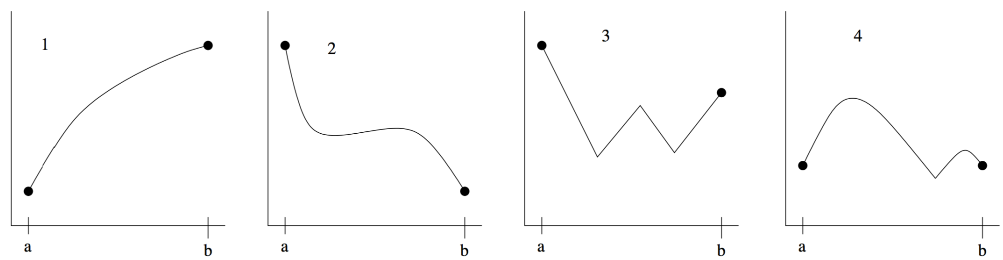
TD de Mathématiques S1
3. Accroissements finis. Formule de Taylor. Développements limités.

Exercice 1. Les graphes suivants sont des graphes de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacun d'eux, déterminer s'ils vérifient les hypothèses du théorème des accroissements finis. Le cas échéant, représenter et interpréter graphiquement les valeurs $c \in [a, b]$ satisfaisant à la conclusion du théorème des accroissements finis.



Exercice 2. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable jusqu'à l'ordre 3. De cette fonction, on ne connaît que les informations suivantes :

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 2, \qquad f''(0) = \frac{1}{2}, \qquad |f'''(x)| \leq \frac{1}{10} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(1) Écrire la formule de Taylor-Lagrange[a] pour f en 0 à l'ordre 2. En déduire une valeur approchée de $f(\frac{1}{4})$.

(2) On pose $P(x) = 1 + 2x + \dfrac{x^2}{4}$. On cherche à estimer l'erreur absolue commise si on approxime $f(x)$ par $P(x)$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'erreur $\varepsilon(x) = f(x) - P(x)$ vérifie

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{x^3}{60}.$$

(b) En déduire un encadrement de $f(\frac{1}{4})$.

(c) Déterminer A tel que l'erreur soit inférieure à $\dfrac{1}{100}$ si $x \in [0, A]$.

Exercice 3. Calculer les développements limités suivants

(1) $f_1(x) = \text{sh}x + x^4 - x^2 + 1 - \sin x$ à l'ordre 3 en 0.

(2) $f_2(x) = \left(1 + x^2\right)\cos(2x)$ à l'ordre 5 en 0.

(3) $f_3(x) = \sqrt{1 - x^2}$ à l'ordre 6 en 0.

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t - t}{t^2} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\tan t - t}{t^3} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{ch}(2x) - 1 + x - \ln(1 + x)}{e^x - \sqrt{1 + 2x}}.$$

a. La formule de Taylor-Lagrange est celle où le reste est de la forme $(x^3/6)f'''(c)$