Image, Signal, Simulation

Travaux dirigés
Feuille 3

Exercice 1. Méthode de Horn-Schunck

On considère le modèle de Horn et Schunck. Celui-ci consiste à minimiser un champ de vecteurs défini par $t \in (\mathbb{R}^2)^{N^2}$ permettant de faire la correspondance entre deux images u^1 et $u^2 \in \mathbb{R}^{N^2}$. Pour cela, on minimise l'énergie

$$E(t) = \sum_{m,n=1}^{N} \left(u^1_{m,n} + \langle \nabla u^1_{m,n}, t_{m,n}\rangle - u^2_{m,n}\right)^2 + \lambda \left(|\nabla t^1_{m,n}|^2 + |\nabla t^2_{m,n}|^2\right), \tag{1}$$

avec $t_{m,n} = (t^1_{m,n}, t^2_{m,n})$

$$\nabla v_{m,n} = \left(v_{m,n} - v_{m-1,n}\ ,\ v_{m,n} - v_{m,n-1}\right),$$

où, suivant le cas, v désigne l'image u^1 ou les composantes t^1 ou t^2 de t.

(1) Ecrire E sous une forme $E(t) = \|Ht - (u^2 - u^1)\|^2 + \lambda \left(\|\nabla t^1\|^2 + \|\nabla t^2\|^2\right)$, où H est un opérateur linéaire que vous préciserez.

(2) Calculer les opérateurs adjoints H^* et ∇^*.

(3) Calculer le gradient $\nabla E(t)$.

Exercice 2. Recalage avec un terme ℓ^1

On considère le modèle de recalage consistant à minimiser un champ de vecteurs défini par $t \in (\mathbb{R}^2)^{N^2}$ et permettant de faire la correspondance entre deux images u^1 et $u^2 \in \mathbb{R}^{N^2}$. Pour cela, on minimise l'énergie

$$E(t) = \sum_{m,n=1}^{N} \varphi_\varepsilon\left(\left(u^1_{m,n} + \langle \nabla u^1_{m,n}, t_{m,n}\rangle - u^2_{m,n}\right)^2\right) + \lambda \varphi_\varepsilon\left(|\nabla t^1_{m,n}|^2 + |\nabla t^2_{m,n}|^2\right), \tag{2}$$

avec,

$$\varphi_\varepsilon(t) = \sqrt{t + \varepsilon^2}$$

$t_{m,n} = (t^1_{m,n}, t^2_{m,n})$

$$\nabla v_{m,n} = \left(v_{m,n} - v_{m-1,n}\ ,\ v_{m,n} - v_{m,n-1}\right),$$

où, suivant le cas, v désigne l'image u^1 ou les composantes t^1 ou t^2 de t.

(1) Calculer le gradient partiel $\nabla_{t^1} E(t)$, suivant la composante t^1.

Exercice 3. Convergence d'un algorithme de pénalisation
Nous considérons une méthode d'optimisation pour dé-quantifier des images. Pour $\tau > 0$, nous considérerons la quantification d'une image $u \in \mathbb{R}^{N^2}$ définie par l'image $v \in \mathbb{R}^{N^2}$, de coordonnées:

$$v_{i,j} = q_\tau(u_{i,j}),$$

pour $(i,j) \in \{0,\dots,N-1\}^2$ avec pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$q_\tau(t) = \tau \left[\frac{t}{\tau} + \frac{1}{2}\right]$$

où $[x]$ représente la partie entière de x (i.e.: le plus grand entier plus petit que x). On note Q, l'opérateur de quantification et on a donc

$$v = Q(u).$$

Ainsi, on a perdu des niveaux de gris, le résultat v présente de larges zones où sa valeur est constante. Ce qui n'est pas agréable à voir.

On note

$$\mathcal{C} = \{w \in \mathbb{R}^{N^2}, Q(w) = v\}$$

Nous proposons donc le problème d'optimisation consistant à

$$(P) : \begin{cases} \text{minimiser } E(w) \\ \text{sous la contrainte } w \in \overline{\mathcal{C}}, \end{cases}$$

pour une énergie E bien choisie ($\overline{\mathcal{C}}$ désigne la fermeture de $\mathcal{C}$).

Nous considérons l'énergie définie par

$$E(w) = \sum_{i,j=0}^{N-1} |\nabla w_{i,j}|^2$$

pour $w \in \mathbb{R}^{N^2}$, avec

$$\nabla w_{i,j} = \begin{pmatrix} (D_x w)_{i,j} \\ (D_y w)_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{i+1,j} - w_{i,j} \\ w_{i,j+1} - w_{i,j} \end{pmatrix}$$

pour $(i,j) \in \{0,\dots,N-1\}^2$ (on supposera que w est périodisée en dehors de son support).

On approxime une solution de (P) par une méthode de pénalisation. Plus précisément, on minimise l'énergie

$$F_\lambda(w) = E(w) + \lambda \sum_{i,j=0}^{N-1} \varphi_\tau(w_{i,j} - v_{i,j}),$$

où, pour $t \in \mathbb{R}$ $\varphi_\tau(t) = \left(sup\left(|t| - \frac{\tau}{2}, 0\right)\right)^2$.

(1) Vérifier que F_λ admet bien une solution u_λ.

(2) Vérifier que l'on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (une suite de minimiseurs des F_n, pour $n \in \mathbb{N}$), une sous-suite convergeant dans $\mathbb{R}^{N^2}$.

(3) Vérifier que tout point d'accumulation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution de (P).

(4) En déduire que, si l'on note $\mathcal{S}$, l'ensemble des solutions de (P), et $d(w,\mathcal{S}) = \inf_{s\in\mathcal{S}} \|w-s\|$ (la distance de w à l'ensemble $\mathcal{S}$), on a $\lim_{n\to\infty} d(u_n,\mathcal{S}) = 0$.