Image, Signal, Simulation

Travaux dirigés
Feuille 1

Exercice 1. Calcul différentiel
On considère un entier N et des images dans $\mathbb{R}^{N^2}$. Dans cet exercice, on considère un opérateur linéaire

$$H: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^M & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N^2} \\ x & \longmapsto & Hx \end{array}$$

où $M \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on sait calculer H et son adjoint. On considère aussi une image $w_0 \in \mathbb{R}^{N^2}$ et un nombre $\tau \in \mathbb{R}$.

Pour chacune des fonctions ci-dessous:
— décrire ou dessiner la fonction étudiée;
— préciser sur quel domaine le gradient existe;
— calculer le gradient.

(1)
$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{N^2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \langle w_0, w\rangle \end{array}$$

(2)
$$f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{N^2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & (\langle w_0, w\rangle)^2 \end{array}$$

(3)
$$f_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{N^2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \max(\langle w_0, w\rangle - \tau, 0)^2 \end{array}$$

(4)
$$f_4: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{N^2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \|w\|^2 \end{array}$$

(5)
$$f_5: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|Hx - w_0\|^2 \end{array}$$

(6)
$$f_6: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{N^2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \|w\|_p^p \end{array}$$

(7)
$$f_7: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{N^2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \|w\|_p \end{array}$$

Exercice 2. Restauration avec une régularisation H^1

En TP, nous comparerons les performances des algorithmes vus en cours. Pour cela, nous considérerons un problème de débruitage: notre donnée est de la forme

$$v = u + b,$$

où $u \in \mathbb{R}^{N^2}$ est l'image que l'on cherche, $v \in \mathbb{R}^{N^2}$ est la donnée à notre disposition et $b \in \mathbb{R}^{N^2}$ est la réalisation d'un bruit blanc Gaussien.

Le modèle que l'on cherchera à résoudre consiste à minimiser l'énergie

$$E(w) = \sum_{i,j=0}^{N-1} |\nabla w_{i,j}|^2 + \lambda \sum_{i,j=0}^{N-1} (w_{i,j} - v_{i,j})^2,$$

pour $w \in \mathbb{R}^{N^2}$ et $\lambda \geq 0$, avec

$$\nabla w_{i,j} = \begin{pmatrix} (D_x w)_{i,j} \\ (D_y w)_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{i+1,j} - w_{i,j} \\ w_{i,j+1} - w_{i,j} \end{pmatrix}$$

pour $(i, j) \in \{0, \ldots, N-1\}^2$ (on supposera que w est périodisée en dehors de son support).

(1) Calculer les opérateurs adjoints, D_x^* et D_y^*, de D_x et D_y.

(2) Calculer B, l'opérateur linéaire allant de $\mathbb{R}^{N^2}$ dans lui-même, $c \in \mathbb{R}^{N^2}$ et $C(v)$ ne dépendant pas de w, tels que pour tout $w \in \mathbb{R}^{N^2}$,

$$E(w) = \langle Bw, w\rangle + \langle c, w\rangle + C(v),$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^{N^2}$.

(3) Vérifier que B est un opérateur auto-adjoint et qu'il s'agit d'une convolution. Donner le noyau h correspondant.

(4) Vérifier que, si l'on note h le noyau de convolution correspondant à B, sa transformée de Fourier discrète vaut

$$\hat{h}_{k,l} = \lambda + 4 - 2\left(cos(\frac{2\pi k}{N}) + cos(\frac{2\pi l}{N})\right).$$

NB : On sait qu'une convolution avec un noyau h est diagonale dans la base de Fourier. De plus, la transformée de Fourier de h correspond aux valeurs propres de la convolution avec h.

(5) Calculer le gradient et le Hessien de E : $\nabla E(w)$ et $\nabla^2 E(w)$.

(6) En déduire des bornes $\alpha > 0$ et $L > \alpha$ telles que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^{N^2}$ et tout $w \in \mathbb{R}^{N^2}$

$$\alpha \|w\|_2^2 \leq \left\langle \nabla^2 E(u_0) w, w \right\rangle \leq L \|w\|_2^2.$$

Quel est l'intérêt de ces bornes lorsque l'on minimise E (faire le lien avec les théorèmes du cours)?

(7) Déduire de la question 4 un algorithme utilisant la transformée de Fourier permettant de calculer l'image minimisant E.