Image, Signal, Simulation

Travaux dirigés
Feuille 5

Exercice 1. Minimisation ℓ^1 et polytopes

Dans cet exercice, nous allons étudier la régularisation avec un terme ℓ^1.

Étant donnée une image vectorisé ou un signal $y \in \mathbb{R}^N$ et une matrice $A \in \mathbb{R}^{N\times P}$ de rang ligne plein, la minimisation ℓ^1 consiste à résoudre

$$(min-\ell^1) : \min_{x\in\mathbb{R}^P} \|Ax-y\|^2 + \lambda\|x\|_1,$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre et $\|.\|$ représente la norme euclidienne.

Le modèle du "minimisation ℓ^1" ci-dessus cherche à approximer y à l'aide de peu de colonnes de A, d'un vecteur x de norme ℓ^1 faible.

(1) Nous nous intéresserons dans un premier temps à un problème intermédiaire, lié à la minimisation ℓ^1 :

$$(P)\left\{\begin{array}{l} \min_{x\in\mathbb{R}^P} \|x\|_1 \\ \textit{sous la contrainte } Ax = u, \end{array}\right. \tag{1}$$

pour $u \in \mathbb{R}^N$.

(a) Monter que le problème (P) ci-dessus admet une solution.

(b) Montrer que la fonction définie pour tout $u \in \mathbb{R}^N$ par

$$\left\{\begin{array}{l} E(u) = \min_{x\in\mathbb{R}^P} \|x\|_1 \\ \textit{sous la contrainte } Ax = u \end{array}\right. \tag{2}$$

est une norme sur l'espace $\mathbb{R}^N$.

(c) En déduire que E est convexe et coercive sur $\mathbb{R}^N$.

(d) On appelle **polytope** *un ensemble de $\mathbb{R}^N$ qui est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini d'éléments de $\mathbb{R}^N$. On rappelle que, si C est fini, son enveloppe convexe* $\mathrm{conv}(C)$ *est définie par*

$$\mathrm{conv}(C) = \left\{ \sum_{x\in C} \lambda_x x, \textit{ tel que } \forall x \in C, \lambda_x \geq 0 \textit{ et } \sum_{x\in C} \lambda_x = 1 \right\}.$$

On note, pour $\tau \geq 0$, l'ensemble de niveau τ de la fonction E

$$\mathcal{L}_E(\tau) = \{u \in \mathbb{R}^N, E(u) \leq \tau\}.$$

Vérifier que

$$\mathcal{L}_E(1) = \mathrm{conv}\left(\{A_i, i = 1..P\} \cup \{-A_i, i = 1..P\}\right),$$

où A_i désigne la $i^{ième}$ colonne de A.

(e) Déduire des questions précédentes que

$$\mathcal{L}_E(\tau) = \tau \,\mathrm{conv}\left(\{A_i, i = 1..P\} \cup \{-A_i, i = 1..P\}\right).$$

(f) Vérifier que pour tout $i \in \{1, \ldots, P\}$

$$E(A_i) \leq 1$$

Montrer que pour toute norme E' sur $\mathbb{R}^N$ telle que,

$$\forall i \in I, E'(A_i) \leq 1$$

on a

$$E'(u) \leq E(u),$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^N$.

(g) Interpréter le résultat de la question précédente, dans le cadre de la régularisation avec E.

(h) On s'intéresse dans cette question au problème de l'unicité de la solution de (P). Pour cela, on considère dans cette question la norme E, sur $\mathbb{R}^3$, définie par le dictionnaire $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\{-1,1\}^3}$.

(i) Vérifier que les ensembles de niveau de E sont des cubes.

(ii) Vérifier que

$$\begin{aligned}(1,0,0) &= \frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{2}(1,-1,-1) \\ &= \frac{1}{2}(1,-1,1) + \frac{1}{2}(1,1,-1)\end{aligned}$$

et que pour tout $\left(\lambda_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}\right)_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\{-1,1\}^3}$ tel que

$$\begin{cases} \sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\{-1,1\}^3} \lambda_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)} = 1 \\ \text{et } \forall (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) \in \{-1,1\}^3, \lambda_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)} \geq 0 \end{cases}$$

on a

$$\sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\{-1,1\}^3} \varepsilon_1 \lambda_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)} \leq 1$$

En déduire que

$$E((1,0,0)) = 1$$

(iii) Déduire de la question précédente que (P) n'a pas forcément une solution unique.

(2) Revenons maintenant à la minimisation ℓ^1.

(a) Montrer que la minimisation ℓ^1 admet une solution.

(b) On considère le problème

$$(P') : \min_{u\in\mathbb{R}^N} \|u - v\|^2 + \lambda E(u),$$

où E est la norme définie par (2).

Déduire de la question 1c que (P') a une solution. Montrer que cette solution est unique.

(c) Vérifier que :

- *Si u^* est solution de (P') et x^* est solution de (P), en u^*, alors x^* est solution de ($min - \ell^1$).*
- *Inversement : Pour toute solution x^* de ($min - \ell^1$), x^* est solution de (P), en Ax^*. De plus, Ax^* est l'unique solution de (P').*

(d) Déduire de la question 1h que la minimisation ℓ^1 n'a pas forcément une solution unique.

(e) Montrer que pour deux solutions x^1, x^2 de la minimisation ℓ^1', on a

$$Ax^1 = Ax^2.$$