :

M et M' sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
Les graphes de deux fonctions inverses sont symétriques par rapport à $y = x$.



Fonction $y = \text{Arc}\sin(x)$

$y = \sin(x)$ est définie, continue et strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ sur $I = [-1, +1]$.
Théo $\Longrightarrow$ On peut définir sur I, une fonction inverse continue strictement croissante, notée Arc sin (x)

Tableau de variation (voir celui de $y = \sin(x)$)

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$

x	-1		0		1
$\text{Arc}\sin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$

Arc sin(x) (suite)

Définition (fondamental) :

$$\begin{cases} y = \text{Arc}\sin(x), \\ -1 \leq x \leq 1, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin(y), \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Attention la fct n'est définie que si $-1 \leq x \leq +1$

Théorème :

Arc $\sin(x)$ est impaire, continue, croissante sur $[-1, +1]$

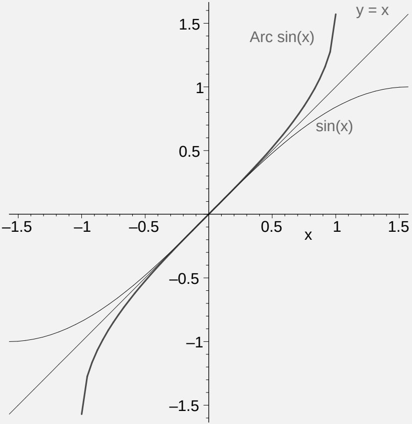
Démonstration

Théorème :

$$\text{Arc}\sin'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in]-1, +1[$$

Démonstration

Représentation graphique de Arc sin(x)



Rq : $\text{Arc}\sin'(0) = 1$

Fonction $y = \text{Arc}\cos(x)$

Définition :

$$\begin{cases} y = \text{Arc}\cos(x), \\ -1 \leq x \leq 1, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos(y), \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

Tableaux de variations :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1 $\searrow$	0 $\searrow$	-1

x	-1	0	1
$\text{Arc}\cos(x)$	π $\searrow$	$\frac{\pi}{2}$ $\searrow$	0

Arc cos(x) (suite)

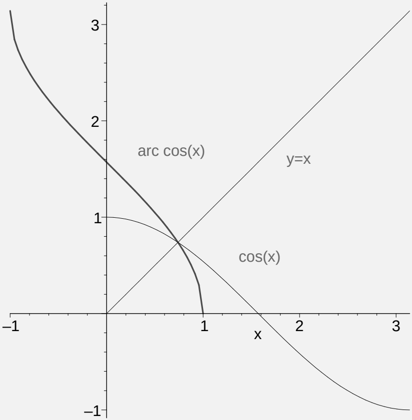
Propriété :

$$\text{Arc}\sin(x) + \text{Arc}\cos(x) = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Dérivée :

$$\text{Arc}\cos'(x) = -\frac{1}{\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in]-1, 1[$$

Représentation graphique Arc cos(x)



Fonction $y = \text{Arc}\tan(x)$

Définition :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y = \text{Arc}\tan(x), \\ x \in \mathbb{R}, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \tan(y), \\ -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}. \end{array}\right.}$$

Tableaux de variations :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\frac{\pi}{2} & & 0 & & +\frac{\pi}{2} \\
\hline
 & & & & & +\infty \\
 & & & & \nearrow & \\
\tan(x) & & & 0 & & \\
 & & \nearrow & & & \\
 & -\infty & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
 & & & & & +\frac{\pi}{2} \\
 & & & & \nearrow & \\
\text{Arc}\tan(x) & & & 0 & & \\
 & & \nearrow & & & \\
 & -\frac{\pi}{2} & & & &
\end{array}$$

Arc tan(x) (suite)

Propriété :
$y = \text{Arc}\tan(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$

Dérivée : $\text{Arc}\tan'(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(y)} = \dfrac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$

Représentation graphique Arc tan(x)

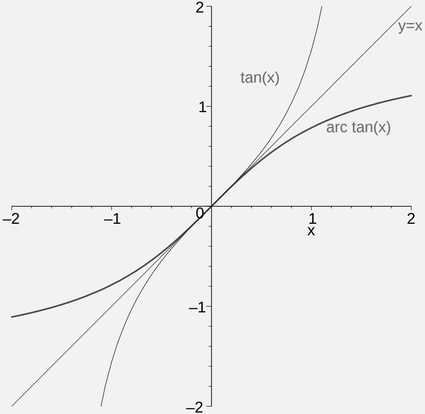


Table des matières

Fonctions hyperboliques

Définition :

cosinus et sinus hyperbolique (ch) et (sh)

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

Propriété : Les domaines de définition de ch est sh sont égaux à $\mathbb{R}$

Propriété fondamentale: $\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1}$

Attention : au signe et à l'ordre (“ch” en premier)

Démonstration : $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$, puis on multiplie ces deux équations

Fonctions hyperboliques (suite)

Propriétés (exercices):

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(a+b) &= \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b) \\ \mathrm{ch}(a-b) &= \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)-\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(a+b) &= \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(a) \\ \mathrm{sh}(a-b) &= \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)-\mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(a) \end{aligned}$$

En particulier
$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$ et $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) \cdots$

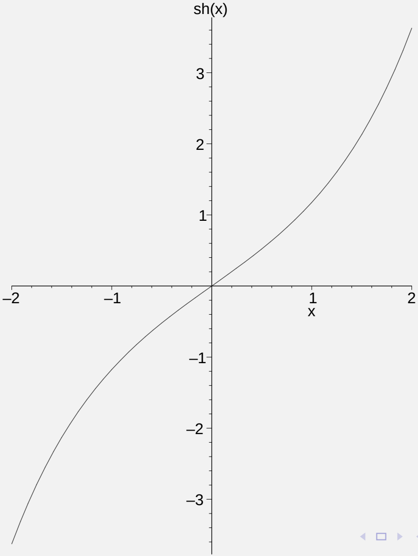
Fct sinus hyperbolique sh(x)

Propriété : $y = \text{sh}(x)$ est impaire sur tout $\mathbb{R}$.
Tableau de variation: (ch paire : Sym. axe des y)

x	0		$+\infty$
$y' = \text{ch}(x)$	1	$+$	
			$+\infty$
$y = \text{sh}(x)$		$\nearrow$	
	0		

Remarque :
En 0 la tangente à pour pente 1 (coefficient directeur égal à 1).

Représentation graphique sh(x)



Fct cosinus hyperbolique ch(x)

Propriété : $y = \text{ch}(x)$ est paire sur tout $\mathbb{R}$.
$(\text{ch}(-x) = \text{ch}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}.)$

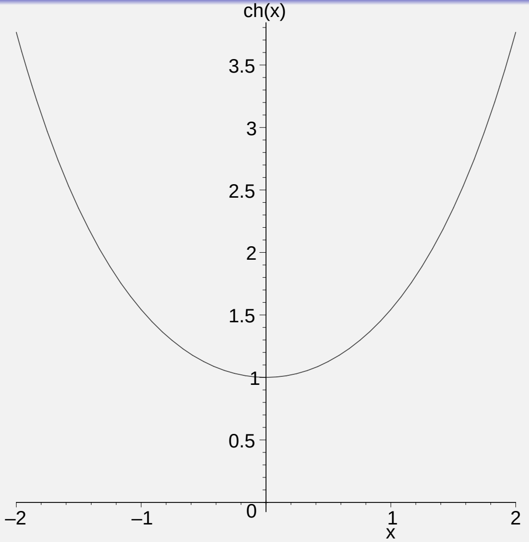
Propriété : $\text{ch}(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\text{ch}(x)$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus
$(\text{ch}(x))' = \text{sh}(x)$

Tableau de variation: (ch paire : Sym. axe des y)

$$\begin{array}{c|ccc}
x & 0 & & +\infty \\
\hline
y' = \text{sh}(x) & 0 & + & \\
 & & & +\infty \\
y = \text{ch}(x) & & \nearrow & \\
 & 1 & &
\end{array}$$

Représentation graphique ch(x)



Fct tangente hyperbolique th(x)

Définition :

tangente hyperbolique $\boxed{th(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}}$ pour x tel que $\text{ch}(x) \neq 0$

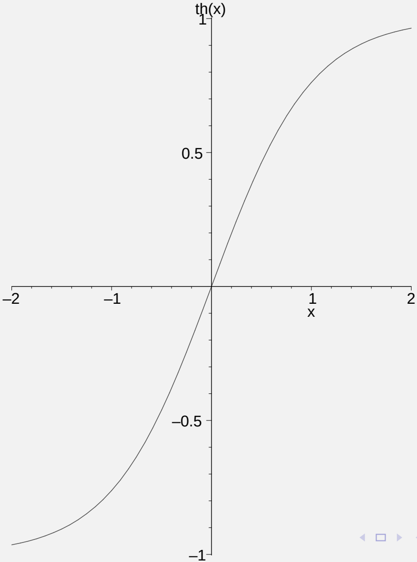
Propriétés : $y = th(x)$ est impaire sur tout $\mathbb{R}$ et son domaine de définition est $\mathbb{R}$

Propriété : *th* est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ $\left((th(x))' = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0\right)$

Tableau de variation : (*th* impaire: Symétrie / Origine)

$$\begin{array}{c|ccc}
x & 0 & & +\infty \\
\hline
y' & 1 & + & \\
 & & & 1 \\
y = th(x) & & \nearrow & \\
 & 0 & &
\end{array}$$

Représentation graphique th(x)



th(x) (suite)

Propriétés (exercices) :

$$th^2(x) = \frac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{\text{ch}^2(x) - 1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - th^2(x)$$

$$th(a+b) = \frac{th(a) + th(b)}{1 + th(a)th(b)},$$

$$th(a-b) = \frac{th(a) - th(b)}{1 - th(a)th(b)} \cdots$$

La fonction $y = \text{Arg sh}(x)$

Définition :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y = \text{Arg sh}(x), \\ x \in \mathbb{R}, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \text{sh}(y), \\ y \in \mathbb{R}. \end{array}\right.}$$

Tableaux de variations :

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline & & & +\infty \\ y = \text{sh}(x) & & \nearrow & \\ & 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline & & & +\infty \\ y = \text{Arg sh}(x) & & \nearrow & \\ & 0 & & \end{array}$$

Arg sh(x) (suite)

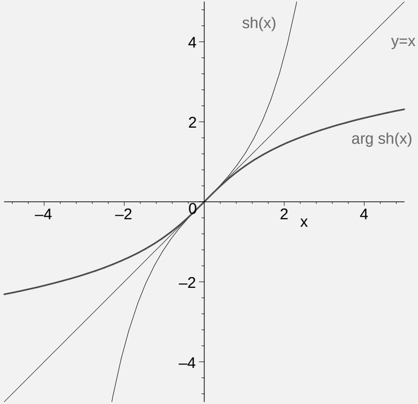
Propriété :
$y = \text{Arg sh}(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$

Dérivée :
$$\text{Arg sh}'(x) = \frac{1}{\text{ch}(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{sh}^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x$$

Théorème : (Expression en fonction d'un logarithme):
$$y = \text{Arg sh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Démonstration

Représentation graphique Arg sh(x)



La fonction $y = \text{Arg ch}(x)$

Définition :

$$\boxed{\begin{cases} y = \text{Arg ch}(x), \\ x \geq 1, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \text{ch}(y), \\ y \geq 0. \end{cases}}$$

Tableaux de variations :

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline & & & +\infty \\ y = \text{ch}(x) & & \nearrow & \\ & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & & +\infty \\ \hline & & & +\infty \\ y = \text{Arg ch}(x) & & \nearrow & \\ & 0 & & \end{array}$$

Arg ch(x) (suite)

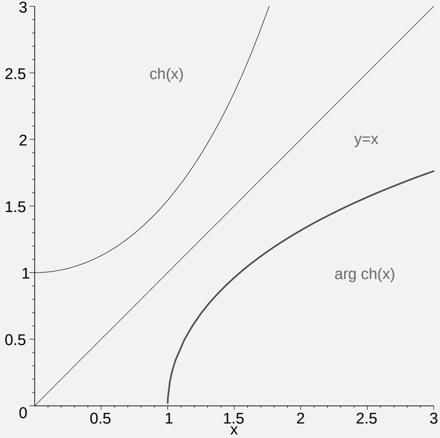
Dérivée :

$$\text{Arg ch}'(x) = \frac{1}{\text{sh}(y)} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2(y) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \forall x > 1.$$

Théorème (Expression en fonction d'un logarithme):

$$y = \text{Arg ch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \forall x > 1.$$

Représentation graphique Arg ch(x)



La fonction $y = \text{Arg th}(x)$

Définition :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y = \text{Arg th}(x), \\ x \in]-1,1[, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = th(y), \\ y \in \mathbb{R}. \end{array}\right.}$$

Tableaux de variations :

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ y = \text{th}(x) & & \nearrow & \\ & 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & & 1 \\ \hline & & & +\infty \\ y = \text{Arg th}(x) & & \nearrow & \\ & 0 & & \end{array}$$

Arg th(x) (suite)

Propriété :
Arg th(x) est impaire et continue sur $]-1,1[$

Dérivée :
$$\text{Arg th}'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\text{ch}^2(y)}} = \text{ch}^2(y) = \frac{1}{1 - th^2(y)} = \frac{1}{1-x^2} \ \forall x \in]-1,1[$$

Théorème (Expression en fonction d'un logarithme) :
$$y = \text{Arg th}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \forall x \in]-1,1[$$

Représentation graphique Arg th(x)

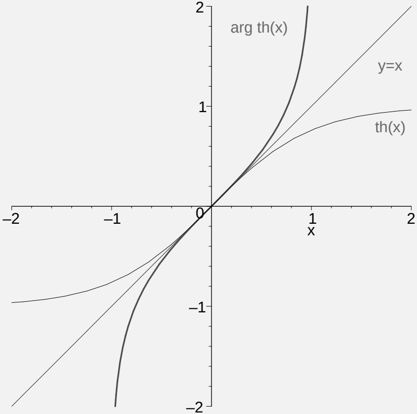


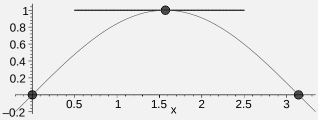
Table des matières

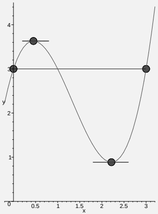
Théorème de Rolle et Accroissement finis (AF)

Théorème de Rolle

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ définie, continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ f(a)=f(b)\ (=0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{il existe au moins} \\ \text{une valeur } c \text{ tq} \\ f'(c)=0,\ \ a<c<b \end{array}\right.$$

Démonstration

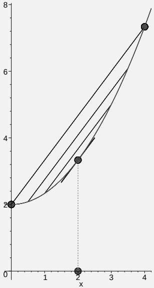




Théorème des Accroissements Finis

Généralisation du théorème de Rolle pour $f(a) \neq f(b)$

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[, \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{il existe au moins} \\ \text{un point } c \in]a,b[\text{ tq} \\ f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \end{array}\right.$$



Démonstration

Remarque : Si $a \neq b$, on peut écrire $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Table des matières

Formule de Taylor

Idée du chapitre : Comment approcher une fonction plusieurs fois dérivable par des polynômes

Définition

On appelle dérivée $n^{\text{ième}}$ de f (ou dérivée d'ordre n) la fonction notée $f^{(n)}$ obtenue en dérivant successivement n fois f

Remarque: Ne pas confondre $f^{(n)}$ avec f^n

Formule de Taylor

Cas d'une fonction quelconque

Définition

f admet des dérivées d'ordre n en x_0, la fonction $P_n(x)$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)}$$

est un polynôme de degré n appelé

développement de Taylor d'ordre n de f au point x_0.

Notation : $k! = k \times (k-1) \times (k-2) \cdots 3 \times 2 \times 1$

Ecriture sous forme développée :

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Théorème de Taylor

Théorème

Si f est (continue) dérivable jusqu'à l'ordre n sur $[a,b]$ et si $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\boxed{f(b) = \underbrace{f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^p}{p!}f^{(p)}(a) + \cdots}_{\text{Dev. de Taylor d'ordre } n \text{ en } a} \quad \underbrace{\cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)} + \underbrace{\frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}_{\text{Reste}}}$$

Démo

Remarque: Il existe d'autres écritures:

Lagrange, Taylor-Young, Mac-Laurin ($c = \theta x, \theta \in]0,1[$) $\cdots$

Exercice 1 : Cas d'un polynôme

Théorème :

$P(x)$: poly. de degré n et $a \in \mathbb{R}$ quelconque alors

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) &= P(a) + (x-a)P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}P''(a) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{(x-a)^k}{k!}P^{(k)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}P^{(n)}(a) \end{aligned}}$$

Remarque :
La formule est exacte si elle est écrite à un ordre $\geq n$ (degré du polynôme)

Démonstration : Évidente par identification

Exercice 2 : Formule du binôme

Théorème:

On applique le théorème à $P(x) = x^n \Longrightarrow$

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}a^{n-p}x^p + \cdots + x^n$$

Autre écriture de la formule du binôme $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$\begin{aligned}(a+x)^n &= a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + \cdots + \\ &\cdots + C_n^p x^{n-p}x^p + \cdots + C_n^n x^n \\ &= \sum_{i=0,\cdots,n} C_n^i a^{n-i}x^i\end{aligned}$$

Application 1: Approximation

- Développer (dév. de Taylor) $f(x) = e^x$
  au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 1,2 et 3

- Calculer les valeurs prises en $x = 1$

- Commenter les résultats sachant que
  $e = 2.718\cdots$

Application 1 (Taylor)

f définie (continue) dérivable au vois. de 0 jusqu'a l'ordre n et $f^{(n+1)}$ existe alors il existe $c_1, c_2, c_3 \in]0, 1[$ tels que

$$n=1 \quad f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{c_1} \qquad P_1 = 1 + x$$

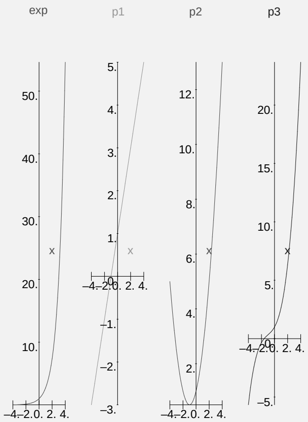
$$n=2 \quad f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} e^{c_2} \qquad P_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

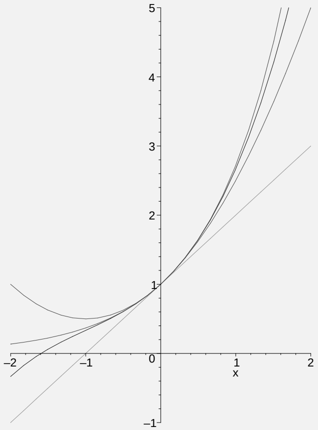
$$n=3 \quad f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} e^{c_3} \qquad P_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Conclusion

$$P_1(1) = 2,\ P_2(1) = 2.5,\ P_3(1) = 2.666 \cdots (e = 2.718 \cdots)$$

Application 1 (suite)





Animation Maple dl.mws

Autres exemples Voir TD

Application 2: Calcul de limites

Élimination de formes indéterminées $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0$

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$

Formule de Taylor: au voisinage de 0, $\exists c (\in]0, x[)$ tq

$$\sin(x) = \underbrace{\sin(0)}_{=0} + x \underbrace{\sin'(0)}_{\cos(0)=1} + \frac{x^2}{2} \underbrace{\sin''(0)}_{-\sin(0)=0} + \frac{x^3}{3!} \underbrace{\sin'''(0)}_{-\cos(0)=-1} + \frac{x^4}{4!} \underbrace{\sin^{(4)}(\theta x)}_{\sin(c)}$$

$$\text{d'où } \boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \sin(c), \;\; c \in]0, x[}$$

Application 2 (suite)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\sin(c),\ \ c \in]0, x[$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6}\cos(c)}{x^3} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{1}{6}\cos(c) = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Remarques :

- Quand $x \longrightarrow 0$ alors $c \in]0, x[\longrightarrow 0$
- Un développement à l'ordre 1 suffit $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6}\cos(c)$

Application 3 : Encadrement - Calcul approché

Exemple : Etude de $f(x) = \cos(x)$ au voisinage de 0

Taylor (au voisinage de 0) : $\exists c \in]0, x[$ tq

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\cos(c)}$$

Ainsi $1 - \frac{x^2}{2} \approx \cos(x)$, **l'erreur** est majorée par $\frac{|x|^4}{24}$

On a une erreur de l'ordre de 10^{-4} quand x vérifie

$|x|^4 < 24.10^{-4} \iff |x| < \sqrt[4]{24}.10^{-1} \iff |x| < 0.22$

Remarque : $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Et la fonction $\sin(x)$?

Table des matières

Définition - Exemples (D.L.)

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
On dit que f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un intervalle $I =]-\alpha, +\alpha[$ ("voisin de 0") tel que pour tout $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{\varepsilon(x)x^n}_{\text{reste}} \text{ où } \lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0}$$

Remarques :

1- La différence avec les dév. de Taylor réside dans
l'écriture du Reste

2- En introduisant la notation "petit o" : $f = o(g)$ au voisinage de $x_0 \iff \lim_{x_0} \frac{f}{g} = 0$, le reste s'écrit $o(x^n)$

3- Il existe une autre notation "grand O"

D.L. et formule de Taylor

"La théorie"

Si f admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et une dérivée d'ordre n continue en 0, d'aprés le théorème de Taylor

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c), \; c \in]0, x[}$$

Quand $x \longrightarrow 0, \; c \longrightarrow 0$ et $f^{(n)}(c) \longrightarrow f^{(n)}(0)$ par continuité de $f^{(n)}$ en 0 : $f^{(n)}(c) = f^{(n)}(0) + \varepsilon(x)$ d'où le D.L.

Autres approches

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \underbrace{x^n \varepsilon(x)}_{o(x^n)}}$$

Exemples et Propriétés

- $f(x) = \exp(x)$
$f^{(n)}(x) = f(x)$ on a

$$\boxed{exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)}$$

- $f(x) = (1+x)^m, \ (x > -1)$
$f^{(n)}(x) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$ on a

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)\end{aligned}}$$

D.L. issus de $f(x) = (1+x)^m$

- Pour $m = -1$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)}$$

- Pour $m = -1$ puis et le chgt $x \longleftarrow -x$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x)}$$

D.L. issus de $f(x) = (1+x)^m$

- Pour $m = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots \\ &\cdots + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\cdots(2n-3)}{2.4.6\cdots 2n}x^n + x^n\varepsilon(x)\end{aligned}}$$

- Pour $m = \frac{1}{2}$ suivi du chgt $x \longleftarrow -x$

$$\boxed{\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots \\ &\cdots - \frac{1.3.5\cdots(2n-3)}{2.4.6\cdots 2n}x^n + x^n\varepsilon(x)\end{aligned}}$$

D.L. issus de $f(x) = (1+x)^m$

- Pour $m = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots \\ &\cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n} x^n + x^n \varepsilon(x)\end{aligned}}$$

Important :
Ces formules (horsmis celle de Taylor) ne sont pas à connaître par cœur mais vous devez pouvoir les retrouver !!!

Généralités sur les D.L.

Théorème :

Si f admet un D.L. il est unique

Démonstration

Théorème :

- Si f est paire alors les coefficients $a_1, a_3, \cdots, a_{2p+1}, \cdots$ (indices impairs) sont nuls
- Si f est impaire alors les coefficients $a_2, a_4, \cdots, a_{2p}, \cdots$ (indices pairs) sont nuls

Démonstration

Exemples : D.L. de fonction Paire, Impaire

- $f(x) = \sin(x)$.

Comme $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \Longrightarrow$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)}$$

- $f(x) = \cos(x)$.

Comme $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}) \Longrightarrow$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x)}$$

Dérivée et D.L.

Théorème de dérivation :

Soient f et f' deux fonctions admettant des D.L.
Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$
alors le D.L. de f' est donné par
$f'(x) = a_1 + 2a_2 x \cdots + n a_n x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)$
et réciproquement

Théorème d'intégration :

Quand on intègre (c'est à une constante près) $\Longrightarrow$ la valeur de a_0 devra être égale à $f(0)$

Démonstration

Exemples : Théorème de dérivation

- $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ a un D.L. issu du D.L. de $g(x) = \frac{1}{1+x}$:

$f(x) = -g'(x) \Longrightarrow$
$f(x) = -\left(-1 + 2x - 3x^2 + \cdots + n(-1)^n x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)\right)$

- $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ a un D.L. issu du D.L. de $g(x) = \frac{1}{1-x}$:

$f(x) = g'(x) \Longrightarrow$
$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)$

Exemples : Théorème d'intégration

- $f(x) = \ln(1+x)$ a un D.L. issu du D.L de $g(x) = \frac{1}{1+x}$:
$f'(x) = g(x) \Longrightarrow$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)$

- $f(x) = \text{Arctan}(x)$ a un D.L. issu de $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$
En effet $f'(x) = g(x)$
De plus le D.L. de $g(x)$ se déduit de $h(x) = \frac{1}{1+x}$
En effet $g(x) = h(x^2)$ – voir plus loin D.L. et fcts composées –
$\Longrightarrow f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$

- $f(x) = \text{Arc}\sin(x)$ même démarche $\cdots$ $(f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$

Opération sur les D.L. : Addition

On se donne deux fonctions qui admettent des D.L. d'ordre n au voisinage de 0:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \varepsilon_1(x)x^n = A(x) + \varepsilon_1(x)x^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \varepsilon_2(x)x^n = B(x) + \varepsilon_2(x)x^n,$$

où $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0, \ \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$

Théorème :

La fonction $f + g$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est égale à $A(x) + B(x)$.

Exemples : Addition de D.L.

- $f(x) = \text{Arg th}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$
$= \frac{1}{2}((x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)) - (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)))$

$$\boxed{\text{Arg th}(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x),\ x \in]-1, 1[}$$

- Partant du D.L. de $\exp(x)$ on peut retrouver les D.L. des fonctions $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$

$$\boxed{\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x)}$$

$$\boxed{\text{sh}(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)}$$

Opération sur les D.L. : Produit

Théorème :

La fonction *fg* admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière s'obtient en prenant dans le produit $A(x)B(x)$ les termes de degré inférieur ou égaux à n.

Exemple :

- $$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)\cos(x) \\ &= (x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x))(1 - \frac{x^2}{2!} + x^3\varepsilon(x)) \\ &= x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\ &= x - \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Division de ploynômes (puiss. décroissantes) *(hors prg)*

Rappel : Division (Euclidienne) de ploynômes en puissances décroissantes

$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ où $\deg(R) < \deg(B)$ $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline R & Q \end{array}$

On ordonne A et B suivant les puissances décroissantes

On élimine les termes de plus haut degré

Exemple

Effectuer la division de

$x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ par $x^2 + x + 1$

Un peu d'histoire (Euclide) ?

Exemple de Division de polynômes (décroissants) *(hors prg)*

Division de ploynômes en puissances décroissantes

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+2x+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2} x^3+x^2+x & x+2 \\ \cline{1-1} 2x^2+x+1 & \\ 2x^2+2x+2 & \\ \cline{1-1} -x-1 & \end{array}$$

$$\boxed{x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)(x+2)-(x+1)}$$

Division de ploynomes (puiss. croissantes) *(hors prg)*

Division de ploynômes en puissances croissantes :
On ordonne A et B suivant les puiss. croissantes
élimine les termes de plus bas degré

$$A(x) = B(x)Q(x) + x^{n+1}R(x), \ \deg(Q) \leq n \text{ ou } Q = 0$$

Exemple :
Effectuer la division de 1 par $1 + x$ (jusqu'à l'ordre 3: $n = 3$)

Exemple: Division de polynômes (puissances croissantes) *(hors prg)*

1

$1 + x$

$0 - x$

$-x - x^2$

*-0.5cm

x^2

$x^2 + x^3$

$-x^3$

$-x^3 - x^4$

$1 + x$

$1 - x + x^2 - x^3$

$$\boxed{1 = (1+x)(1-x+x^2-x^3)+x^4}$$

Opération sur les D.L. : Division *(hors prg)*

Exemple: Division de 1 par $1 + x$ (jusqu'à l'ordre 3: $n = 3$)

$$1 = (1 + x)(1 - x + x^2 - x^3) + x^4$$

D'où $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \underbrace{\frac{x^4}{1+x}}_{x^3\varepsilon(x)=o(x^3)}$

On a ainsi obtenu un D.L. d'ordre 3

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + = o(x^3)}$$

Opération sur les D.L. : Division *(hors prg)*

Théorème :

La fonction $\frac{f}{g}$ (on suppose $b_0 \neq 0$) admet un D.L. au voisinage de 0 dont la partie régulière s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes $A(x)$ par $B(x)$
($A(x)$ et $B(x)$ parties régulières de f et g)

Exemple :

- $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

On fait la division de $x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ par $1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Exemple de Division : $f(x) = \tan(x)$ *(hors prg)*

$$
\begin{array}{r|l}
x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) & 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\hline
x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) & x + \frac{x^3}{3} \\
\frac{x^3}{3} + o(x^3) & \\
\frac{x^3}{3} + o(x^3) & \\
o(x^3) &
\end{array}
\Longrightarrow
$$

$$\underbrace{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}_{\sin(x)} = \underbrace{(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}_{\cos(x)}(x + \frac{x^3}{3}) + o(x^3) \Longrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

Remarque :

$$H = \frac{o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{x^3\varepsilon_1(x)}{1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)} \Longrightarrow \lim_0 \frac{H}{x^3} = 0 \Longrightarrow H = o(x^3)$$

Opération sur les D.L. : Fonctions composées

- $g : x \longrightarrow g(x)$ ayant un D.L. au voisinage de $x = 0$ et telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} g(x) = 0$ $(\Longrightarrow b_0 = 0)$

$$g(x) = \underbrace{b_1 x + \cdots + b_n x^n}_{B(x)} + x^n \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

- $f : u \longrightarrow f(u)$ ayant un D.L. au vois. de $u = 0$

$$f(u) = \underbrace{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}_{A(u)} + u^n \varepsilon_2(u), \quad \lim_{u \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Théorème :

$F : x \longrightarrow F(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$

définie au vois. de 0 admet un D.L. dont la partie régulière est obtenue en substituant u par $B(x)$ dans $A(u)$ et en négligeant les puissances de x d'ordre $\geq n$

Exemple d'opération sur les fonctions composées *(hors prg)*

- $f(x) = \ln(1-x)$ admet un D.L. qui se déduit du D.L. de $g(x) = \ln(1+x)$
En effet $f(x) = g(h(x))$ avec $h(x) = -x,\ g(x) = \ln(1+x)$

- $f(x) = \cos(\sin(x))$
On a bien $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \sin(x) = 0$ et $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{4} + o(u^3)$
En posant $u = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ on obtient
$f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 + o(x^3)$ d'où
$$f(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$$

Exercices : Autres D.L.

D'autres moyens peuvent être mis en œuvre pour définir de nouveau comme D.L.

Exemple :
Si on regarder les parties réelle et imaginaire du D.L. de $\exp(ix)$ on retrouve les D.L. des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$

$$\ldots$$

Applications des D.L.

Les applications des développements de Taylor restent valables

Complément sur l'étude d'une fonction

Rappel :
Condidérons un D.L. d'ordre 2 au voisinage du pt x_0

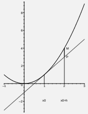
$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}\left(f''(x_0) + \varepsilon(h)\right) \text{ où } \lim_{h\longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

L'équation de la tgte en $M_0 = (x_0, f(x_0))$ est

$$y_T = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{h} f'(x_0)$$

Applications des D.L. (suite)

Ainsi d'après la formule Taylor
$\overline{PM} = f(x_0 + h) - y_T = \frac{h^2}{2}\left(f''(x_0) + \varepsilon(h)\right)$



On admet que $f''(x_0) + \varepsilon(h)$ est du signe de $f''(x_0)$ dès que h est suffisament petit d'où

- Si $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow \overline{PM} > 0 \Longrightarrow$
  la courbe est au-dessus de la tangente.
- Si $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow \overline{PM} < 0 \Longrightarrow$
  la courbe est au-dessous de la tangente.
- Si $f''(x_0) = 0$, $f^{(3)}$ définie continue en $x = x_0 \Longrightarrow$

même raisonnement: étudie du signe de $f'''(x_0) \cdots$
Si $\overline{PM}$ change de signe avec $h \Longrightarrow$ pt d'inflexion

Étude des branches infinies

a) Asymptote verticale $x = x_0$

$\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \infty \Longrightarrow x = x_0$ asymptote.

b) Asymptote horizontale $y = y_0$

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = y_0 \Longrightarrow y = y_0$ asymptote.

c) Direction asymptotique

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$ et que la droite (OM) tend vers une position limite quand M s'éloigne à l'∞ sur la courbe, la courbe admet une direction asymptotique $\left(\frac{f(x)}{x} = \text{coeff. directeur de } (OM)\right)$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Branches infinies (suite)

d) Asymptote

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) - mx = p \Longrightarrow y = mx + p$ asymptote
m est appelée direction asymptotique

e) Branche parabolique

Une branche infinie peut avoir une direction asymptotique sans avoir d'asymptote :
$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, mais $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) - mx$ n'existe pas.
Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) - mx = \infty$
on dit que la courbe a une branche parabolique dans la direction de coefficient m

Exemple d'étude à l'infini

Recherche d'asymptote oblique y=mx+p pour $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

Au voisinage de $+\infty$ $x > 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$

- $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1} = 1 \Longrightarrow$ $\boxed{\text{la direction asymptotique } m = 1}$
- $\lim\limits_{+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{+\infty} \sqrt{1+x^2} - x$ qui est une forme indéterminée $\Longrightarrow$ D.L. au voisinage de $+\infty$

Exemple d'étude de $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

D.L. au voisinage de $+\infty \Longrightarrow$ on pose $X = \frac{1}{x}$

$$\Longrightarrow \lim_{+\infty} \sqrt{1+x^2} - x = \lim_{X \longrightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{X^2}} - \frac{1}{X} =$$

$$\lim_{X \longrightarrow 0^+} \sqrt{\frac{X^2+1}{X^2}} - \frac{1}{X} = \lim_{X \longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{X^2+1} - 1}{X}$$

Or au vois. de 0 on a $\sqrt{X^2+1} = 1 + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$

$$\Longrightarrow \lim_{X \longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{X^2+1} - 1}{X} = \lim_{X \longrightarrow 0^+} \frac{X}{2} + o(X) = 0$$

$\Longrightarrow p = 0$

$\boxed{y = x \text{ est une asymptote au voisinage de } +\infty}$

Exemple d'étude de $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

Au voisinage de $-\infty$ $x < 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$

- $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$ • $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ • $\lim\limits_{-\infty} f(x) + x = 0$

$\boxed{y = -x \text{ est une asymptote au voisinage de } -\infty}$

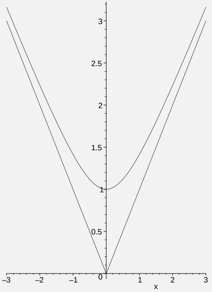


Table des matières

COMPLEMENTS
DEMONSTRATIONS

Démo Dérivable $\Longrightarrow$ Continue

Théorème :

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
Attention : la réciproque est fausse.

Démonstration : Par définition, f dérivable en x_0 entraîne $f(x_0+h)-f(x_0)=h(f'(x_0)+\varepsilon_0(h))$. Ainsi quand $h\longrightarrow 0$ le second membre tend vers 0. Il en résulte que $f(x_0+h)$ tend $f(x_0)$ quand $h\longrightarrow 0$ soit encore que $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ quand $x\longrightarrow x_0$ d'où la continuité de f en x_0.

Retour au cours

Complément sur la dérivabilité

Définition :

Les trois définitions suivantes sont équivalentes :

(1)- Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable en x_0 un point de I si la fonction $\varphi : x \longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0. Cette limite est alors la dérivée de f en x_0 notée

$$f'(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Dérivabilité (suite)

(2)- f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe une fonction ε_{x_0} définie au voisinage de x_0 (i.e. il existe $\alpha > 0$ tel que la fonction ε_{x_0} soit définie sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$) et $l \in \mathbb{R}$ tels que :

(i) $\varepsilon_{x_0}(x) \longrightarrow \varepsilon_{x_0}(x_0) = 0$ quand $x \longrightarrow x_0$,

(ii) $f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_{x_0}(x)$, l est alors la dérivée de f en x_0.

(3)- en changeant $x - x_0$ par h et $\varepsilon_{x_0}(x)$ par $\varepsilon_0(x - x_0)$, la définition 2 s'écrit sous la forme :

(i)' $\varepsilon_0(h) \longrightarrow \varepsilon_0(0) = 0$ quand $h \longrightarrow 0$,

(ii)' $f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{l} h + h\varepsilon_0(h)$, l est alors la dérivée de f en x_0.

Retour au cours

Démo Monotonicité de f^{-1}

Démonstration : $f : x \longrightarrow y$ d'où $\varphi = f^{-1} : y \longrightarrow x$.

– Supposons $y_1 > y_0$ et montrons que φ est croissante en prouvant que $\varphi(y_1) > \varphi(y_0)$.

Pour cela, nous définissons les valeurs x_1 et x_0 par :

$x_1 = \varphi(y_1)$ et $x_0 = \varphi(y_0)$. Il nous faut donc montrer que $x1 > x_0$.

Par construction, $y_1 = f(x_1)$ et $y_0 = f(x_0)$. Etant donné que $y_1 > y_0$, on a $f(x_1) > f(x_0)$. De plus comme f est croissante on déduit que $x_1 > x_0$.

(La dernière implication se démontre par l'absurde :

Si $x_1 < x_0 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_0)$ et

Si $x_1 = x_0 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_0)$ d'où $x_1 > x_0$).

En conclusion : la fonction φ est donc strictement croissante.

Monotonicité de f^{-1} (suite)

– (Admis) Montrons que φ est continue en y_0. Pour cela, considérons $x_0 = \varphi(y_0) \Longrightarrow f(x_0) = y_0$ et montrons que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $|y - y_0| < \alpha \Longrightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$. ε étant donné, posons $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Ainsi, étant donné que f est croissante et que $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$, cela entraîne que $y_1 < y_0 < y_2$. Sachant que φ est croissante (déja démontrée), pour $\alpha = min(|y_1 - y_0|, y_2 - y_0)$, on a alors

$y_1 \leq y_0 - \alpha < y < y_0 + \alpha \leq y_2 \Longrightarrow$

$\varphi(y_1) \leq \varphi(y_0 - \alpha) < \varphi(y) < \varphi(y_0 + \alpha) \leq \varphi(y_2)$

Étant donné que $\varphi(y_1) = x_0 - \varepsilon$ et $\varphi(y_2) = x_0 + \varepsilon$:

$x_0 - \varepsilon \leq \varphi(y_0 - \alpha) < \varphi(y) < \varphi(y_0 + \alpha) \leq x_0 + \varepsilon$.

Comme $x_0 = \varphi(y_0)$: $\varphi(y_0) - \varepsilon < \varphi(y) < \varphi(y_0) + \varepsilon$.

En conclusion: $|y - y_0| < \alpha \Longrightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$ ce qui démontre le théorème.

Retour au cours

Démo Dérivée de f^{-1}

Démonstration 1:
D'après la définition d'une dérivée :

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

Quand y tend vers y_0, x tend vers x_0 puisque $x=\varphi(y)$ est continue.
Le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $f'(x_0)$ puisque $f(x)$ est dérivable en x_0 et comme $f'(x_0)\neq 0$, le rapport inverse tend vers $\frac{1}{f'(x_0)}$.
Retour au cours

Rq : Voir la suite pour d'autres démonstrations.

Autres Démos - Dérivée de f^{-1}

Démonstration 2:
Soit $x = f(y)$, on cherche la quantité $y' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.
Or $\mathrm{d}x = f'(y)\mathrm{d}y$ d'où $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Démonstration 3:
Soient $f : x \longrightarrow y$ et $f^{-1} : y \longrightarrow x$ et f une fct continue, strictement croissante sur $[a, b]$.
On définit alors $x = \varphi(y)$ sa fct inverse.
La dérivée de φ peut se retrouver à partir des graphes des deux fonctions f et φ.

Retour au cours

Autre écriture de Arg sh

$$y = \text{Arg sh}(x) \iff x = \text{sh}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Posons $t = e^y \iff y = \ln(t)$ alors $x = \dfrac{t - \frac{1}{t}}{2} = \dfrac{t^2 - 1}{2t}$

Pour x donné, t est solution de l'éq. $t^2 - 2tx - 1 = 0$ qui admet 2 racines réélles notées t_1 et t_2

Sachant que $t_1 t_2 = -1 \quad ='' (-\frac{c}{a})'' \Longrightarrow t_1 \leq 0$ et $t_2 \geq 0$. Or $t = e^y \geq 0$ d'où

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1} \iff y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Retour au cours

Démonstration Théorème de Rolle

• Si f est constante sur $I = [a, b]$: évident.
• Si f est non constante sur I: Étant donné que f est continue sur I, $\exists m$ et M. Supposons qu'il existe un maximum $M \neq f(a)$ alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $M = f(c)$.
On étudie la quantité $A = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ quand $x < c$ alors $A \geq 0$.
De même $A = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ quand $x > c$ alors $A \leq 0$. f étant dérivable : A a une limite qui est $f'(c)$ qui doit donc être à la fois ≥ 0 et ≤ 0 d'où $f'(c) = 0$.

Retour au cours

Démonstration Théorème des A.F.

Soit $\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)A$
où A est choisit de telle sorte que $\varphi(a) = \varphi(b)$.
Ainsi $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, on peut donc appliquer le théorème de Rolle à φ.
Comme $\varphi'(x) = f'(x) - A$ on en déduit qu'il existe c tel que $\varphi'(c) = 0$
c'est à dire que $A = f'(c)$ d'où le résultat.

Retour au cours

Démo du Théorème de Taylor

Idée pour $n = 2$ qui se généralise facilement $\forall n$.
Montrons que $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \underbrace{f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a)}_{P_2(b)} + \frac{(b-a)^3}{3!} f^{(3)}(c).$$

Soit $P_2(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a)$ alors $[P_2(a) = f(a),\ P_2'(a) = f'(a),\ P_2''(a) = f''(a)] \Longrightarrow [(f - P_2)^{(k)}(a) = 0,\ k = 0, 1, 2]$. Soit $\varphi(x) = f(x) - P_2(x) + C(x-a)^3$ où C est une constante que l'on choisit de telle sorte que $\varphi(b) = 0$ i.e. $C = \frac{P_2(b) - f(b)}{(b-a)^3}$.

Démo du Théorème de Taylor (suite)

On peut appliquer le *théorème de Rolle* aux fonctions $\varphi^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$ de la façon suivante.
$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \Longrightarrow \exists c_1 \in]a, b[$ tq $\varphi'(c_1) = 0$.
$\varphi'(c_1) = \varphi'(a) = 0 \Longrightarrow \exists c_2 \in]a, c_1[\subset]a, b[$ tq $\varphi''(c_2) = 0$.
$\varphi''(c_2) = \varphi''(a) = 0 \Longrightarrow \exists c \in]a, c_2[\subset]a, b[$ tq $\varphi^{(3)}(c) = 0$.
De plus
$\varphi^{(3)} = f^{(3)} + 3!C \Longrightarrow 0 = \varphi^{(3)}(c) = f^{(3)}(c) + 3!C \Longrightarrow C = -\frac{f^{(3)(c)}}{3!}$.
En conclusion : $C = -\dfrac{f^{(3)(c)}}{3!} = \dfrac{P_2(b) - f(b)}{(b-a)^3}$ d'où le résultat.

Retour au cours

Démo - Equations algébriques

Théorème

Si f admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre p en $x = x_0$ alors f admet 1 zéro d'ordre $p \Longleftrightarrow f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(p-1)}(x_0) = 0$ et $f^{(p)}(x_0) \neq 0$.

Démonstration

$\Longleftarrow$ Condition suffisante : d'aprés Taylor

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0 + \theta(x - x_0)) = (x-x_0)^p g(x) \Longrightarrow$$

$g(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = f^{(p)}(x_0) \neq 0$ (par continuité de la fonction $f^{(p)}(x)$).

Equations algébriques (suite)

$\Longrightarrow$ Condition nécessaire : $f(x) = (x - x_0)^p g(x)$
$\Longrightarrow f'(x) = (x - x_0)^p g'(x) + p(x - x_0)^{p-1} g(x) \Longrightarrow f'(x_0) = 0$
$\Longrightarrow f''(x) = \cdots$
$\ldots$
$\Longrightarrow f^{(p-1)}(x_0) = 0$
$\Longrightarrow f^{(p)}(x) = p!g(x) + (x - x_0)F(x) \Longrightarrow f^{(p)}(x_0) = p!g(x_0) \Longrightarrow$
$f^{(p)}(x_0) \neq 0$
(car $g(x_0) \neq 0$).

Retour au cours

Complément - Définition D.L.

Définition d'un D.L. grâce aux Développements de Taylor
Autre approche Si f est continue, dérivable jusqu'à l'ordre $(n-1)$ sur $I=[a,b]$ et s'il existe $f^{(n)}$ en 0 (uniquement en 0, cela suffit) alors d'aprés le théorèmew de Taylor-Young :

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}\left[f^{(n)}(0)+\varepsilon(x)\right]$$

qui correspond bien à un D.L. d'ordre n.

Complément D.L. (suite)

Autre approche : Si f admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n et une dérivée d'ordre $(n+1)$ bornée au voisinage de 0 alors :
$\left|f^{(n+1)}(\theta x)\right| < M \Longrightarrow$
$\dfrac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$
ce qui permet de retrouver le même résultat.
Il est à noter que ce résultat est moins fin que le précédent, en effet, si f admet des dérivée jusqu'à l'ordre n, les hypothèses faites au b) sont vérifiées.

Retour au cours

Démo Unicité d'un D.L.

Théorème

Si f admet un D.L. il est unique.

Démonstration Supposons que f admet 2 D.L., montrons qu'ils sont identiques. $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \varepsilon(x)x^n$, $f(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \varepsilon_1(x)x^n \implies$
$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n + (\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x))x^n = 0$,
pour $x \neq 0$, $x \longrightarrow 0 \implies a_0 = b_0$,
$x \neq 0 \implies (a_1 - b_1) + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-1} + (\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x))x^{n-1} = 0$,
pour $x \neq 0$, $x \longrightarrow 0 \implies a_1 = b_1$.
$\implies \cdots \implies a_n - b_n = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \varepsilon_1(x) - \varepsilon(x)$ d'où
$a_n - b_n = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (\varepsilon_1 - \varepsilon) = 0$,
$\implies a_n = b_n$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

Retour au cours

Démo D.L. d'une fonction paire

Théorème

Si f est paire alors les coefficients $a_1, a_3, \cdots, a_{2p+1}, \cdots$ (indices impairs) sont nuls.
Si f est impaire alors les coefficients $a_2, a_4, \cdots, a_{2p}, \cdots$ (indices pairs) sont nuls.

Démonstration On applique le théorème d'unicité sachant que si f est paire $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2p}x^{2p} + a_{2p+1}x^{2p+1} + \varepsilon(x)x^n \\ &= a_0 - a_1 x + \cdots + a_{2p}x^{2p} - a_{2p+1}x^{2p+1} + \varepsilon(x)x^n. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow a_0 = a_0,\ a_1 = -a_1, \cdots$

Retour au cours

Démo Dérivation de D.L.

Théorème Soient f et f' 2 fcts admettant des D.L., Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ alors le D.L. de f' est donnée par $f'(x) = a_1 + a_2 x \cdots + a_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$ et réciproquement. La partie régulière de f' doit de plus prendre la valeur $f'(0)$ quand $x = 0$.

Démo: On applique un dév. de Taylor Mac-Laurin à f et à f' en supposant que f admet au voisinage de 0 des dérivées $f', \cdots, f^{(n)}$ continues et une dérivée $f^{(n+)}$ bornée: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x),\ \theta \in]0,1[$ avec $|f^{(n+1)}(\theta x)| < M$.

En posant $\varepsilon(x) = \frac{x}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = x^n \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Démo Dérivation de D.L. (suite)

Au passage, on remarque que la formule de Mac-Laurin (contrairement à celle de Young) permet de majorer le reste étant donné que $|\varepsilon(x)| < \frac{M|x|}{(n+1)!}$.

Ainsi $f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$.

Les hypothèses faites permettent d'appliquer la formule de MacLaurin à f'.

Par identification on vérifie que la dérivée de la partie régulière du D.L. de f est égale à la partie régulière du D.L. de f'. Retour au cours

Approximation de la fonctions sin

Exemple : Etude de $f(x) = \sin(x)$ au voisinage de 0. D'aprés Taylor Mac-Laurin (vois. 0), $\exists\theta \in]0, 1[$ tel que
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta x)$
Ainsi $x \approx \sin(x)$ avec une erreur$= \frac{|x|^3}{6}$. Pour avoir une erreur de l'ordre de 10^{-4}
x doit érifier $|x|^3 < 6.10^{-4} \iff |x| < \sqrt[3]{6.10^{-4}} \iff |x| < 0.084$
Conclusion :
Le domaine de validité de l'approximation du cos ($|x| < 0.22$) est plus étendu que pour le sin ($|x| < 0.084$)

Retour au cours