DÉRIVÉES

NOMBRE DÉRIVÉ

définition

Soit f une fonction définie continue dans un voisinage de x_0 contenant x_0,
f est dérivable en x_0 ssi :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ est finie}$$

cette limite, notée $f'(x_0)$,est appelée nombre dérivé de f en x_0 et on écrit :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

autre formulation:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (x - x_0)[f'(x_0) + \epsilon(x - x_0)] \quad avec \quad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x - x_0) = 0}$$

nombre dérivé à droite , à gauche

si $\lim\limits_{x \to x_0^+} A(x) = l$ $\quad l$ est le nombre dérive à droite noté $f'_d(x_0)$

si $\lim\limits_{x \to x_0^-} A(x) = k$ $\quad k$ est le nombre dérive à gauche noté $f'_g(x_0)$

f est dérivable en $x - 0$ ssi k=l alors $\boxed{f'_d(x_0){=}f'_g(x_0){=}f'(x_0)}$

interprétation

Soient :
$\mathcal{R}$ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé dans le plan
$M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x, f(x))$ deux points du graphe de f
$A(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est la pente de la droite D support de M_0M
Quand $x \to x_0$ $\quad M \to M_0$ $\quad D \to \Delta$
Δ limite de la sécante est tangente en M_0 au graphe de f
Δ a pour pente $f'(x_0)$

$$\boxed{f'(x_0) \text{ est la pente de la tangente en } M_0 \text{ au graphe de f}}$$

FONCTION DÉRIVÉE

définition

Soit $D = [x_0 \in R/f'(x_0) existe]$
on définit la correspondance suivante:

$$\forall x_0 \in D \longrightarrow f'(x_0) \in R$$

cette correspondance définit $\boxed{\text{la fonction dérivée première de f}}$.

fonction dérivée sur un intervalle

f dérivable en x_0 $\forall x_0 \in]a, b[$
f dérivable à droite de a
f d'erivable à gauche de b

OPÉRATIONS sur les DÉRIVÉES

somme $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$

produit $[u(x).v(x)]' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

cas particulier $u(x) = a$ $[a.u(x)]' = a.u'(x)$

quotient $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v(x)^2}$ avec $v(x) \neq 0$

fonction composée: $[f[u(x)]' = f'[u(x)].u'(x)$

cas particulier: $u(x) = ax + b$ $[f(ax + b)]' = af'(ax + b)$

TANGENTE à une COURBE

Soit la courbe d'équation y=f(x)

$M_0(x_0, f(x_0))$ un point du graphe de f

$T(X, Y)$ un point courant de la tangente en M_0 au graphe de f

$f'(x_0)$ la pente de la tangente

$(\vec{V_D} = [1, f'(x_0)]$ est un vecteur directeur de la tangente)

cette tangente a pour équation : $\boxed{Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0)}$

FONCTIONS	DÉRIVÉES
$y = \ x^\alpha$	$y' = \alpha\ x^{\alpha-1}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \tan x$	$y' = \ 1 + \tan^2 x \ = \ \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = \ln x$	$y' = \ \dfrac{1}{x}$
$y = e^x$	$y' = \ e^x$
$y = \mathrm{shx}$	$y' = \mathrm{chx}$
$y = \mathrm{chx}$	$y' = \mathrm{shx}$
$y = \mathrm{thx}$	$y' = \ 1 - \mathrm{th}^2 x \ = \ \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$y = \mathrm{Arcsinx}$	$y' = \ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \mathrm{Arccosx}$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \mathrm{Arctanx}$	$y' = \ \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \mathrm{Argshx}$	$y' = \ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$y = \mathrm{Argchx}$	$y' = \ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$y = \mathrm{Argthx}$	$y' = \ \dfrac{1}{1-x^2}$

fonction composée :

cas affine

$y = f[ax+b]$ $\qquad$ $y' = \ a\ f'[ax+b]$

cas général

$y = f[u(x)]$ $\qquad$ $y' = \ u'(x)\ f'[u(x)]$

DIFFÉRENTIELLES

Avec la notation différentielle de la dérivée $\quad y' \ = \ \dfrac{dy}{dx} \ = \ f'(x)$
on obtient l'écriture suivante pour la fonction différentielle :

différentielle d'une fonction :

$y = f(x)$ $\qquad$ $dy \ = \ f'(x)\ dx$

différentielle d'une fonction composée :

$y = f[u(x)]$ $\qquad$ $dy = f'[u(x)]\ u'(x)\ dx \ = \ f'(u)\ du$