Image, Signal, Simulation

Travaux dirigés
Feuille 2

Exercice 1. Adjoint de l'opérateur d'échantillonnage
On considère deux entiers N et K, ainsi que l'opérateur d'échantillonnage E défini par

$$E: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{(KN)^2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N^2} \\ (w_{m,n})_{1\le m,n\le KN} & \longmapsto & (u_{m,n})_{1\le m,n\le N} \end{array}$$

où, pour tout $(m,n) \in \{1,\dots,N\}^2$

$$u_{m,n} = w_{Km,Kn}.$$

On considère aussi l'opérateur

$$C: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{(KN)^2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{(KN)^2} \\ (w_{m,n})_{1\le m,n\le KN} & \longmapsto & (v_{m,n})_{1\le m,n\le KN} \end{array}$$

où, pour tout $(m,n) \in \{1,\dots,KN\}^2$

$$v_{m,n} = \sum_{k,l=1}^{K} w_{m+k,n+l}.$$

(1) Calculer l'opérateur adjoint E^* de E.

(2) Calculer l'opérateur adjoint C^* de C.

(3) En déduire l'opérateur adjoint de $E \circ C$.

Exercice 2. Adjoint de l'opérateur de convolution
On considère un entier N, ainsi que l'opérateur H de convolution avec le noyau $h \in \mathbb{R}^{N^2}$. Précisément, on a

$$H: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{N^2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N^2} \\ w & \longmapsto & Hw \end{array}$$

où, pour tout $(m,n) \in \{1,\dots,N\}^2$

$$(Hw)_{m,n} = (h * w)_{m,n}.$$

On rappelle que

$$(h*w)_{m,n} = \sum_{k,l=1}^{N} h_{m-k,n-l} w_{k,l}.$$

(1) Calculer l'opérateur adjoint H^* de H.

(2) En déduire la forme de l'opérateur adjoint de l'opérateur de différence finie:

$$D: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{N^2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N^2} \\ (w_{m,n})_{1\le m,n\le N} & \longmapsto & (w_{m+1,n} - w_{m-1,n})_{1\le m,n\le N} \end{array}$$

Exercice 3. Interpolation d'une zone manquante

On considère un entier N, un ensemble $C \subset \{1,\dots,N\}^2$ ainsi que l'opérateur M de masquage des pixels de C. On a

$$M : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{N^2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N^2} \\ w & \longmapsto & Mw \end{array}$$

où, pour tout $(m,n) \in \{1,\dots,N\}^2$

$$(Mw)_{m,n} = \begin{cases} w_{m,n} & \text{, si } (m,n) \notin C, \\ 0 & \text{, sinon.} \end{cases}$$

(1) Calculer l'opérateur adjoint M^* de M.

(2) Donner la forme du gradient $\nabla D(w)$ de l'énergie D, définie pour tout $w \in \mathbb{R}^{N^2}$ par

$$D(w) = \|Mw - u\|^2$$

où u est une image.

(3) Que vaut le gradient $\nabla D(w)$ aux pixels $(m,n) \in C$?

(4) On considère une stratégie d'optimization

$$w^* \in \mathrm{Argmin}_{w \in \mathbb{R}^{N^2}} \; R(w) + \lambda D(w),$$

où R est un critère de régularité et $\lambda > 0$.

Dire, qualitativement, l'influence des valeurs $w^*_{m,n}$, pour $(m,n) \in C$, sur les termes $D(w)$ et $R(w)$ (où R est par exemple la variation totale ou la semi-norme H^1).

Exercice 4. Projection sur un hypercube

On considère des images (vectorisée) ou des signaux vivant dans un espace Euclidien $\mathbb{R}^N$, pour $N > 0$. On connaît $u \in \mathbb{R}^N$ et on veut calculer explicitement pour $v \in \mathbb{R}^N$ un minimiseur de

$$\begin{cases} \mathrm{Argmin}_{w \in \mathbb{R}^N} \|w - v\|^2 \\ \text{sous la contrainte } |w_i - u_i| \leq \tau, \text{ pour tout } i = 1..N. \end{cases} \tag{1}$$

Pour cela, on considère pour chaque $i \in \{1,\dots,N\}$ le minimiseur w_i^* de

$$\begin{cases} \mathrm{Argmin}_{w \in \mathbb{R}} (w - v_i)^2 \\ \text{sous la contrainte } |w - u_i| \leq \tau. \end{cases} \tag{2}$$

(1) Montrer que la solution de (2) est définie par

$$w_i^* = \begin{cases} u_i + \tau & \text{, si } v_i > u_i + \tau \\ v_i & \text{, si } |v_i - u_i| \leq \tau \\ u_i - \tau & \text{, si } v_i < u_i - \tau \end{cases}$$

(2) Montrer que $w^* = (w_i^*)_{i=1..N}$ vérifie les contraintes de (1).

(3) Montrer que pour tout w satisfaisant les contraintes de (1) on a

$$\|w^* - v\|^2 \leq \|w - v\|^2$$

(4) Déduire des deux questions précédentes que w^* est solution de (1).