TD de Mathématiques S1
1. Dérivation

Exercice. 1 Soit f la fonction $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Calculer la dérivée de f au point $x \neq 0$ en utilisant la définition de la dérivée. Calculer ensuite la dérivée de f en utilisant les formules standard.

Exercice. 2 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}, \frac{\tan(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}.$$

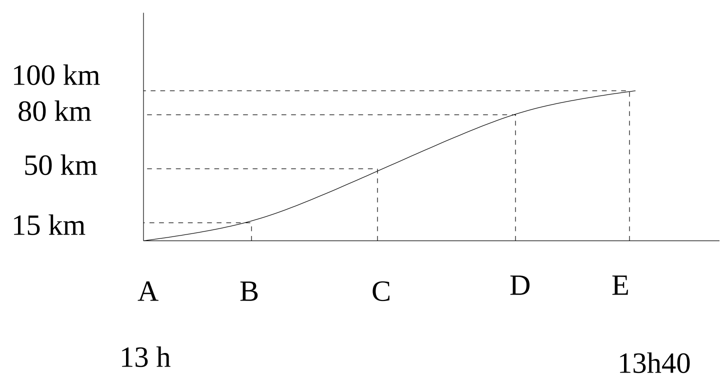
Exercice. 3 Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes (σ est une constante, f et g sont des fonctions, x et t sont des variables) :

$$2x + \cos(x), \qquad e^x \sin(x), \qquad \frac{1}{\ln(x)}, \qquad \frac{x^3-1}{\sqrt{x+2}}, \qquad (1-2x)^2, \qquad e^{x^2}, \qquad \left(2-x^3\right)^3, \qquad \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

$$\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{\sigma}}, \qquad (\sin(2x))^3, \qquad f\left(x^2\right), \qquad e^{g\left(x^3\right)}, \qquad \cos(f(\sin x)).$$

Exercice. 4 Quelle est la dérivée de la fonction $x \to \cos(x)$? Quelle est la dérivée de la dérivée ? Et la dérivée de la dérivée de la dérivée. A partir des résultats précédents, proposer une formule générale pour le résultat de la dérivée $n^{ième}$ [a] de la fonction cosinus.

Exercice. 5 Nicolas prend sa voiture pour aller de Toulouse à Carcassonne. La figure ci-dessous indique la distance parcourue au cours du temps



(1) Entre chaque étape $A,\ B,\ C\cdots$ (espacées de 10 minutes), on considère que la courbe est donnée par un segment de droite. Donner pour chaque étape la vitesse de la voiture.

(2) Quelle est la vitesse maximale ? Quelle vitesse aurait-il du adopter pour parcourir la même distance en même temps à vitesse constante ?

(3) Tracer la courbe correspondant à la vitesse en fonction du temps.

(4) Tracer l'accélération en fonction du temps.

Exercice. 6 Soit h la fonction définie par $h(t) = e^{-t}(A\cos(t) + B\sin(t))$ où A et B sont des constantes. Montrer que h vérifie la relation - dite *équation différentielle* - suivante

$$h''(t) + 2h'(t) + 2h(t) = 0.$$

Exercice. 7 [b] Soit f une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[0,1]$. On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\begin{cases} g(x) = f(2x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(x) = f(2x-1) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

A quelle condition sur f la fonction g est-elle continue ? De même, à quelle condition est-elle dérivable ?

a. C'est à dire la dérivée de la dérivée de la ... de la dérivée - on répète n fois.

b. Exercice plus difficile et facultatif.