TD de Mathématiques S1
2. Fonctions usuelles et leurs réciproques

Exercice. 1 Rappeler pourquoi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$. En déduire les valeurs suivantes

$$\ln(e), \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right), \qquad \ln\left(\sqrt{e}\right), \qquad \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

Exercice. 2 Pour les deux applications f suivantes, montrer que f est bijective de l'intervalle I sur son image que l'on déterminera. Puis calculer $f^{(-1)}$.

(1) $f(x) = 2\sqrt{x} - 3, \qquad I = \mathbb{R}^+.$ (2) $f(x) = x^2 - 2x - 1, \qquad I \in [1, \infty[.$

Exercice. 3 *Equations trigonométriques.*

(1) Donner les valeurs de $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$, de $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ et de $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

(2) Résoudre les équations $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ puis $\cos(x) = \frac{1}{3}$.

(3) Résoudre l'équation $2\cos^2(3x+1) - 3\cos(3x+1) + 1 = 0$.

Exercice. 4 *Etude de la fonction* $x \mapsto \arctan(x)$.

(1) Donner les domaines de définition et d'arrivée de la fonction $\arctan(x)$.

(2) Montrer que $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Puis, en utilisant le fait que $\tan(\arctan(x)) = x$, démontrer que

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(3) Déterminer le tableau de variation de la fonction $\arctan(x)$ puis son graphe.

Exercice. 5 *Relations remarquables entre les fonctions trigonométriques réciproques.*

(1) Montrer que la fonction $\arcsin(x) + \arccos(x)$ est constante sur son domaine de définition. Quelle est la valeur de cette constante ?

(2) Montrer que pour tout $x < 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$. Qu'en est-il pour $x > 0$?

Exercice. 6 *Etude de la fonction tangente hyperbolique.*

Démontrer que pour tout x, $|\mathrm{sh}(x)| \leq \mathrm{ch}(x)$. Montrer par ailleurs que $(\mathrm{th}(x))' = 1 - \mathrm{th}^2(x)$. En déduire le tableau de variation de la fonction $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ puis son graphe.

Exercice. 7 *Propriétés des fonctions hyperboliques.*

(1) Rappeler les expressions de $x \to \mathrm{ch}(x)$ et $x \to \mathrm{sh}(x)$ et donner une expression simple des valeurs de $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$ pour $x = \frac{1}{2}\ln(3)$.

(2) Démontrer les relations

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(a+b) &= \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b), \\ \mathrm{sh}(a+b) &= \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b). \end{aligned}$$

En déduire une expression de $\mathrm{ch}(2a)$ et $\mathrm{sh}(2a)$ en fonction de $\mathrm{ch}(a)$ et $\mathrm{sh}(a)$. De même, donner une expression de $\mathrm{th}(2a)$ en fonction de $\mathrm{th}(a)$.

(3) Sachant que $\mathrm{ch}(t) = \frac{5}{4}$ et que $t > 0$, déterminer la valeur de $\mathrm{th}(t)$ et $\mathrm{th}\left(\frac{t}{2}\right)$.

(4) Simplifier l'expression $\left(1 - \mathrm{th}^2 x\right) \frac{\mathrm{ch}(2x) - 1}{2}$.

Exercice. 8 Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \mathrm{argch}(x)$ et $g(x) = \mathrm{argch}\left(2x^2 - 1\right)$.

(1) Déterminer les domaines de définitions de f et g .

(2) Calculer les dérivées de f et g. Déterminer une relation entre ces dérivées.

(3) En évaluant f et g en un certain point, donner une relation qui lie f et g.

Exercice. 9 *Expression logarithmique des fonctions réciproques hyperboliques.*

(1) Donner une expression logarithmique de $\mathrm{argth}(u)$. *On posera $X = e^x$ et on résolvera $th(x) = u$ en la variable X.*

(2) Pour $x \in [0, 1[$, en déduire une écriture simplifiée de $\mathrm{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.