Image, Signal, Simulation

Travaux dirigés
Feuille 4

Exercice 1.

Pour $N \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}^{N^2}$ et $v \in \mathbb{R}^{N^2}$, on considère le modèle de Horn-Shunck consistant à minimiser en $t = (t^1, t^2) \in (\mathbb{R}^{N^2})^2$

$$E(t) = \sum_{m,n=1}^{N} \Big[(u_{m,n} + \langle \nabla u_{m,n}, t_{m,n} \rangle - v_{m,n})^2 + \lambda (|\nabla t^1_{m,n}|^2 + |\nabla t^2_{m,n}|^2) \Big] \tag{1}$$

où $\lambda \geq 0$, ∇ est l'opérateur de différence finie habituel, $|.|$ est la norme Euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et où l'on note $t_{m,n} = (t^1_{m,n}, t^2_{m,n}) \in \mathbb{R}^2$.

Le but de cet exercice est de montrer que si il existe (m,n) tel que $\nabla u_{m,n} \neq (0,0)$ le modèle de Horn-Shunck est coercif. La preuve est décomposée en plusieurs questions intermédiaires, ci-dessous.

(1) *On considère des espaces vectoriels Euclidiens U, V, W, deux opérateurs linéaires $A : U \longrightarrow V$ et $B : U \longrightarrow W$. On suppose que $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B) = \{0\}$.*

 (a) *En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel U' de U tel que $U = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Ker}(B) \oplus U'$.*

 Dans la suite, pour tout $x \in U$, on notera $x_{|\mathrm{Ker}(A)} \in \mathrm{Ker}(A)$, $x_{|\mathrm{Ker}(B)} \in \mathrm{Ker}(B)$ et , $x_{|U'} \in U'$ les uniques vecteurs tels que $x = x_{|\mathrm{Ker}(A)} + x_{|\mathrm{Ker}(B)} + x_{|U'}$.

 (b) *Montrer que la restriction de A à $\mathrm{Ker}(B) \oplus U'$ est injective et admettez que, de même, la restriction de B à $\mathrm{Ker}(A) \oplus U'$ est injective.*

 (c) *En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in U$*

$$\|Ax\| \geq \alpha \|x_{|\mathrm{Ker}(B)} + x_{|U'}\| \qquad \textit{et admettre que} \qquad \|Bx\| \geq \beta \|x_{|\mathrm{Ker}(A)} + x_{|U'}\|.$$

 (d) *En déduire que pour tout $x \in U$, tout $y \in V$, et tout $\lambda > 0$*

$$\|Ax+y\| + \lambda\|Bx\| \geq \alpha \|x_{|\mathrm{Ker}(B)} + x_{|U'}\| - \|y\| \qquad \textit{et} \qquad \|Ax+y\| + \lambda\|Bx\| \geq \lambda\beta \|x_{|\mathrm{Ker}(A)} + x_{|U'}\|$$

 et donner une valeur de $\alpha' > 0$ pour laquelle vous monterez que

$$\|Ax+y\| + \lambda\|Bx\| \geq \alpha' \max(\|x_{|\mathrm{Ker}(B)} + x_{|U'}\|, \|x_{|\mathrm{Ker}(A)} + x_{|U'}\|) - \|y\|. \tag{2}$$

 (e) *Montrer que pour tout $x \in U$,*

$$\|x\| \leq 2\max(\|x_{|\mathrm{Ker}(A)} + x_{|U'}\|, \|x_{|\mathrm{Ker}(B)}\|) \qquad \textit{et} \qquad \|x\| \leq 2\max(\|x_{|\mathrm{Ker}(B)} + x_{|U'}\|, \|x_{|\mathrm{Ker}(A)}\|). \tag{3}$$

(f) *Vérifier que l'opérateur*

$$\begin{array}{rcl} C : \mathrm{Ker}(B) \oplus U' & \longrightarrow & U \\ x_{|\,\mathrm{Ker}(B)} + x_{|U'} & \longmapsto & x_{|\,\mathrm{Ker}(B)} \end{array}$$

et bien défini et linéaire. En déduire une valeur de $\alpha' > 0$ *tell que pour tout* $x \in U$, $\|x_{|\,\mathrm{Ker}(B)}\| \leq \alpha' \|x_{|\,\mathrm{Ker}(B)} + x_{|U'}\|$.
Vous admettrez que, de même, il existe $\beta' > 0$ *tel que pour tout* $x \in U$, $\|x_{|\,\mathrm{Ker}(A)}\| \leq \beta' \|x_{|\,\mathrm{Ker}(A)} + x_{|U'}\|$ *et, en utilisant* (3), *en déduirez qu'il existe* $\beta'' > 0$ *(que vous préciserez) tel que pour tout* $x \in U$,

$$\|x\| \leq \beta'' \max(\|x_{|\,\mathrm{Ker}(A)} + x_{|U'}\|, \|x_{|\,\mathrm{Ker}(B)} + x_{|U'}\|).$$

(g) *Déduire de cette dernière inégalité et de* (2) *qu'il existe* $\alpha'' > 0$ *(que vous préciserez) tel que*

$$\|Ax + y\| + \lambda \|Bx\| \geq \alpha'' \|x\| - \|y\|.$$

(h) *En déduire que sous les hypothèses de la question 1, la fonction* $x \longmapsto \|Ax + y\|^2 + \lambda \|Bx\|^2$ *est coercive.*

(2) *On va enfin montrer le résultat principal de l'exercice.*

(a) *Définir les espaces vectoriels* U, V, W, *l'élément* $y \in V$ *et les opérateurs* A *et* B *tels que pour tout* $t \in (\mathbb{R}^{N^2})^2$

$$E(t) = \|At + y\|^2 + \lambda \|Bt\|^2$$

(b) *Montrer que si il existe* (m,n) *tel que* $\nabla u_{m,n} \neq (0,0)$ *alors* $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B) = \{0\}$.

(c) *En déduire que, si il existe* (m,n) *tel que* $\nabla u_{m,n} \neq (0,0)$, *le modèle de Horn-Shunck* (1) *est coercif.*