
Analyse par Ondelettes

Cours de la formation

Master 2
IMAT

Ingénierie Mathématique
à Toulouse

Cours et TP : F. Malgouyres, Francois.Malgouyres@math.univ-toulouse.fr

<http://www.math.univ-toulouse.fr/~fmalgouy/enseignement/ondelettes.html>

Table des matières

Table des matières	3
1 Rappels	5
1.1 Quelques sommes particulières	5
1.1.1 Des changements de variables	5
1.1.2 Une somme finie importante	5
1.2 Sommes d'une suite périodique	6
2 La création de l'image numérique	9
2.1 Images numériques	9
2.2 La convolution	10
2.2.1 De fonctions analogiques	10
2.2.2 De suites finies	11
2.3 Le fenêtrage	13
2.4 L'échantillonnage	13
2.5 Le bruit	14
2.6 La quantification	15
2.7 Autres dégradations	15
2.8 Exemple	16
3 La transformée de Fourier	21
3.1 D'une image analogique	21
3.1.1 Définition et premières propriétés	21
3.1.2 Exemple	22
3.1.3 Fourier inverse pour des images analogiques	23
3.1.4 Convolution et transformée de Fourier	23
3.1.5 Effet de Gibbs	24
3.1.6 Principe d'incertitude de Heisenberg	25
3.2 D'une suite finie	26
3.2.1 La Fast Fourier Transform (FFT)	27
3.2.2 Convolution et transformée de Fourier	30
3.2.3 Échantillonnage et transformée de Fourier	33
3.2.4 Théorème d'échantillonnage de Shannon	37
3.2.5 Bruit et transformée de Fourier	41

4	Quelle base pour représenter des images	43
4.1	Fourier : une base parmi d'autres	43
4.2	Compressibilité et erreur d'approximation	44
4.3	Compressibilité et erreur d'estimation	47
4.3.1	Deux estimateurs oracles	47
4.4	Conclusion sur la compressibilité	49
5	Bases de cosinus et cosinus locaux	51
5.1	Les cosinus	51
5.2	Les cosinus locaux	53
6	Bases d'ondelettes discrètes	55
6.1	Objectif	55
6.2	Des bancs de filtres aux ondelettes, en dimension 1	55
6.3	Les ondelettes discrètes en dimension 1	58
6.3.1	Ondelettes biorthogonales	58
6.3.2	Ondelettes orthogonales	60
6.3.3	Bases d'ondelettes de niveau quelconque	61
6.3.4	Localisation en espace des éléments de la base d'ondelettes	62
6.3.5	Localisation fréquentielle des éléments de la base d'ondelettes	63
6.4	Les ondelettes discrètes en dimension 2	65
6.5	Choisir une ondelette	67
6.5.1	Le nombre de moments nuls	67
6.5.2	La taille du support de l'ondelette	70
6.5.3	Conclusion	71
7	Les paquets d'ondelettes	73
7.1	Principe des paquets d'ondelettes en dimension 1	73
7.2	Les arbres de paquets d'ondelettes	73
7.3	Localisation des paquets d'ondelettes	76
7.3.1	La localisation spatiale	76
7.3.2	La localisation fréquentielle	76
7.4	Le passage aux dimensions 2 et plus	78
7.5	D'autres bases	78
7.6	Les dictionnaires de paquets d'ondelettes	78
8	La représentation dans un dictionnaire	85
8.1	Introduction	85
8.2	Notations matricielle des dictionnaires	89
8.2.1	Introduction	89
8.2.2	Le cas des bases	91
8.2.3	L'union de bases	92
8.3	La minimisation l^1	92
8.4	Les algorithmes de type "Orthogonal Matching Pursuit"	92
	Bibliographie	95

Chapitre 1

Rappels

1.1 Quelques sommes particulières

1.1.1 Des changements de variables

Pour un ensemble $E \subset \mathbb{Z}$ (ou dans \mathbb{Z}^2) et pour une suite de nombres $(a_e)_{e \in E} \in \mathbb{C}^E$, la valeur de la somme

$$\sum_{e \in E} a_e$$

ne dépend évidemment pas de notre façon de décrire les éléments de E . Ainsi par exemple, pour $E \subset \mathbb{Z}$, on a

$$E = E_1 \cup E_2,$$

où

$$E_1 = E \cap \{2n \in \mathbb{Z} | n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad E_2 = E \cap \{2n+1 \in \mathbb{Z} | n \in \mathbb{Z}\}.$$

On a donc aussi

$$\sum_{e \in E} a_e = \sum_{e \in E_1} a_e + \sum_{e \in E_2} a_e.$$

Les égalités suivantes seront utilisés abondamment durant le cours :

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $(a_n)_{1 \leq n \leq N} \in \mathbb{C}^N$:

$$\sum_{n=1}^{2N} a_n = \sum_{n=1}^N a_{2n-1} + \sum_{n=1}^N a_{2n}.$$

Pour tout $K \in \mathbb{N}$, tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $(a_n)_{1 \leq n \leq N} \in \mathbb{C}^{KN}$:

$$\sum_{n=1}^{KN} a_n = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^K a_{Kn+k}.$$

1.1.2 Une somme finie importante

Si $a \neq 1$ et $N \in \mathbb{N}$, on a la propriété suivante :

$$\sum_{k=1}^N a^k = \frac{a^{N+1} - a}{a - 1}.$$

Cette égalité se déduit simplement du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 (a-1) \sum_{k=1}^N a^k &= a(a^N + a^{N-1} + \dots + a^2 + a) \\
 &\quad - (a^N + a^{N-1} + \dots + a^2 + a), \\
 &= a^{N+1} + a^N + \dots + a^2, \\
 &\quad - a^N - \dots - a^2 - a, \\
 &= a^{N+1} - a.
 \end{aligned}$$

On a en particulier lorsque a est une racine $N^{\text{ième}}$ de l'unité (i.e. telle que $a^N = 1$) différente de 1 :

$$\sum_{k=1}^N a^k = \frac{a^{N+1} - a}{a - 1} = \frac{a - a}{a - 1} = 0.$$

Il n'est pas inutile de rappeler à ce stade que les racines $N^{\text{ième}}$ de l'unité sont toutes de la forme

$$e^{-2i\pi \frac{m}{N}}, \text{ pour } m \in \{0, \dots, N-1\}.$$

1.2 Sommes d'une suite périodique

En dimension 1, on considère $N \in \mathbb{N}$ avec $N > 0$ et une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est périodique de période N . Cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$v_n = v_{n+N}.$$

On obtient immédiatement que

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{Z}, \text{ et tout } n \in \mathbb{Z}, \quad v_n = v_{n+kN}.$$

Si l'on note $n[N]$ (que l'on lit n modulo N) le reste de la division Euclidienne¹ de n par N , on a finalement

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, \quad v_n = v_{n[N]}.$$

Ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est entièrement décrite par ses N valeurs d'indice $n \in \{0, \dots, N-1\}$; plus généralement par ses valeurs sur une période quelconque. Dit autrement, on peut périodiser un élément $(v_n)_{0 \leq n \leq N-1} \in \mathbb{C}^N$ en posant

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, v_n = v_{n[N]},$$

pour retrouver un élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Formellement, on devrait avoir deux notations différentes pour désigner l'élément de \mathbb{C}^N et son périodisé dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, mais nous ne le ferons pas pour éviter d'alourdir les notations. Essentiellement toutes les suites que nous rencontrerons dans ce cours seront supposées périodiques ou périodisées.

Pour une telle suite périodique, on a la propriété suivante :

1. La division Euclidienne de n par N est la donnée de l'unique couple formé d'un quotient $q \in \mathbb{Z}$ et d'un reste $r \in \{0, \dots, N-1\}$ tels que

$$n = qN + r.$$

Proposition 1 Pour $N \in \mathbb{N}$ et pour toute suite périodique $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de période N , on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=k}^{k+N-1} v_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n.$$

Preuve. Pour montrer cette propriété, on considère le quotient $q \in \mathbb{Z}$ et le reste $r \in \{0, \dots, N-1\}$ de la division Euclidienne de k par N . On a donc $k = qN + r$. On a alors que si $r \neq 0$

$$k \leq qN + N - 1 \quad \text{et} \quad qN + N \leq k + N - 1$$

et on peut décomposer

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{k+N-1} v_n &= \sum_{n=k}^{qN+N-1} v_n + \sum_{n=qN+N}^{k+N-1} v_n, \\ &= \sum_{n=k}^{qN+N-1} v_n + \sum_{n=qN}^{k-1} v_{n+N} && \text{par changement de variable,} \\ &= \sum_{n=qN}^{k-1} v_n + \sum_{n=k}^{qN+N-1} v_n && \text{par périodicité,} \\ &= \sum_{n=qN}^{qN+N-1} v_n \end{aligned}$$

Si $r = 0$, on a aussi trivialement cette égalité :

$$\sum_{n=k}^{k+N-1} v_n = \sum_{n=qN}^{qN+N-1} v_n.$$

Finalement, on a quelle que soit la valeur de r

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{k+N-1} v_n &= \sum_{n=qN}^{qN+N-1} v_n \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} v_{n+qN}, && \text{par changement de variable,} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} v_n, && \text{par périodicité.} \end{aligned}$$

□

Cette proposition dit simplement que lorsque l'on fait la somme des éléments d'une suite périodique sur une période, le choix de la période n'a pas d'importance.

On a bien sûr le même résultats en dimension 2, 3 etc. Par exemple pour la dimension 2, on dit qu'une suite $(v_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ est (M, N) périodique, pour $(M, N) \in \mathbb{N}^2$, si et seulement si

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad v_{m,n} = v_{m+M,n} = v_{m,n+N} = v_{m+M,n+N}.$$

On a bien sûr des propriétés analogues à celles décrites ci-dessus pour les suites périodiques en dimension 1. On a aussi :

Proposition 2 Pour $(M, N) \in \mathbb{N}^2$ et pour toute suite périodique $(v_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ de période (M, N) , on a pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$\sum_{m=k_1}^{k_1+M-1} \sum_{n=k_2}^{k_2+N-1} v_{m,n} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} v_{m,n}.$$

Preuve. Pour montrer cette proposition, il suffit d'appliquer deux fois la Proposition 1. On a en effet immédiatement, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=k_2}^{k_2+N-1} v_{m,n} = \sum_{n=0}^{N-1} v_{m,n},$$

car $(v_{m,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ est dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ et est N périodique. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{m=k_1}^{k_1+M-1} \sum_{n=k_2}^{k_2+N-1} v_{m,n} &= \sum_{m=k_1}^{k_1+M-1} \sum_{n=0}^{N-1} v_{m,n}, \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=k_1}^{k_1+M-1} v_{m,n}. \end{aligned}$$

A nouveau, comme quelque-soit la valeur de $n \in \mathbb{Z}$, la suite $(v_{m,n})_{m \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est M périodique, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $k_1 \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{m=k_1}^{k_1+M-1} v_{m,n} = \sum_{m=0}^{M-1} v_{m,n}.$$

On a donc bien finalement pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$\sum_{m=k_1}^{k_1+M-1} \sum_{n=k_2}^{k_2+N-1} v_{m,n} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} v_{m,n}.$$

□

Chapitre 2

La création de l'image numérique

La création d'une image numérique est faite par un appareil de mesure (scanner, appareil photo numérique, webcam, barrette CCD, ...). Malgré la diversité des appareils de mesure, elle s'écrit (à quelques approximations près) sous la forme d'une unique équation mathématique. Ce sont les éléments mathématiques utiles à l'écriture et à la compréhension de cette équation que nous allons introduire ici. Commençons par définir ce qu'est une image numérique.

2.1 Images numériques

Une image numérique est définie sur une grille à deux dimensions. Les éléments de cette grille sont appelés des *pixels*. Ainsi, une image est définie sur un ensemble

$$\{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\},$$

où M et N sont des entiers strictement positifs.

De plus, à chaque pixel, l'image attribue une couleur. Il existe plusieurs façons de représenter une couleur (système RVB, HSV, niveaux de gris, ...). Le point commun entre ces méthodes est de représenter une couleur par un ou plusieurs nombres (généralement trois). Chacun d'entre eux représentant la composante de notre couleur dans la direction d'une couleur primaire de référence.

Afin de simplifier les notations dans la suite du cours, nous ne travaillerons que sur des images noir et blanc. Ceci induit une simplification notable, puisqu'une couleur, que l'on appellera maintenant *niveau de gris*, n'est plus représentée que par un seul nombre. La convention habituelle veut que la valeur 0 corresponde au **noir** et que la valeur 255 corresponde au **blanc**. Les valeurs intermédiaires donnent les différentes teintes de gris. Il nous faut par ailleurs coder ces niveaux de gris. Pour ce faire, on doit utiliser un nombre fini de niveaux de gris. On a ainsi un ensemble fini $Col \subset \mathbb{R}$ représentant nos couleurs. Par exemple, pour des niveaux de gris codés sur 8 bits, on a $Col = \{0, 1, \dots, 255\}$.

Ainsi, une image numérique est donnée par une suite

$$\begin{aligned} \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\} &\longrightarrow Col \\ (m, n) &\longrightarrow u_{m,n} \end{aligned}$$

Dans la suite, nous utiliserons indifféremment les termes *image*, *fonction* et *suite* pour désigner une image numérique. Nous précisons qu'une image ou une fonction n'est pas numérique en la qualifiant d'*analogique*. De plus, nous supposerons que nos images sont carrées. On a ainsi $M = N$.

2.2 La convolution

Tous les appareils de mesure commencent par faire un “moyennage”, sur un voisinage d’un pixel, avant d’attribuer cette valeur au pixel. Ce moyennage ne dépend pas (on supposera en tout cas que cette dépendance, si elle existe, est négligeable) du pixel considéré. Mathématiquement, cette opération est connue sous le nom de convolution. C’est l’objet de ce chapitre.

2.2.1 De fonctions analogiques

Pour simplifier, nous ne considérerons que des fonctions, dont le module est *intégrable*¹, définies sur \mathbb{R}^2 . Ces fonctions représentent des images analogiques. On notera $L^1(\mathbb{R}^2)$ l’ensemble des fonctions de module intégrable sur \mathbb{R}^2 .

Définition 1 Pour deux fonctions h et v dans $L^1(\mathbb{R}^2)$, on note $h * v$ le produit de convolution de h par v et on le définit par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, h * v(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x - x', y - y') v(x', y') dx' dy'.$$

Il s’agit donc d’une fonction (il n’est pas très difficile de voir qu’elle est aussi dans $L^1(\mathbb{R}^2)$).

L’intuition qu’il faut avoir de $h * v(x, y)$ est bien celle d’un “moyennage” de v au voisinage de (x, y) . Par exemple, si l’on prend $h(x, y) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2}(x, y)$, on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} h * v(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x - x', y - y') v(x', y') dx' dy', \\ &= \int_{y - \frac{1}{2}}^{y + \frac{1}{2}} \int_{x - \frac{1}{2}}^{x + \frac{1}{2}} v(x', y') dx' dy', \end{aligned} \quad (2.1)$$

car (par exemple), on a bien

$$-\frac{1}{2} \leq x - x' \leq \frac{1}{2} \quad \text{si et seulement si} \quad x - \frac{1}{2} \leq x' \leq x + \frac{1}{2}.$$

Il s’agit bien de la moyenne de v sur un carré de côté 1, centré en (x, y) . Modifier le support de h revient à changer le support sur lequel on fait la moyenne et modifier les valeurs de h revient à ajouter une pondération (certains points du voisinage de (x, y) comptant plus que d’autres). Il est important de noter que le moyennage ne dépend que de h et reste le même quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle h le *noyau de convolution*. En général, pour que la convolution soit vraiment un moyennage, on prend h tel que

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) dx dy = 1$$

Proposition 3 Pour $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$, l’opérateur de convolution avec h est un opérateur linéaire.

Preuve. On a bien en effet, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tout $u, v \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} h * (\alpha u + \beta v)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x - x', y - y') (\alpha u + \beta v)(x', y') dx' dy' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x - x', y - y') (\alpha u(x', y') + \beta v(x', y')) dx' dy' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \alpha h(x - x', y - y') u(x', y') + \beta h(x - x', y - y') v(x', y') dx' dy' \\ &= \alpha h * u(x, y) + \beta h * v(x, y) \end{aligned}$$

1. Par intégrable, on veut dire que l’intégrale, sur son domaine de définition, du module de la fonction existe.

□

On a aussi, si l'on note $\tau_{(k,l)}$ l'opérateur de translation défini pour tout $(k,l) \in \mathbb{R}^2$ par

$$(\tau_{(k,l)}v)(x,y) = v(x-k, y-l) :$$

Proposition 4 Pour tout $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$, l'opérateur de convolution avec h est invariant par translation : Pour tout $v \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et tout $(k,l) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$h * (\tau_{(k,l)}v) = \tau_{(k,l)}(h * v).$$

Preuve. On a en effet pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} h * (\tau_{(k,l)}v)(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x-x', y-y') (\tau_{(k,l)}v)(x',y') dx' dy', \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x-x', y-y') v(x'-k, y'-l) dx' dy', \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x-(x''+k), y-(y''+l)) v(x'',y'') dx'' dy'', \\ &= \tau_{(k,l)}(h * v)(x,y), \end{aligned}$$

où l'on a fait un changement de variable $x'' \leftarrow x' - k$ et $y'' \leftarrow y' - l$. □

En mots, la Proposition 4 dit que faire une translation puis une convolution donne le même résultat que faire une convolution puis une translation. Autrement dit, la convolution commute avec les opérateurs de translation. On dit aussi que la convolution est invariante par translation.

La convolution est très souvent la première dégradation subie par l'image analogique. Ainsi, à un appareil de mesure correspond un noyau de convolution h (celui-ci peut être dû à l'optique, un compteur de photons ...).

2.2.2 De suites finies

Nous profitons de l'introduction de la convolution pour les fonctions analogiques pour la définir pour des suites finies. Soit $(h_{m,n})_{1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N}$ et $(v_{m,n})_{1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N}$, deux suites finies. On note $h * v$, le produit de convolution de h par v , la suite

$$(h * v)_{m,n} = \sum_{m'=1}^N \sum_{n'=1}^N h_{m-m', n-n'} v_{m',n'}.$$

Ici, on suppose que h est périodisé en dehors de $\{1, \dots, N\}^2$. Ceci veut dire que l'on définit

$$\forall (m,n) \in \{1, \dots, N\}^2, \forall (k,l) \in \mathbb{Z}, h_{m+kN, n+lN} = h_{m,n}.$$

Il est à noter que, même si h et v sont des images numériques, $h * v$ n'est pas forcément une image numérique car elle prend, à priori, des valeurs hors de Col . Nous verrons par la suite comment remédier à ce problème.

L'intuition est la même pour le produit de convolution entre des fonctions numériques et des fonctions analogiques. On a un effet de moyennage de v autour des points (m,n) .

On présente sur la Figure 2.1 le résultat de convolutions avec différents noyaux.

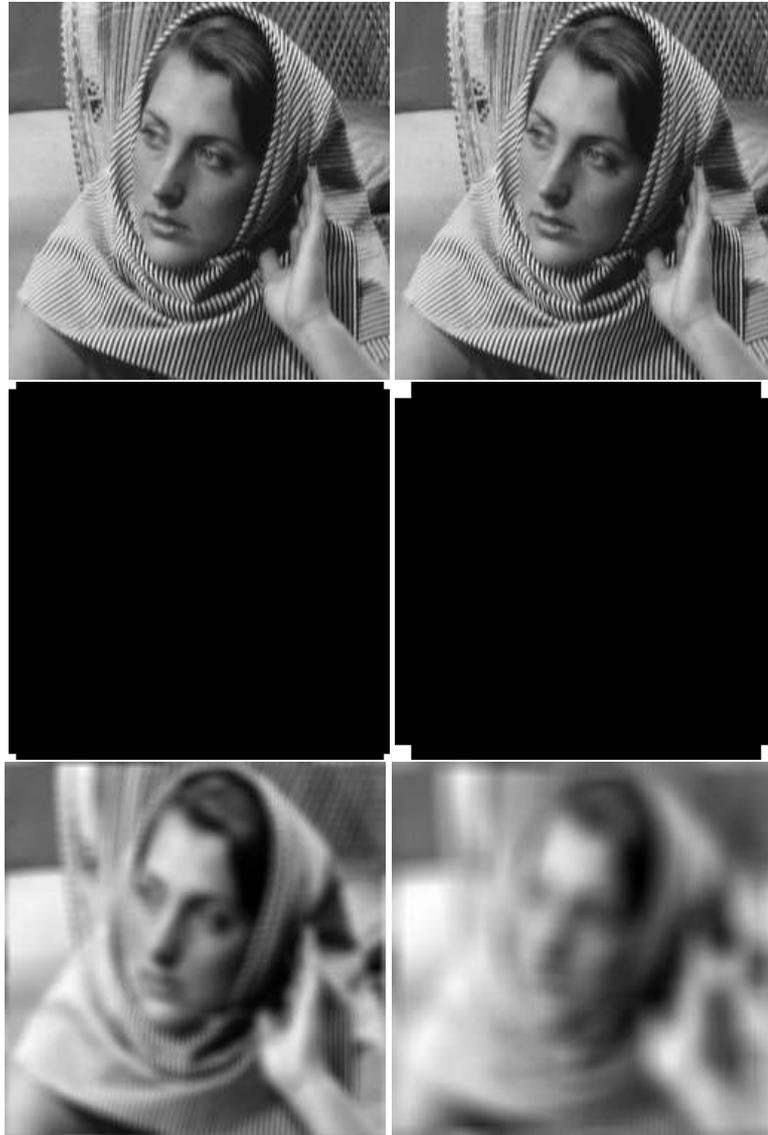


FIGURE 2.1 – Haut: l'image avant convolution; Milieu: noyau de convolution; Bas: Image convoluée.

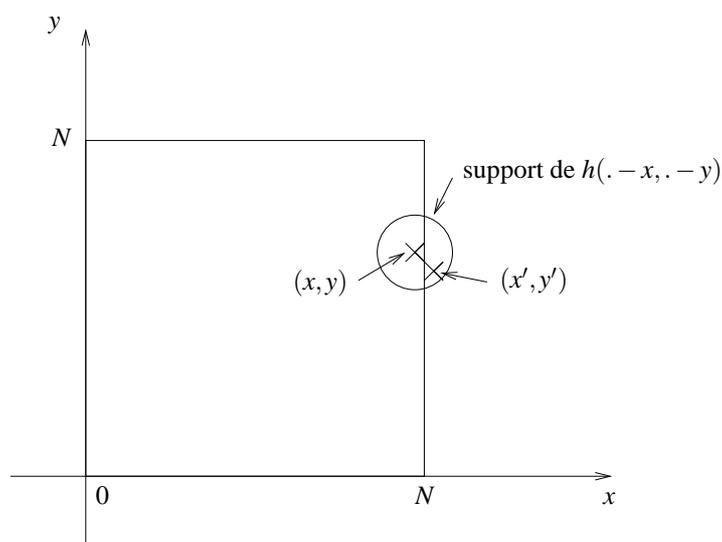


FIGURE 2.2 – La valeur de $h * v(x, y)$ dépend de la valeur de $v(x', y')$.

2.3 Le fenêtrage

Dans le chapitre précédent, pour la convolution entre fonctions analogiques, le domaine est \mathbb{R}^2 . Or, en pratique, une image numérique ne représente qu'une partie finie de l'ensemble de la scène observable. Il y a donc un *fenêtrage* de cette image analogique avant la numérisation. Le choix de la fenêtre correspond à ce que les photographes appellent le cadrage.

Ainsi, après la convolution, on a une image analogique $h * v$ dont on ne gardera que la partie intérieure à une fenêtre $[0, N]^2$. Ceci revient mathématiquement à la multiplier par $\mathbf{1}_{|[0, N]^2}$.

Cette perte d'informations joue un rôle important près des bords de l'image. En effet, lors de la convolution (voir Figure 2.2), si (x, y) est tel qu'il existe (x', y') hors de $[0, N]^2$ tel que $h(x - x', y - y') \neq 0$, $h * v(x, y)$ dépend de v en un endroit où on la connaît peu (en pratique pas). De tels points (x, y) sont d'autant plus nombreux que le support de h est étendu.

De même, l'information sur la valeur de $v(x, y)$ est répartie sur les valeurs de $h * v(x', y')$, avec (x', y') tel que $h(x' - x, y' - y) \neq 0$. Si un tel (x', y') est en dehors de $[0, N]^2$, cette information est perdue.

Pour remédier à ces problèmes, nous prolongerons $(h * v)\mathbf{1}_{|[0, N]^2}$ par périodisation. Ceci revient à poser

$$h * v(x, y) = h * v(x + t_x N, y + t_y N)$$

avec t_x et t_y tels que $(x + t_x N, y + t_y N) \in [0, N]^2$.

Il y a bien sûr beaucoup d'autres possibilités pour traiter ces *problèmes de bord*. Nous choisissons la périodisation parce que grâce à elle toutes les formules utilisant la transformée de Fourier (voir Chapitre 3) seront exactes (ce ne seront pas des approximations).

2.4 L'échantillonnage

L'échantillonnage est bien souvent la partie du processus de création d'une image digitale durant laquelle le plus d'informations est perdue. Elle consiste à ne garder que les valeurs de $(h * v)\mathbf{1}_{|[0, N]^2}$ aux



FIGURE 2.3 – De Gauche à droite, image sous-échantillonnée dans un rapport 1, 2, 3, 4.

points entiers. Mathématiquement, on obtient une fonction définie sur $\{1, \dots, N\}^2$ définie par

$$h * v(m, n) \mathbf{1}_{|[0, N]^2}(m, n),$$

pour $(m, n) \in \{1, \dots, N\}^2$.

Pour sous-échantillonner, d'un rapport K (pour K un entier strictement positif), une image digitale u définie sur $\{1, \dots, KN\}^2$, pour obtenir une image digitale u' définie sur $\{1, \dots, N\}^2$, on effectue l'opération

$$u'_{m,n} = u_{Km,Kn}.$$

On considère en général que le sous-échantillonnage d'une image digitale approxime bien les effets de l'échantillonnage permettant de créer une image à partir de $K = 3$.

2.5 Le bruit

Un appareil de mesure créant une image digitale génère toujours un bruit. Les causes peuvent venir de plusieurs sources (caractère probabiliste du nombre de photons issus d'une région d'intensité donnée, imperfections électroniques de l'appareil, imperfections des capteurs, ...). Nous ne considérerons ici que les bruits additifs. Il s'agira d'une suite, définie sur $\{1, \dots, N\}^2$, dont la valeur est aléatoire. Bien que cela soit rarement le cas, il est souvent raisonnable de supposer que le bruit b est *blanc* (les valeurs $b_{m,n}$ sont indépendantes les unes des autres). On supposera de plus qu'il est *Gaussien*. Ceci veut dire que chaque $b_{m,n}$ est une réalisation de la loi de probabilité continue, de densité

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.2)$$

pour $\sigma > 0$. On a introduit $\sigma > 0$, qui représente l'importance du bruit. On obtient alors une fonction définie sur $\{1, \dots, N\}^2$, valant

$$h * v(m, n) \mathbf{1}_{|[0, N]^2}(m, n) + b_{m,n}.$$

Pour un bruit b , comme pour toute variable aléatoire, on peut parler de *l'espérance* d'une fonction $f(b)$. On la définit mathématiquement par

$$\mathbb{E}(f(b)) = \int_{\mathbb{R}} f(t) p(t) dt$$

où $p(t)$ est la densité de la loi de b (ici la loi Gaussienne définie par (2.2)). L'espérance représente la valeur moyenne de $f(b)$ pour un nombre infini de réalisations indépendantes de b . C'est même en utilisant cette propriété que l'on calcule numériquement l'espérance, lorsque l'on sait produire des réalisations (indépendantes) de b .

Par exemple, il n'est pas dur de voir (ce sont de simples changements de variable) que

$$\mathbb{E}(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{\mathbb{R}} t \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = 0.$$

Ceci représente la *valeur moyenne* de b .

On définit aussi la *variance* de b , par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((b - \mathbb{E}(b))^2\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{\mathbb{R}} t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

La variance (dans le cas d'un bruit Gaussien, simplement, σ^2) nous donne l'écart quadratique moyen entre une réalisation de b et sa valeur moyenne.

2.6 La quantification

La quantification est l'opération qui consiste à traduire les valeurs de

$$h * v(m, n) \mathbf{1}_{[0, N]^2}(m, n) + b_{m, n}.$$

sous la forme d'une couleur. Pour cela, il faut approximer cette valeur (qui est dans \mathbb{R}^3 , pour des images couleurs et \mathbb{R} pour des images noir et blanc) de façon à ce qu'elle soit codable dans un ordinateur (on dispose d'un nombre fini de bits).

Si l'on considère le cas d'images noir et blanc avec des niveaux de gris appartenant à un ensemble $\{0, 1, \dots, 255\}$, on *quantifie* une valeur $t \in \mathbb{R}$ en l'approximant par la valeur $Ar(t)$, la plus proche de t dans $\{0, 1, \dots, 255\}$.

On obtient ainsi enfin notre image digitale sous la forme

$$u_{m, n} = Ar\left(h * v(m, n) \mathbf{1}_{[0, N]^2}(m, n) + b_{m, n}\right)$$

Remarque : Il est parfois nécessaire de modifier la dynamique de l'image avant la quantification (par exemple : si l'image est trop sombre, une quantification brutale engendrerait trop de perte d'informations ; si l'image est trop claire, beaucoup de points satureraient à la valeur 255). Nous négligerons dans la suite ce *changement de contraste*.

2.7 Autres dégradations

Il y a bien sûr beaucoup d'autres sources possibles de dégradation d'une image. Nous n'avons abordé ici que celles concernant l'appareil de mesure fonctionnant normalement. On peut mentionner par exemple :

- **Le changement de contraste :** Comme nous l'avons dit au chapitre précédent, on a parfois intérêt à modifier le contraste. Les caméras numériques et appareils photo numériques font presque toujours un changement de contraste pour s'adapter aux conditions d'éclairage.

- **La perte d'une partie de l'image** : Il peut arriver aussi qu'une partie de l'image soit perdue (par exemple : sur une photo abîmée, durant la transmission d'une image satellite, vieux films). Dans ce cas, on a un masque M , défini sur $\{1, \dots, N\}^2$, à valeur dans $\{0, 1\}$ et la nouvelle image est donnée par

$$\tilde{u}_{m,n} = M_{m,n} u_{m,n}.$$

- **Des distorsions géométriques** : Certains appareils de mesure ne font pas un échantillonnage sur une grille parfaite. Cela peut être dû à des imperfections du capteur, des vibrations d'un satellite, ... On a alors une fonction de déformation $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et l'image prend la forme

$$u_{m,n} = Ar \left(h * v(\varphi(m,n)) \mathbf{1}_{[0,N]^2}(\varphi(m,n)) + b_{m,n} \right)$$

- **Les pertes dues à la compression** : Pour stocker ou transmettre une image, on la compresse souvent. Cette compression peut générer des défauts sur l'image reconstruite. Ces défauts dépendent évidemment de la méthode et du niveau de compression.

Il existe évidemment d'autres sources de dégradations possibles. Nous n'aborderons pas (ou peu) les méthodes visant à réduire les effets de ces dégradations.

2.8 Exemple

Nous montrons dans les images suivantes les résultats pour une image donnée des dégradations définie par un noyau de convolution $h(x,y) = \mathbf{1}_{[-1,1]^2}$ et un bruit de variance $\sigma = 4$. (Ce noyau de convolution est réaliste, on rencontre des noyaux ayant le même genre d'effets en imagerie satellite. Le bruit dans un tel cas serait plus faible. Nous l'avons volontairement augmenté afin qu'il soit bien visible.)



FIGURE 2.4 – Image analogique de départ.



FIGURE 2.5 – Image analogique après la convolution.



FIGURE 2.6 – Image analogique après la convolution et le fenêtrage.



FIGURE 2.7 – Image analogique après la convolution, le fenêtrage et l'échantillonnage.



FIGURE 2.8 – Image analogique après la convolution, le fenêtrage, l'échantillonnage et l'ajout d'un bruit.



FIGURE 2.9 – Image analogique après la convolution, le fenêtrage, l'échantillonnage, l'ajout d'un bruit et la quantification. C'est une image digitale.

Chapitre 3

La transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un outil mathématique important en traitement des images pour deux raisons :

- La plupart des dégradations rencontrées lors de la création de l'image s'expriment simplement en terme de transformée de Fourier. Cette dernière permet donc de comprendre le comportement d'une chaîne image.
- C'est un exemple historique et important de traitement d'une image à partir de la représentation de l'image dans une base (autre que la base canonique). C'est un des grands domaines de recherche actuels.
- Voici une liste de quelques ouvrages de références [2, 1, 4],

3.1 D'une image analogique

3.1.1 Définition et premières propriétés

Nous nous contenterons ici de définir la transformée de Fourier d'une fonction définie sur \mathbb{R}^2 . Elle est en fait aussi définie pour une fonction définie sur une fenêtre. Il y a même un lien entre la transformée de Fourier d'une fonction définie sur \mathbb{R}^2 et celle de cette même fonction après le fenêtrage. Les détails de ce passage n'apportent cependant pas grand chose à la compréhension du fenêtrage. Nous le laisserons donc de côté.

Définition 2 Soit $v \in L^1(\mathbb{R}^2)$, sa transformée de Fourier est définie, pour $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, par

$$\hat{v}(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} v(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy,$$

où i représente le nombre complexe habituel.

Vous pourrez rencontrer d'autres définitions équivalentes (notamment avec un 2π) de la transformée de Fourier. Dans la suite, on appellera *fréquences* les points (ξ, η) décrivant le domaine de Fourier.

Remarque 1 : La transformée de Fourier est, en fait, définie pour des fonctions à valeur dans \mathbb{C} . Les coefficients de Fourier sont d'ailleurs dans \mathbb{C} . Par contre, comme la fonction est à valeur dans \mathbb{R} , on a (on

note z^* le nombre complexe conjugué de z)

$$\begin{aligned}\hat{v}^*(\xi, \eta) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} v(x, y) \left(e^{-i(\xi x + \eta y)} \right)^* dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} v(x, y) e^{-i(-\xi x - \eta y)} dx dy \\ &= \hat{v}(-\xi, -\eta).\end{aligned}$$

Remarque 2 : Une des intuitions importantes qu'il faut avoir (nous ne l'aborderons pas de façon formelle) est que *plus la fonction v est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroîtront rapidement.*

Remarque 3 : Un autre aspect, très important en traitement des images, est que la transformée de Fourier est une transformation globale (l'intégrale porte sur tout le domaine \mathbb{R}^2). Ainsi changer v , même sur une petite région de \mathbb{R}^2 , a un impact sur tous les coefficients de Fourier.

3.1.2 Exemple

L'exemple que nous allons traiter est le calcul de la transformée de Fourier de la fonction $v = \frac{1}{(2a)^2} \mathbf{1}_{[-a, a]^2}$, pour $a > 0$. Il est important car on le rencontre souvent. On a, pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\hat{v}(\xi, \eta) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(2a)^2} \mathbf{1}_{[-a, a]^2}(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a} \mathbf{1}_{[-a, a]}(x) e^{-i\xi x} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a} \mathbf{1}_{[-a, a]}(y) e^{-i\eta y} dy \right).\end{aligned}$$

Car $e^{-i(\xi x + \eta y)} = e^{-i\xi x} e^{-i\eta y}$ et $\mathbf{1}_{[-a, a]^2}(x, y) = \mathbf{1}_{[-a, a]}(x) \mathbf{1}_{[-a, a]}(y)$. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a} \mathbf{1}_{[-a, a]}(x) e^{-i\xi x} dx &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{-2i\xi a} \left[e^{-i\xi x} \right]_{-a}^a \\ &= \frac{1}{-2i\xi a} \left(e^{-i\xi a} - e^{i\xi a} \right) \\ &= \frac{1}{\xi a} \sin(\xi a) \\ &= \text{sinc}(a\xi),\end{aligned}$$

avec $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$, si $t \neq 0$, et $\text{sinc}(0) = 1$. On a donc

$$\hat{v}(\xi, \eta) = \text{sinc}(a\xi) \text{sinc}(a\eta). \quad (3.1)$$

□

On appelle *sinus cardinal* la fonction sinc apparaissant dans (3.1). Elle donne la transformée de Fourier de la fonction de fenêtrage telle que nous l'avons vue au chapitre 2.3.

On voit que $\frac{1}{(2a)^2} \mathbf{1}_{[-a, a]^2}$ est discontinue et que sa transformée de Fourier décroît comme $\frac{1}{\xi\eta}$. Là encore, c'est un point important car, par exemple, les images contiennent ce genre de discontinuité et ont donc dans coefficients de Fourier ayant ce type de décroissance.

3.1.3 Fourier inverse pour des images analogiques

Une propriété, qui rend la transformée de Fourier utile, est qu'elle est inversible. C'est à dire qu'à partir de sa transformée de Fourier, on peut reconstruire une fonction. Plus précisément :

Proposition 5 Soit $v \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Si sa transformée de Fourier \hat{v} est aussi dans $L^1(\mathbb{R}^2)$, on a alors pour (presque-)tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$v(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{v}(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (3.2)$$

Cette proposition est admise, nous verrons la preuve d'un résultat analogue dans le cas de la transformée de Fourier de suites finies.

Les intérêts de cette proposition sont multiples. Tout d'abord, en pratique, elle permet de reconstruire une fonction à partir de ses coefficients de Fourier. Ce qui veut dire que l'on peut calculer la transformée de Fourier d'une fonction, manipuler ses coefficients (de manière appropriée) et reconstruire un résultat.

Par ailleurs, elle met en évidence le sens de la transformée de Fourier, qui est de calculer les coordonnées d'une image dans un ensemble constitué des fonctions $\left(e^{i(\xi x + \eta y)} \right)_{\xi, \eta \in \mathbb{R}}$.

Les coefficients de Fourier ne sont ainsi qu'une autre façon de décrire une fonction analogique.

3.1.4 Convolution et transformée de Fourier

Proposition 6 Soit $v \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on a alors, pour tout ξ et tout η dans \mathbb{R}

$$\widehat{h * v}(\xi, \eta) = \hat{h}(\xi, \eta) \hat{v}(\xi, \eta).$$

Preuve. Cette propriété n'est pas très difficile à prouver. On a pour tout ξ et tout η dans \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \widehat{h * v}(\xi, \eta) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h * v(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x - x', y - y') v(x', y') dx' dy' \right) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy, \end{aligned}$$

Comme la fonction $|h(x - x', y - y')| |v(x', y')|$ est intégrable sur \mathbb{R}^4 , on peut modifier l'ordre dans lequel on effectue les intégrations et obtenir

$$\widehat{h * v}(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x - x', y - y') e^{-i(\xi(x - x') + \eta(y - y'))} dx dy \right) v(x', y') e^{-i(\xi x' + \eta y')} dx' dy'.$$

On obtient après un changement de variable :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x - x', y - y') e^{-i(\xi(x - x') + \eta(y - y'))} dx dy &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy, \\ &= \hat{h}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

On a donc finalement,

$$\begin{aligned} \widehat{h * v}(\xi, \eta) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\xi, \eta) v(x', y') e^{-i(\xi x' + \eta y')} dx' dy', \\ &= \hat{h}(\xi, \eta) \hat{v}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

□

Cette proposition est très importante et sa version "discrète" a de nombreuses applications pratiques.

3.1.5 Effet de Gibbs

Les effets de Gibbs sont des défauts que l'on obtient lorsque l'on approxime un signal ou une image (contenant une discontinuité) en ne conservant que ces basses fréquences.

Pour illustrer le phénomène de Gibbs, considérons un signal discontinu type, valant

$$v(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x < 0 \\ 0 & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

et une fonction de coupure dont la transformée de Fourier vaut

$$\hat{h}_K(\xi) = \mathbf{1}_{[-K,K]}(\xi) \quad , \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}.$$

On obtient facilement en appliquant un analogue 1D de (3.2) à la formule ci-dessus et en conduisant un calcul similaire à celui du Chapitre 3.1.2 que

$$h_K(x) = \frac{K}{\pi} \text{sinc}(Kx) \quad , \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ne garder que les fréquences de v dans l'intervalle $[-K, K]$ revient à calculer la convolution $h_K * v$. L'erreur d'approximation est donc la différence entre v et $h_K * v$.

Proposition 7 Pour tout $K > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$h_K * v(x) = \frac{1}{2} - \int_0^{Kx} h_1(t) dt,$$

dont les valeurs extrémales sont indépendantes de K et valent

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} h_K * v(x) \sim -0.045 < 0,$$

et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} h_K * v(x) \sim 1.045 > 1.$$

Ainsi, quelque soit la valeur de K ,

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |v(x) - h_K * v(x)| > 0.045.$$

Preuve. La première partie de l'énoncé est immédiate car on a

$$h_K * v(x) = \int_{-\infty}^0 h_K(x-t) dt, \tag{3.3}$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{K}{\pi} \text{sinc}(K(x-t)) dt, \tag{3.4}$$

$$= \int_{Kx}^{\infty} \frac{1}{\pi} \text{sinc}(t') dt' \quad (\text{changement de variable } t' = K(x-t)), \tag{3.5}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} \text{sinc}(t') dt' - \int_0^{Kx} \frac{1}{\pi} \text{sinc}(t) dt, \tag{3.6}$$

$$= \int_0^{\infty} h_1(t) dt - \int_0^{Kx} h_1(t) dt. \tag{3.7}$$

De plus, comme $h_1(t)$ est paire et $\int_{\mathbb{R}} h_1(t) dt = \hat{h}_1(0) = 1$, on obtient finalement

$$h_K * v(x) = \frac{1}{2} - \int_0^{Kx} h_1(t) dt.$$

Il n'est pas difficile de se convaincre en regardant le graphe de la fonction sinus cardinal que $\int_0^{Kx} h_1(t) dt$ est maximum pour $Kx = \pi$ et minimum pour $Kx = -\pi$. On obtient alors par des approximations numériques les valeurs indiquées dans la proposition. \square

Cette proposition indique que lorsque l'on enlève les hautes fréquences d'un signal (ou d'une image) discontinue, on obtient des rebonds au voisinage de cette discontinuité. L'approximation ne converge pas, en norme infini, vers la fonction de départ. Ce phénomène s'appelle phénomène de Gibbs ou "ringing". On le rencontre souvent en traitement du signal et des images.

Il faut cependant noter que l'on obtient facilement la convergence de $h_K * v$ vers v en norme L^2 , lorsque $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Cette propriété est cependant une conséquence immédiate de la formule de Parseval, que nous ne verrons pas dans le cadre de la transformée de Fourier de fonctions. Nous ne la prouverons donc pas.

3.1.6 Principe d'incertitude de Heisenberg

Le principe d'incertitude de Heisenberg est une inégalité qui exprime le fait qu'une fonction ne peut pas être très concentrée à la fois dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier. Elle est bien connue du fait de ces implications pour les particules libres : lorsque la fonction $|v|^2$ est la densité de probabilité qu'une particule soit en un endroit, $\frac{1}{2\pi}|\hat{v}|^2$ représente la densité de probabilité du moment de la particule. L'inégalité de Heisenberg exprime alors le fait qu'il n'est pas possible de connaître précisément à la fois la position et le moment de la particule libre.

Si l'on voulait aller contre le principe de Heisenberg et construire une fonction à la fois concentrée en espace et en fréquence, on pourrait par exemple prendre une fonction et contracter l'espace pour concentrer son support. On définirait alors pour $v \in L^2(\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$

$$v_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} v\left(\frac{x}{\alpha}\right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

de manière à avoir $\|v_\alpha\|_2 = \|v\|_2$. La fonction v_α devient en effet d'autant plus concentrée que α devient petit. Mais si l'on fait cela, on a alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \hat{v}_\alpha(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} v_\alpha(x) e^{-i\xi x} dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} v\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-i\xi x} dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} v(x') e^{-i\alpha\xi x'} \alpha dx', \quad (\text{changement de variable } x' = \frac{x}{\alpha}) \\ &= \sqrt{\alpha} \hat{v}(\alpha\xi). \end{aligned}$$

Ainsi la transformée de Fourier de v_α est dilatée par $\frac{1}{\alpha}$, de sorte que l'on perd, dans le domaine de Fourier, la concentration que l'on avait gagnée dans le domaine direct.

Soit une fonction $v \in L^2(\mathbb{R})$, on considère les densités de probabilité $\frac{1}{\|v\|_2^2} v^2$ et $\frac{1}{2\pi\|v\|_2^2} |\hat{v}|^2$. On considère les espérances et les variances de ces lois :

$$\mu_v = \frac{1}{\|v\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} x v^2(x) dx \quad \text{et} \quad \sigma_v^2 = \frac{1}{\|v\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_v)^2 v^2(x) dx$$

et

$$\mu_{\hat{v}} = \frac{1}{2\pi\|v\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \xi |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \quad \text{et} \quad \sigma_{\hat{v}}^2 = \frac{1}{2\pi\|v\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (\xi - \mu_{\hat{v}})^2 |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

Proposition 8 *On a alors*

$$\sigma_v^2 \sigma_{\hat{v}}^2 \geq \frac{1}{4}.$$

3.2 D'une suite finie

Dans cette partie, nous allons définir les notions analogues à celles que nous avons déjà vues pour des fonctions analogiques, mais pour des suites finies. Tout cela s'applique évidemment aux images numériques (la quantification n'induit pas de difficulté supplémentaire).

Définition 3 *Soit $(w_{m,n})_{1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N}$ une suite finie de nombres réels. Sa transformée de Fourier discrète est définie pour $(k,l) \in \{1, \dots, N\}^2$ (ou, de façon équivalente, sur $(k,l) \in \{-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}\}^2$) par*

$$\hat{w}_{k,l} = \sum_{m,n=1}^N w_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}} \quad (3.8)$$

L'intuition est la même pour la transformée de Fourier discrète que pour la transformée de Fourier d'une fonction analogique. Un élément nouveau, cependant, est que la transformée de Fourier discrète peut en fait être définie sur \mathbb{Z}^2 auquel cas elle est périodique. (Il n'est pas difficile de voir que $\hat{w}_{k+t_1N, l+t_2N} = \hat{w}_{k,l}$. Ceci est dû au fait que, pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}} = e^{-2i\pi \frac{(k+t_1N)m+(l+t_2N)n}{N}}$.)

Comme dans le cas de la transformée de Fourier, le fait que la suite w soit à valeur dans \mathbb{R} implique que

$$\hat{w}_{k,l}^* = \hat{w}_{-k,-l}. \quad (3.9)$$

L'inversion de la transformée de Fourier discrète est donnée par

Proposition 9 (inversion de la transformée de Fourier)

Soit $(w_{m,n})_{1 \leq m,n \leq N}$ une suite finie de nombres réels. Si on note $(\hat{w}_{k,l})_{1 \leq k,l \leq N}$, ses coefficients de Fourier, on a alors, pour tout $(m,n) \in \{1, \dots, N\}^2$

$$w_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \hat{w}_{k,l} e^{2i\pi \frac{km+ln}{N}}.$$

Preuve. On a en effet

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \hat{w}_{k,l} e^{2i\pi \frac{km+ln}{N}} &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \left(\sum_{m',n'=1}^N w_{m',n'} e^{-2i\pi \frac{km'+ln'}{N}} \right) e^{2i\pi \frac{km+ln}{N}} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{m',n'=1}^N w_{m',n'} \sum_{k=1}^N e^{-2i\pi \frac{k(m'-m)}{N}} \sum_{l=1}^N e^{-2i\pi \frac{l(n'-n)}{N}} \end{aligned}$$

Étudions $\sum_{k=1}^N e^{-2i\pi \frac{k(m'-m)}{N}}$ (on aura le même résultat pour $\sum_{l=1}^N e^{-2i\pi \frac{l(n'-n)}{N}}$). Si $m' = m$, on a

$$\sum_{k=1}^N e^{-2i\pi \frac{k(m'-m)}{N}} = \sum_{k=1}^N 1 = N.$$

De plus, si $m' \neq m$, on a

$$\sum_{k=1}^N e^{-2i\pi \frac{k(m'-m)}{N}} = \sum_{k=1}^N a^k,$$

avec $a = e^{-2i\pi\frac{(m'-m)}{N}}$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N e^{-2i\pi\frac{k(m'-m)}{N}} &= \frac{a^{N+1} - a}{a - 1} \\ &= 0,\end{aligned}$$

car $a^{N+1} = e^{-2i\pi\frac{(N+1)(m'-m)}{N}} = e^{-2i\pi(m'-m)} e^{-2i\pi\frac{m'-m}{N}} = a$.

On a ainsi,

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \hat{w}_{k,l} e^{2i\pi\frac{km+ln}{N}} = w_{m,n}.$$

□

Exemple : Un calcul similaire à celui que nous avons fait au chapitre précédent nous assure que la transformée de Fourier discrète d'une fonction $w = \frac{1}{(2M+1)^2} \mathbf{1}_{\{-M, \dots, M\}^2}$ vaut

$$\hat{w}_{k,l} = \text{sinc}_d^M \left(\frac{k\pi}{N} \right) \text{sinc}_d^M \left(\frac{l\pi}{N} \right)$$

avec $\text{sinc}_d^M(t) = \frac{\sin(t(2M+1))}{(2M+1)\sin(t)}$, si $t \neq 0$, et $\text{sinc}_d^M(0) = 1$. C'est la version discrète du sinus cardinal.

3.2.1 La Fast Fourier Transform (FFT)

Un intérêt supplémentaire de la transformée de Fourier discrète est qu'il existe un algorithme rapide pour la calculer (ainsi que son inverse). Il s'agit de la *Fast Fourier Transform* ou *FFT*. C'est un algorithme dont la complexité est de l'ordre de $N^2 \log(N)$, pour une image de taille $N \times N$.

Un algorithme naïf

Pour calculer la transformée de Fourier d'une image, on peut construire un algorithme exploitant directement la formule (3.8). On obtient alors l'algorithme 1.

Au cours de l'exécution de cet algorithme,

- on initialise N^2 fois une variable à 0
- on calcule N^4 fois l'arguments des cosinus et sinus,
- on calcule N^4 fois les cosinus et sinus,
- on calcule N^4 fois les produits et les sommes impliquant $\hat{w}_{k,l}^r, \hat{w}_{k,l}^i, w_{m,n}$, le cosinus et le sinus.

Le terme en N^2 est négligeable devant le terme en N^4 , lorsque N est grand. On obtient donc que le nombre d'opérations de cet algorithme est de l'ordre d'une constante multipliée par N^4 . On dit que l'algorithme est de complexité $O(N^4)$, pour des images de taille N^2 . C'est une complexité assez élevée qui ne permettrait pas de calculer la transformée de Fourier de grandes images.

La FFT, en dimension 1

Pour simplifier la présentation, nous nous contentons de décrire l'algorithme de Cooley-Tukey dans le cas d'un signal (1 D) $w \in \mathbb{R}^N$ dont la taille N est une puissance de 2. Cet algorithme utilise le fait que l'on peut déduire la transformée de Fourier de w des transformées de Fourier de 2 signaux de taille $\frac{N}{2}$. Le premier de ces deux signaux est constitué des valeurs de w aux indices pairs ; l'autre est constitué des valeurs de w aux indices impairs.

Algorithme 1 : Transformée de Fourier lente

Entrées :

w : image de taille $N \times N$;

Sorties :

\hat{w}^r, \hat{w}^i : images de taille $N \times N$ contenant les parties réelles et imaginaires de la transformée de Fourier de w ;

début

pour $k = 1..N$ **faire**

pour $l = 1..N$ **faire**

$\hat{w}_{k,l}^r = \hat{w}_{k,l}^i = 0$;

pour $m = 1..N$ **faire**

pour $n = 1..N$ **faire**

$\hat{w}_{k,l}^r = \hat{w}_{k,l}^r + w_{m,n} \cos(2\pi \frac{km+ln}{N})$;

$\hat{w}_{k,l}^i = \hat{w}_{k,l}^i + w_{m,n} \sin(2\pi \frac{km+ln}{N})$;

fin

Plus précisément, on note $w^p \in \mathbb{R}^{\frac{N}{2}}$ (pour pair) et $w^i \in \mathbb{R}^{\frac{N}{2}}$ (pour impair) les signaux définis par

$$\text{pour tout } m \in \{1, \dots, \frac{N}{2}\}, \begin{cases} w_m^p = w_{2m} \\ w_m^i = w_{2m-1} \end{cases} \quad (3.10)$$

On a alors, pour toute fréquence $k \in \{1, \dots, \frac{N}{2}\}$,

$$\begin{aligned} \hat{w}_k &= \sum_{m=1}^N w_m e^{-2i\pi \frac{km}{N}}, \\ &= \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} w_{2m} e^{-2i\pi \frac{k2m}{N}} + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} w_{2m-1} e^{-2i\pi \frac{k(2m-1)}{N}}, \\ &= \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} w_m^p e^{-2i\pi \frac{km}{(N/2)}} + e^{-2i\pi \frac{k}{N}} \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} w_m^i e^{-2i\pi \frac{km}{(N/2)}}, \\ &= \widehat{w}_k^p + e^{2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{w}_k^i. \end{aligned}$$

On décrit les fréquences de $\{\frac{N}{2} + 1, \dots, N\}$ sous une forme $\frac{N}{2} + k$, pour $k \in \{1, \dots, \frac{N}{2}\}$. On a donc pour

un tel k

$$\begin{aligned}
\widehat{w}_{\frac{N}{2}+k} &= \sum_{m=1}^N w_m e^{-2i\pi \frac{(\frac{N}{2}+k)m}{N}}, \\
&= \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} w_{2m} e^{-2i\pi \frac{(\frac{N}{2}+k)2m}{N}} + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} w_{2m-1} e^{-2i\pi \frac{(\frac{N}{2}+k)(2m-1)}{N}}, \\
&= \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} w_m^p e^{-2i\pi \frac{Nm}{N}} e^{-2i\pi \frac{km}{(N/2)}} + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} w_m^i e^{-2i\pi \frac{-(\frac{N}{2}+k)}{N}} e^{-2i\pi \frac{Nm}{N}} e^{-2i\pi \frac{km}{(N/2)}}, \\
&= \widehat{w}_k^p + e^{2i\pi \frac{N}{N}} e^{2i\pi \frac{k}{N}} \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} w_m^i e^{-2i\pi \frac{km}{(N/2)}}, \\
&= \widehat{w}_k^p - e^{2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{w}_k^i.
\end{aligned}$$

(Dans le calcul ci-dessus, on a utilisé le fait que $e^{-2i\pi m} = 1$.)

Finalement, on obtient pour tout $k \in \{1, \dots, \frac{N}{2}\}$

$$\begin{cases} \widehat{w}_k = \widehat{w}_k^p + e^{2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{w}_k^i \\ \widehat{w}_{\frac{N}{2}+k} = \widehat{w}_k^p - e^{2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{w}_k^i \end{cases}$$

qui nous permet bien de déduire \widehat{w} à partir de \widehat{w}^p et \widehat{w}^i . Par ailleurs, en appliquant simplement (3.8), on voit que si $N = 1$, alors $\widehat{w}_1 = w_1$.

Finalement, tout ceci nous permet de construire l'algorithme récursif décrit dans l'Algorithme 2. Pour simplifier l'écriture de l'Algorithme 2, on suppose que notre algorithme peut manipuler des signaux complexes.

Algorithme 2 : Transformée de Fourier rapide (FFT), pour un signal.

Entrées :

w : signal de taille N ;

Sorties :

\widehat{w} : signal de taille N contenant la transformée de Fourier de w ;

début

si $N = 1$ **alors**

$\widehat{w}_1 = w_1$;

sinon

 extraire w^p et w^i en suivant (3.10) ;

 calculer \widehat{w}^p et \widehat{w}^i avec l'algorithme de FFT ;

(appel récursif)

pour $k = 1.. \frac{N}{2}$ **faire**

$\widehat{w}_k = \widehat{w}_k^p + e^{2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{w}_k^i$;

$\widehat{w}_{\frac{N}{2}+k} = \widehat{w}_k^p - e^{2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{w}_k^i$;

fin

Si l'on note $c(N)$ le coût calcul pour calculer la FFT d'un signal de taille N , on a, aux vues de l'Algorithme 2,

$$c(N) = aN + 2c\left(\frac{N}{2}\right),$$

où a représente le coût par pixel des opérations de l'algorithme, dont on exclut le calcul des transformées de Fourier de taille $\frac{N}{2}$. Il n'est pas difficile de vérifier que

$$c(N) = N(c(1) + a \log_2 N)$$

est solution de cette relation de récurrence. On a, en effet, en utilisant cette définition de $c(N)$

$$\begin{aligned} aN + 2c\left(\frac{N}{2}\right) &= aN + 2\frac{N}{2}\left(c(1) + a \log_2 \frac{N}{2}\right), \\ &= aN + Nc(1) + aN \log_2 N - aN, \\ &= c(N). \end{aligned}$$

On en déduit finalement que la FFT 1D est un algorithme de complexité $O(N \log N)$.

On a bien sûr une construction et un algorithme analogue pour la transformée de Fourier inverse.

La FFT, en dimension 2

Pour calculer la transformée de Fourier de $w \in \mathbb{R}^{N^2}$ (en dimension 2), on décompose simplement pour $(k, l) \in \{1, \dots, N\}^2$

$$\begin{aligned} \hat{w}_{k,l} &= \sum_{m,n=1}^N w_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}}, \\ &= \sum_{m=1}^N \left(\sum_{n=1}^N w_{m,n} e^{-2i\pi \frac{ln}{N}} \right) e^{-2i\pi \frac{km}{N}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ci dessus, pour chaque $m \in \{1, \dots, N\}$,

$$l \mapsto \sum_{n=1}^N w_{m,n} e^{-2i\pi \frac{ln}{N}}$$

est simplement la transformée de Fourier 1D du signal $(w_{m,n})_{1 \leq n \leq N} \in \mathbb{R}^N$. De même, pour l fixé, la somme en m dans (3.11) correspond à la transformée de Fourier 1D

$$m \mapsto \sum_{n=1}^N w_{m,n} e^{-2i\pi \frac{ln}{N}}.$$

Finalement, on peut calculer la transformée de Fourier 2D d'une image à l'aide de l'algorithme décrit dans l'Algorithme 3.

On a bien sûr une construction et un algorithme analogue pour la transformée de Fourier 2D inverse.

3.2.2 Convolution et transformée de Fourier

L'un des intérêts majeurs de la transformée de Fourier est le lien qui la lie à la convolution. En effet, on a

Proposition 10 Soit h et w deux suites finies, définies sur $\{1, \dots, N\}^2$. On a alors, pour tout $(k, l) \in \{1, \dots, N\}^2$,

$$\widehat{(h * w)}_{k,l} = \hat{h}_{k,l} \hat{w}_{k,l}.$$

Algorithme 3 : Transformée de Fourier rapide (FFT), pour une image 2D.

Entrées :

w : image de taille $N \times N$;

Sorties :

\hat{w} : image de taille $N \times N$ contenant la transformée de Fourier de w ;

début

pour $m = 1..N$ **faire**

 extraire la ligne (un signal 1D) $(w_{m,n})_{1 \leq n \leq N}$

 calculer la FFT 1D de ce signal

 ranger cette transformée de Fourier à la ligne m d'une image $(v_{m,l})_{1 \leq m, l \leq N}$

pour $l = 1..N$ **faire**

 extraire la colonne (un signal 1D) $(v_{m,l})_{1 \leq m \leq N}$

 calculer la FFT 1D de ce signal

 ranger cette transformée de Fourier à la colonne l de \hat{w}

fin

Preuve. En effet,

$$\begin{aligned} \widehat{(h * w)}_{k,l} &= \sum_{m,n=1}^N (h * w)_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}} \\ &= \sum_{m,n=1}^N \left(\sum_{m',n'=1}^N h_{m-m',n-n'} w_{m',n'} \right) e^{-2i\pi \frac{k(m-m')+l(n-n')}{N}} e^{-2i\pi \frac{km'+ln'}{N}} \\ &= \sum_{m',n'=1}^N w_{m',n'} e^{-2i\pi \frac{km'+ln'}{N}} \sum_{m,n=1}^N h_{m-m',n-n'} e^{-2i\pi \frac{k(m-m')+l(n-n')}{N}}. \end{aligned}$$

Pour la dernière somme, on a, en changeant de variable,

$$\sum_{m,n=1}^N h_{m-m',n-n'} e^{-2i\pi \frac{k(m-m')+l(n-n')}{N}} = \sum_{m=1-m'}^{N-m'} \sum_{n=1-n'}^{N-n'} h_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}}.$$

Or, du fait de la périodicité de h et de l'exponentielle, on a, pour $m \in \{1 - m', \dots, 0\}$ (idem pour $n \in \{1 - n', \dots, 0\}$),

$$h_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}} = h_{m+N,n} e^{-2i\pi \frac{k(m+N)+ln}{N}}$$

et $m + N \in \{N - m' + 1, \dots, N\}$. Ainsi, on peut réarranger la somme et l'on a

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^N h_{m-m',n-n'} e^{-2i\pi \frac{k(m-m')+l(n-n')}{N}} &= \sum_{m,n=1}^N h_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}} \\ &= \hat{h}_{k,l}. \end{aligned}$$

On trouve donc bien

$$\begin{aligned} \widehat{h * w}_{k,l} &= \sum_{m',n'=1}^N w_{m',n'} e^{-2i\pi \frac{km'+ln'}{N}} \hat{h}_{k,l} \\ &= \hat{h}_{k,l} \hat{w}_{k,l}. \end{aligned}$$

□

Une propriété analogue peut être énoncée pour la transformée de Fourier inverse.

Cette propriété est d'un grand intérêt pratique. On peut en effet l'utiliser pour faire une convolution quand le noyau de convolution h a un support étendu en espace (voir l'Algorithme 4). En effet, la complexité d'une convolution effectuée directement est $O(N^2T)$, où T représente le nombre de points contenus dans le support du noyau de convolution ; et la complexité de l'Algorithme 4 est $O(N^2 \log N)$. Il vaut donc mieux faire la convolution dans le domaine de Fourier, dès que $T > \log(N)$.

Algorithme 4 : Convolution passant par le domaine de Fourier, pour une image 2D.

Entrées :

h, w : noyau de convolution et image de taille $N \times N$;

Sorties :

v : image de taille $N \times N$ contenant le produit de convolution $h * w$;

début

Calculer \hat{h} et \hat{w} à l'aide de la FFT

pour $k = 1..N$ **faire**

pour $l = 1..N$ **faire**

$\hat{v}_{k,l} = \hat{h}_{k,l} \hat{w}_{k,l}$

Calculer v à l'aide de la FFT inverse

fin

A ce stade, il est facile de montrer une propriété de la transformée de Fourier que nous utiliserons plus tard.

Proposition 11 (Parseval) Soit w et w' deux suites finies de réels, définie sur $\{1, \dots, N\}^2$. On a alors

$$\sum_{k,l=1}^N \hat{w}_{k,l}^* \hat{w}'_{k,l} = N^2 \sum_{m,n=1}^N w_{m,n} w'_{m,n}.$$

On a notamment

$$\sum_{k,l=1}^N |\hat{w}_{k,l}|^2 = N^2 \sum_{m,n=1}^N w_{m,n}^2.$$

Preuve. Tout d'abord, il est facile de voir que, pour $\tilde{w}_{m,n} = w_{-m,-n}$, on a bien $\hat{\tilde{w}}_{k,l} = \hat{w}_{k,l}^*$.

On a par ailleurs,

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^N \hat{w}_{k,l}^* \hat{w}'_{k,l} &= \sum_{k,l=1}^N \widehat{\tilde{w}}_{k,l} \hat{w}'_{k,l}, \\ &= \sum_{k,l=1}^N (\widehat{\tilde{w} * w'})_{k,l}, \\ &= \sum_{k,l=1}^N (\widehat{\tilde{w} * w'})_{k,l} e^{2i\pi \frac{k_0+l_0}{N}}. \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer le résultat sur l'inversion de la transformation de Fourier et on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^N \hat{w}_{k,l}^* \hat{w}'_{k,l} &= N^2 (\tilde{w} * w')_{0,0}, \\
&= N^2 \sum_{m,n=1}^N \tilde{w}_{0-m,0-n} w'_{m,n}, \\
&= N^2 \sum_{m,n=1}^N w_{m,n} w'_{m,n}.
\end{aligned}$$

□

Cette proposition implique notamment que si, pour une raison ou pour une autre (quantification, bruit, ...), nous commettons une erreur sur les coefficients de Fourier, on a une erreur "globalement" du même ordre sur la suite correspondante (il suffit d'appliquer cette proposition à l'erreur en question). Cette proposition nous garantit la stabilité des manipulations que nous ferons sur les coefficients de Fourier.

3.2.3 Échantillonnage et transformée de Fourier

Un autre intérêt de la transformée de Fourier vient du lien qui existe entre la transformée de Fourier d'une suite finie définie $\{1, \dots, KN\}^2$ (un résultat analogue existe pour les fonctions de $L^1([0, N]^2)$) et la transformée de Fourier du sous-échantillonnage d'un rapport K de cette suite. On a en effet,

Proposition 12 (Formule de Poisson)

Soit w une suite finie de nombres réels, définie sur $\{1, \dots, KN\}^2$. On note u le sous-échantillonnage de w défini, pour $(m, n) \in \{1, \dots, N\}^2$, par

$$u_{m,n} = w_{Km,Kn}.$$

On a alors, pour tout $(k, l) \in \{1, \dots, N\}^2$

$$\hat{u}_{k,l} = \frac{1}{K^2} \sum_{t_1=0}^{K-1} \sum_{t_2=0}^{K-1} \hat{w}_{k+t_1N, l+t_2N}.$$

Preuve.

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{k,l} &= \sum_{m,n=1}^N u_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}} \\
&= \sum_{m,n=1}^N w_{Km,Kn} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}} \\
&= \sum_{m,n=1}^N \left(\frac{1}{K^2 N^2} \sum_{k',l'=1}^{KN} \hat{w}_{k',l'} e^{2i\pi \frac{k'Km+l'Kn}{KN}} \right) e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}} \\
&= \frac{1}{K^2 N^2} \sum_{k',l'=1}^{KN} \hat{w}_{k',l'} \sum_{m,n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-k')m+(l-l')n}{N}} \\
&= \frac{1}{K^2 N^2} \sum_{k',l'=1}^{KN} \hat{w}_{k',l'} \sum_{m=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-k')m}{N}} \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(l-l')n}{N}}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Mais, on voit alors (le même calcul s'applique aussi à $\sum_{m=1}^N e^{-2i\pi\frac{(l-l')m}{N}}$) que

– si $k'=k+tN$, avec $t \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{m=1}^N e^{-2i\pi\frac{(k-k')m}{N}} = \sum_{m=1}^N 1 = N.$$

– sinon, en posant $a = e^{-2i\pi\frac{(k-k')}{N}}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N e^{-2i\pi\frac{(k-k')m}{N}} &= \sum_{m=1}^N a^m \\ &= \frac{a^{N+1} - a}{a - 1} \\ &= \frac{a - a}{a - 1} = 0. \end{aligned}$$

On peut donc se contenter de faire la première somme de (3.12) pour des indices de la forme $k' = k + t_1N$ avec $t_1 \in \{0, \dots, K-1\}$ (même chose pour l'). On obtient alors

$$\hat{u}_{k,l} = \frac{1}{K^2} \sum_{t_1=0}^{K-1} \sum_{t_2=0}^{K-1} \hat{w}_{k+t_1N, l+t_2N},$$

qui est le résultat annoncé. □

Ainsi, lors de l'échantillonnage, le coefficient de Fourier que l'on mesure est en fait la somme de plusieurs coefficients de Fourier de la fonction de départ. Ceci est illustré par la Figure 3.1. On appelle les fréquences $(k + t_1N, l + t_2N)$, qui modifient la vraie valeur de $\hat{w}_{k,l}$, les *alias*. Il faut faire attention ici au sens des fréquences. En effet, les basses fréquences de w (celles correspondant aux fréquences présentes dans u) sont celles vérifiant

$$k \in \{1, \dots, \frac{N}{2} - 1\} \cup \{KN - \frac{N}{2}, \dots, KN\}$$

et

$$l \in \{1, \dots, \frac{N}{2} - 1\} \cup \{KN - \frac{N}{2}, \dots, KN\}$$

Comme les images sont généralement basses fréquences, les alias seront les fréquences qui n'appartiennent pas à cet ensemble.

Cette formule permet d'expliquer certains phénomènes que nous observons lors de l'échantillonnage d'une image. On appelle ce genre de phénomène de *aliasing*. On peut le voir notamment lorsque l'image contient une texture qui est bien localisée en fréquence (elle est représentée par un petit nombre de coefficients, tous localisés dans un voisinage d'une fréquence). Cette texture est alors "recopiée" dans une autre zone du plan fréquentiel. Ceci a pour effet de complètement modifier la texture en question. Ceci est illustré par la figure 3.2.

Il est important de noter que l'aliasing est un phénomène qu'un bon appareil de mesure doit éviter et ce pour au moins deux raisons. Tout d'abord, il n'est à priori pas possible de distinguer l'aliasing de la véritable information contenue initialement à la fréquence (k, l) . Ceci peut donc conduire à de mauvaises interprétations de l'image. Il vaut donc mieux effacer cette "fausse" information. Dans le cas de film, l'aliasing ne sera pas identique d'une image du film à une autre. Ainsi, on verra une texture bouger au fur et à mesure que le film se déroule.

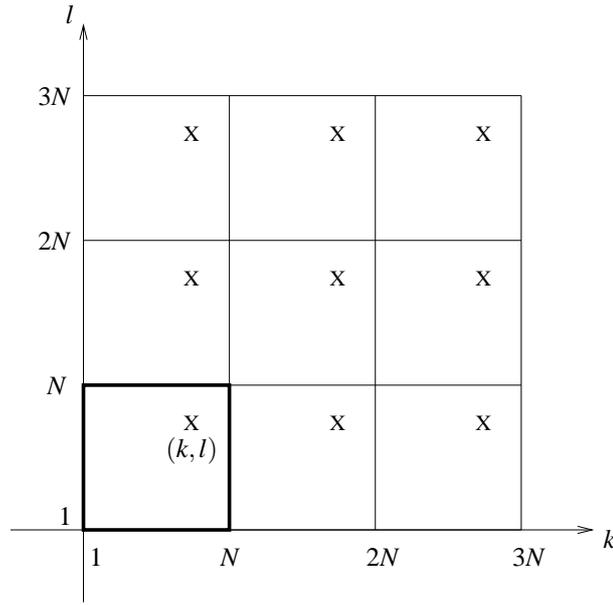


FIGURE 3.1 – La valeur mesurée en (k, l) est la somme des valeurs de la transformée de Fourier, avant le sous-échantillonnage, aux autres points désignés par les croix.

On peut éviter (ou tout du moins réduire énormément) l'aliasing à l'aide de la convolution qui précède l'échantillonnage. En effet, si on exprime en fréquence la dégradation subie par l'image à la fin de l'échantillonnage (on néglige ici le fenêtrage en supposant l'image de départ périodique), on a, en posant

$$u_{m,n} = h * v_{Km,Kn},$$

on obtient, pour $(k, l) \in \{1, \dots, N\}^2$,

$$\hat{u}_{k,l} = \frac{1}{K^2} \sum_{t_1=0}^{K-1} \sum_{t_2=0}^{K-1} \hat{h}_{k+t_1N, l+t_2N} \hat{v}_{k+t_1N, l+t_2N}$$

(Rappel : faire une convolution revient à faire une multiplication des transformées de Fourier). Il suffit de prendre $\hat{h}_{k,l} = 0$, dès que (k, l) est un alias, pour éviter l'aliasing. Cela n'est en fait pas si simple. On se contente, en fait, souvent de noyaux h dont la transformée de Fourier est faible aux alias.

Finalement, la Proposition 12 est très similaire et pourrait être montrée à la proposition suivante exprimant la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac.

Proposition 13 (Peignes de Dirac)

Soit w un peigne de Dirac, définie sur $\{1, \dots, KN\}^2$, par

$$w_{m,n} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } (m, n) \in (K\mathbb{Z})^2, \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier est aussi un peigne de Dirac et on a pour tout $(k, l) \in \{1, \dots, KN\}^2$

$$\hat{w}_{k,l} = \begin{cases} N^2 & , \text{ si } (k, l) \in (N\mathbb{Z})^2, \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

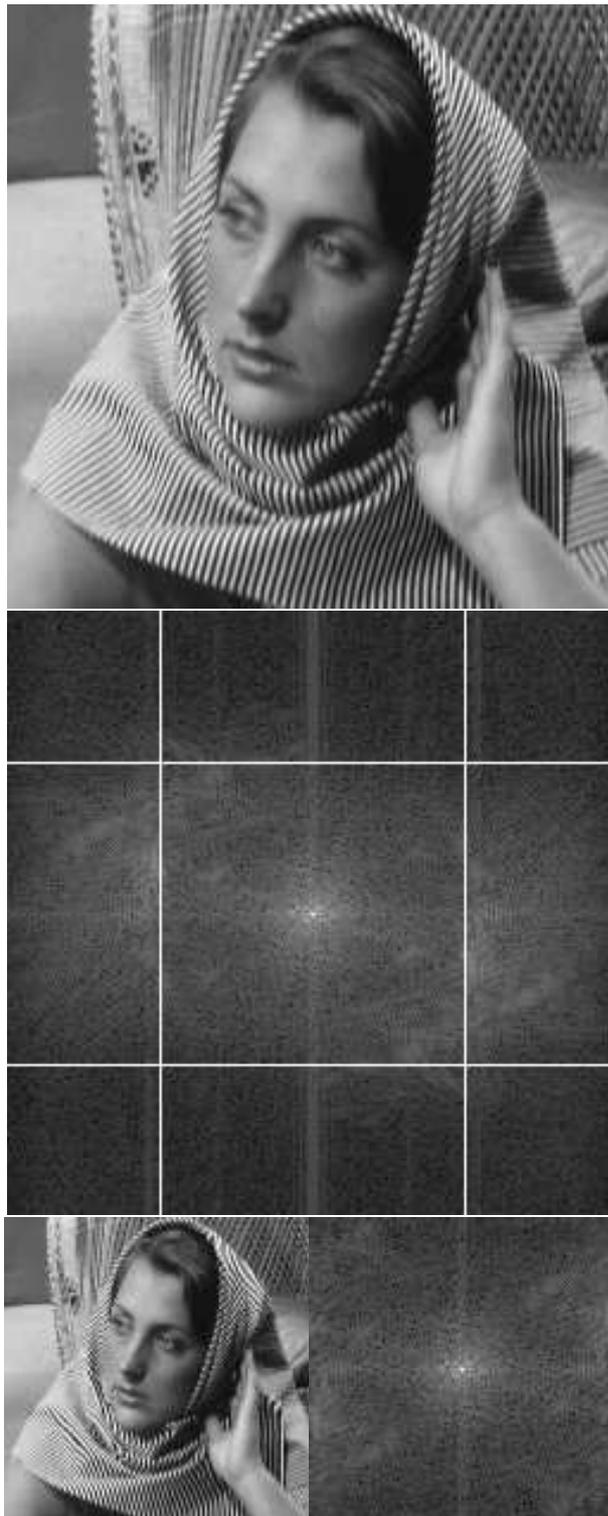


FIGURE 3.2 – Une image et son sous-échantillonnage de niveau 2 et leurs transformées de Fourier.

Preuve. On a en effet, pour tout $(k, l) \in \{1, \dots, KN\}^2$,

$$\begin{aligned}\hat{w}_{k,l} &= \sum_{m,n=1}^{KN} w_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{KN}} \\ &= \sum_{m,n=1}^N w_{Km,Kn} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}} \\ &= \sum_{m=1}^N e^{-2i\pi \frac{km}{N}} \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{ln}{N}}\end{aligned}$$

On obtient alors, comme dans la preuve de la Proposition 12, que :

– Si $(k, l) \in (N\mathbb{Z})^2$,

$$\sum_{m=1}^N e^{-2i\pi \frac{km}{N}} = \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{ln}{N}} = \sum_{n=1}^N 1 = N,$$

et donc $\hat{w}_{k,l} = N^2$.

– Si $(k, l) \notin (N\mathbb{Z})^2$ (par exemple si $k \notin N\mathbb{Z}$) alors en posant $a = e^{-2i\pi \frac{k}{N}}$, on a $a \neq 1$ et

$$\sum_{m=1}^N e^{-2i\pi \frac{km}{N}} = \sum_{m=1}^N a^m = \frac{a^{N+1} - a}{a - 1} = \frac{a - a}{a - 1} = 0,$$

car $a^N = 1$ et donc $\hat{w}_{k,l} = 0$.

□

3.2.4 Théorème d'échantillonnage de Shannon

Tout d'abord, la version la plus connue du théorème de Shannon donne une formule permettant de reconstruire un signal analogique dont le support de la transformée de Fourier est compact, à partir d'une version échantillonnée de ce signal. Nous ne présenterons ici que la version dans laquelle le signal de départ est numérique puisque cela correspond au cadre du cours. Dans cet énoncé, on suppose pour simplifier que N est pair.

Proposition 14 (Shannon)

Soit w une suite finie de nombres réels, définie sur $\{1, \dots, KN\}^2$. On suppose w à bande limitée, c'est à dire que la transformée de Fourier de w est telle que pour tout $(k, l) \in \{-\frac{KN}{2} + 1, \dots, \frac{KN}{2}\}^2$,

$$\hat{w}_{k,l} = 0 \quad , \text{ si } (k, l) \notin \{-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\}^2.$$

On note u le sous-échantillonnage de w défini, pour $(m, n) \in \{1, \dots, N\}^2$, par

$$u_{m,n} = w_{Km,Kn}.$$

On a alors, pour tout $(m, n) \in \{1, \dots, KN\}^2$,

$$w_{m,n} = \sum_{m',n'=1}^N u_{m',n'} \operatorname{sinc}_{m-Km'} \operatorname{sinc}_{n-Kn'}, \quad (3.13)$$

où sinc désigne le sinus cardinal discret et est défini pour $m \in \{-\frac{KN}{2} + 1, \dots, \frac{KN}{2}\}$:

$$\text{sinc}_m = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{(N-1)\pi m}{KN}\right)}{N \sin\left(\frac{\pi m}{KN}\right)} & , \text{ si } m \neq 0, \\ \frac{N-1}{N} & , \text{ sinon.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Pour montrer la Proposition 14, nous commençons par énoncer et montrer quatre Lemmes.

Lemme 1 *Sous les hypothèses de la Proposition 14 on a, pour tout $(k, l) \in \{-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\}^2$,*

$$\hat{u}_{k,l} = \frac{1}{K^2} \hat{w}_{k,l}. \quad (3.15)$$

Preuve. La formule (3.15) découle directement de la formule de Poisson (voir Proposition 12) et de l'hypothèse que w est à bande limitée. On a en effet, pour tout $(k, l) \in \{-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\}^2$,

$$\hat{u}_{k,l} = \frac{1}{K^2} \sum_{t_1=0}^{K-1} \sum_{t_2=0}^{K-1} \hat{w}_{k+t_1N, l+t_2N} \quad (3.16)$$

or, si $t_1 \neq 0$ ou $t_2 \neq 0$, (par exemple, si $t_1 \neq 0$) on a

$$\frac{N}{2} + 1 = -\frac{N}{2} + 1 + N \leq k + t_1N \leq \frac{N}{2} - 1 + (K-1)N = KN - \frac{N}{2} - 1.$$

et donc, comme \hat{w} est KN périodique et à bande limitée, on a

$$\hat{w}_{k+t_1N, l+t_2N} = 0.$$

Finalement, le seul terme non nul de la somme de l'équation (3.16) est le terme correspondant à $t_1 = 0$ et $t_2 = 0$ et on retrouve bien

$$\hat{u}_{k,l} = \frac{1}{K^2} \hat{w}_{k,l}. \quad \square$$

Lemme 2 *Sous les hypothèses de la Proposition 14 on a, pour tout $(m, n) \in \{1, \dots, KN\}^2$*

$$\sum_{m', n'=1}^N u_{m', n'} \text{sinc}_{m-Km'} \text{sinc}_{n-Kn'} = h * \tilde{u}_{m,n} \quad (3.17)$$

avec pour tout $(m, n) \in \{-\frac{KN}{2} + 1, \dots, \frac{KN}{2}\}^2$

$$h_{m,n} = \text{sinc}_m \text{sinc}_n \quad (3.18)$$

et

$$\tilde{u}_{m,n} = \begin{cases} u_{m', n'} & , \text{ si } \exists (m', n') \in \mathbb{Z}^2, (m, n) = (Km', Kn'), \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Preuve. On a bien, pour les signaux h et \tilde{u} définis ci-dessus et pour $(m, n) \in \{1, \dots, KN\}^2$,

$$\begin{aligned}
h * \tilde{u}_{m,n} &= \sum_{m',n'=1}^{KN} \tilde{u}_{m',n'} \operatorname{sinc}_{m-m'} \operatorname{sinc}_{n-n'}, \\
&= \sum_{m',n'=1}^N \sum_{k,l=0}^{K-1} \tilde{u}_{Km'-k,Kn'-l} \operatorname{sinc}_{m-(Km'-k)} \operatorname{sinc}_{n-(Kn'-l)}, \\
&= \sum_{m',n'=1}^N u_{m',n'} \operatorname{sinc}_{m-Km'} \operatorname{sinc}_{n-Kn'}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3 *Sous les hypothèses de la Proposition 14 et en utilisant les notations du Lemme 2, on a, pour tout $(k, l) \in \{-\frac{KN}{2} + 1, \dots, \frac{KN}{2}\}^2$,*

$$\widehat{\tilde{u}}_{k,l} = \hat{u}_{k,l}, \quad (3.19)$$

(où l'on rappelle que \hat{u} de N périodique).

Preuve. L'équation (3.19) découle directement de la définition de \tilde{u} . On a en effet, pour tout $(k, l) \in \{-\frac{KN}{2} + 1, \dots, \frac{KN}{2}\}^2$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\tilde{u}}_{k,l} &= \sum_{m,n=1}^{KN} \tilde{u}_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{KN}} \\
&= \sum_{m',n'=1}^N \sum_{k,l=0}^{K-1} \tilde{u}_{Km'-k,Kn'-l} e^{-2i\pi \frac{k(Km'-k)+l(Kn'-l)}{KN}} \\
&= \sum_{m',n'=1}^N u_{m',n'} e^{-2i\pi \frac{kKm'+lKn'}{KN}} \\
&= \hat{u}_{k,l}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 4 *Sous les hypothèses de la Proposition 14 et en utilisant les notations du Lemme 2 on a, pour tout $(k, l) \in \{-\frac{KN}{2} + 1, \dots, \frac{KN}{2}\}^2$, on a*

$$\hat{h}_{k,l} = \begin{cases} K^2 & , \text{ si } (k, l) \in \{-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\}^2, \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases} \quad (3.20)$$

Preuve. On montre ce point en vérifiant que la transformée de Fourier inverse appliquée à (3.20) permet bien de retrouver la formule définissant h : (3.18) et (3.14).

Si l'on note

$$\hat{h}'_{k,l} = \begin{cases} K^2 & , \text{ si } (k, l) \in \{-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\}^2, \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a donc, pour $(m, n) \in \{-\frac{KN}{2} + 1, \dots, \frac{KN}{2}\}^2$,

$$\begin{aligned} h'_{m,n} &= \frac{1}{(KN)^2} \sum_{k,l=-\frac{KN}{2}+1}^{\frac{KN}{2}} \hat{h}'_{k,l} e^{2i\pi \frac{km+ln}{KN}} = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} e^{2i\pi \frac{km+ln}{KN}} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} e^{2i\pi \frac{km}{KN}} \sum_{l=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} e^{2i\pi \frac{ln}{KN}} \\ &= \text{sinc}'_m \text{sinc}'_n, \end{aligned}$$

où l'on a défini sinc' par

$$\text{sinc}'_m = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} e^{2i\pi \frac{km}{KN}}.$$

Pour finir de montrer le lemme, nous allons montrer que $\text{sinc}' = \text{sinc}$. On a, tout d'abord, si $m = 0$

$$\text{sinc}'_m = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} 1 = \frac{N-1}{N},$$

qui vaut bien sinc_m , pour $m = 0$.

Si $m \neq 0$, on a en posant $a = e^{2i\pi \frac{m}{KN}}$

$$\begin{aligned} \text{sinc}'_m &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} e^{2i\pi \frac{(k-\frac{N}{2})m}{KN}}, \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} a^{k-\frac{N}{2}}, \\ &= \frac{1}{N} a^{-\frac{N}{2}} \frac{a^N - a}{a - 1}, \\ &= \frac{1}{N} \frac{a^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}} - a^{-\frac{N}{2}+\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})}, \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\pi \frac{m(N-1)}{KN}\right)}{\sin\left(\pi \frac{m}{KN}\right)}, \\ &= \text{sinc}_m. \end{aligned}$$

□

Preuve de la Proposition 14

Tout d'abord, rappelons que du fait de (3.17), pour prouver la Proposition 14 il suffit de montrer que

$$w = h * \tilde{u}.$$

Or la transformée de Fourier du terme de droite ci-dessus vaut

$$\widehat{h * \tilde{u}}_{k,l} = \hat{h}_{k,l} \widehat{\tilde{u}}_{k,l},$$

pour tout $(k, l) \in \{-\frac{KN}{2} + 1, \dots, \frac{KN}{2}\}^2$. En utilisant (3.20), ceci donne donc

$$\widehat{h * \tilde{u}}_{k,l} = \begin{cases} K^2 \widehat{\tilde{u}}_{k,l} & , \text{ si } (k, l) \in \{-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\}^2, \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

On en déduit finalement, en utilisant (3.19), (3.15) et l'hypothèse que w est à bande limitée, que

$$\widehat{h * \tilde{u}}_{k,l} = K^2 \frac{1}{K^2} \widehat{w}_{k,l} = \widehat{w}_{k,l}.$$

Ceci implique bien l'énoncé de la proposition : (3.13). □

Ceci implique donc que l'on peut reconstruire un signal à bande limitée, à partir d'une version échantillonnée de ce signal. Cette proposition est très importante car de nombreux signaux et images sont à bande limitée ou sont presque à bande limitée. Ainsi, par exemple, l'oreille humaine ne perçoit qu'une bande de fréquence et elle ne distingue donc pas un signal (i.e. un son, une musique...) échantillonnée d'un signal non échantillonné. Ceci est un peu moins vrai en traitement d'images, car les images contiennent souvent des bords nets (des discontinuités) et ne sont donc pas à bande limitée. Des approximations à bande limitée de telles images seront ainsi toujours un peu floues. Ceci dépend évidemment de la nature des images considérées et du capteur les ayant générées.

3.2.5 Bruit et transformée de Fourier

L'intérêt de l'hypothèse que nous avons faite sur le bruit (il est Gaussien) est que sa transformée de Fourier reste un bruit Gaussien. (En effet, la loi d'une somme de bruits indépendants est la convolution des lois des bruits. De plus, une convolution de fonctions Gaussiennes reste une Gaussienne.)

De plus, pour tout $(k, l) \in \{1, \dots, N\}^2$, son espérance vaut

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{b}_{k,l}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{m,n=1}^N b_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}}\right) \\ &= \sum_{m,n=1}^N \mathbb{E}(b_{m,n}) e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On peut aussi calculer sa variance qui vaut, quel que soit $(k, l) \in \{1, \dots, N\}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\widehat{b}_{k,l}|^2) &= \mathbb{E}\left(\left|\sum_{m,n=1}^N b_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}}\right|^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{m,n=1}^N b_{m,n} e^{-2i\pi \frac{km+ln}{N}}\right)\left(\sum_{m',n'=1}^N b_{m',n'} e^{2i\pi \frac{km'+ln'}{N}}\right)\right) \\ &= \sum_{m,n=1}^N \sum_{m',n'=1}^N \mathbb{E}(b_{m,n} b_{m',n'}) e^{-2i\pi \frac{k(m-m')+l(n-n')}{N}}. \end{aligned}$$

Or, si $m \neq m'$ ou $n \neq n'$, comme les différentes valeurs de b sont indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(b_{m,n} b_{m',n'}) = \mathbb{E}(b_{m,n}) \mathbb{E}(b_{m',n'}) = 0.$$

Si, au contraire, $m = m'$ et $n = n'$,

$$\mathbb{E}(b_{m,n}b_{m',n'}) = \mathbb{E}((b_{m,n})^2) = \sigma^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\hat{b}_{k,l}|^2) &= \sum_{m,n=1}^N \sigma^2 \\ &= N^2 \sigma^2.\end{aligned}$$

Par contre, les $\hat{b}_{k,l}$ ne sont pas des variables aléatoires indépendantes. On a en effet toujours

$$\hat{b}_{k,l}^* = \hat{b}_{-k,-l}$$

Chapitre 4

Quelle base pour représenter des images

4.1 Fourier : une base parmi d'autres

La notion de base vient de l'algèbre linéaire. Nous resterons ici en dimension finie. Plus précisément, une base de \mathbb{R}^{N^2} (ou \mathbb{C}^{N^2}) est un ensemble $(e^{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$, tel que pour tout $(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2$, $e^{k,l} \in \mathbb{R}^{N^2}$ (ou \mathbb{C}^{N^2}) tel que

$$\forall v \in \mathbb{R}^{N^2}, \exists ! (\lambda_{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2} \in \mathbb{R}^{N^2}, \text{ tel que } v = \sum_{k,l=0}^{N-1} \lambda_{k,l} e^{k,l}.$$

(Ci-dessus, il faut remplacer tous les \mathbb{R}^{N^2} par des \mathbb{C}^{N^2} , dans le cas de l'espace \mathbb{C}^{N^2} .)

Exemple : Il est facile de voir que $(\delta^{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$ est une base de \mathbb{R}^{N^2} , pour

$$\delta_{m,n}^{k,l} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } (m,n) = (k,l), \\ 0 & , \text{ si } (m,n) \neq (k,l). \end{cases}$$

Dans ce cas, l'élément $\delta^{k,l}$ est une image ayant tous ses pixels à 0, et seul le pixel (k,l) est à 1. Les coordonnées d'une image v dans cette base sont simplement les valeurs de ses niveaux de gris. On l'appelle la base canonique.

Le cas de Fourier correspond à une base de \mathbb{C}^{N^2} , constituée des éléments $(e^{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$, avec pour tout (k,l) ,

$$e_{m,n}^{k,l} = e^{2i\pi \frac{km+ln}{N}}, \text{ pour } (m,n) \in \{0, \dots, N-1\}^2. \quad (4.1)$$

Cela n'est en effet pas très difficile à voir (voir Proposition 9 et remarquer qu'il y a N^2 éléments $e^{k,l}$). Comme nous l'avons vu, le fait que les images soient en fait dans \mathbb{R}^{N^2} ne pose pas de difficulté. Cela se traduit juste par une équation qui est satisfaite par nos images (voir (3.9)).

On peut interpréter les résultats que nous avons déjà vus, dans ce contexte. Ainsi, la Proposition 9 nous dit que les coefficients de Fourier sont les coordonnées d'une image dans la base de Fourier. La FFT est donc simplement un changement de base. (On passe de la base $(\delta^{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$ vue en exemple à la base de Fourier, ou l'inverse.)

De même, la Proposition 10 nous dit qu'une convolution est un opérateur diagonal dans la base de Fourier. Ses valeurs propres sont les coefficients de Fourier du noyau de convolution.

La Proposition 11 nous garantit que la base de Fourier est une base orthogonale.

En résumé, toutes les propriétés que nous avons vues (et qui nous permettront d'obtenir les algorithmes de traitement d'images) se traduisent en terme de propriétés sur les bases.

En fait, quelque soit l'application sur laquelle on travaille, en traitement d'images, on peut toujours choisir une base particulière. Dans certains cas, on préférera la base canonique, Fourier, ou on peut créer une base qui aurait de bonnes propriétés vis-à-vis de l'application visée.

Nous allons voir dans la suite d'autres bases qui sont très utilisées pour la compression et la restauration d'images. Avant cela, nous présentons quelques propriétés reliant la "décroissance des coordonnées" et la performance d'algorithmes d'approximation (compression) et d'estimation (débruitage). Celles-ci indiquent clairement qu'une qualité essentielle pour une base est sa capacité compresser l'image sur peu de coordonnées.

4.2 Compressibilité et erreur d'approximation

Nous nous placerons ici dans le où un élément de $v \in \mathbb{R}^N$ est approximé par ses K plus grandes coordonnées dans une base orthonormée décrite par une matrice unitaire B de taille $N \times N$. La base orthonormée décrite par B peut, par exemple, être une base de Fourier ou une base d'ondelette décrite dans la suite du cours.

Pour simplifier les notations, on note x les coordonnées de v dans la base B

$$x = B^* v \in \mathbb{R}^N.$$

On définit aussi le support $S \subset \{1, \dots, N\}$ contenant les indices des K entrées de x les plus grandes (en valeurs absolues). On note aussi

$$\varepsilon = \min_{k \in S} |x_k|.$$

On a donc

$$\#S = K \quad \text{et} \quad \forall k \in S, k' \notin S, |x_k| \geq \varepsilon \geq |x_{k'}|. \quad (4.2)$$

On note

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_k)_{k=1..N} \quad \text{avec} \quad \tilde{x}_k = \begin{cases} x_k & , \text{ si } k \in S, \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases} \quad (4.3)$$

On définit l'approximation à K termes de v par

$$\tilde{v} = B\tilde{x}.$$

On note, pour tout $p \in]0, +\infty]$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$

$$\|x\|_p = \begin{cases} (\sum_{k=1}^N |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} & , \text{ si } p < +\infty, \\ \max_{k=1..N} |x_k| & , \text{ si } p = +\infty. \end{cases}$$

On se sert de ces normes l^p (ou fonctions l^p lorsque $p < 1$) pour mesurer l'erreur d'approximation $x - \tilde{x}$ sur les coordonnées de v et \tilde{v} . Il faut noter que la mesure de l'erreur $x - \tilde{x}$ sur les coordonnées est égale à la mesure de l'erreur $v - \tilde{v}$ entre les images, lorsque nous la mesurons en norme l^2 .

On se sert aussi des normes l^q , $q \in]0, +\infty]$, pour caractériser la décroissance des coordonnées. Avant de définir la compressibilité, on remarque que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $q \geq 0$

$$\|x\|_q = \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^N \|x\|_\infty^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_\infty N^{\frac{1}{q}}.$$

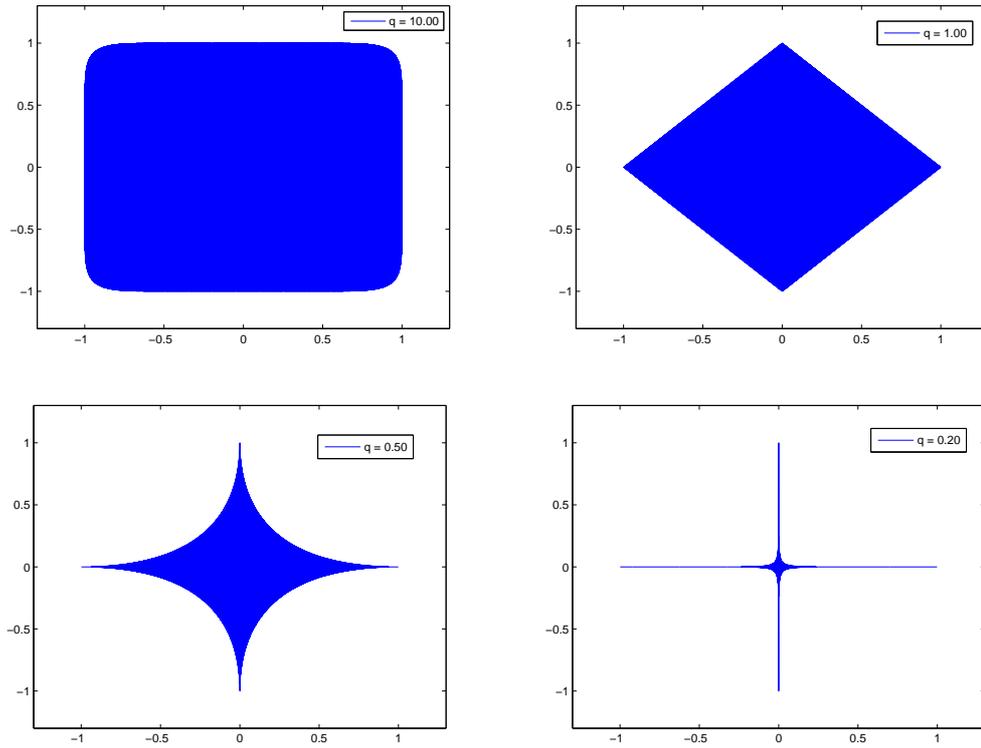


FIGURE 4.1 – Boules unités pour différentes normes l^q ($q = 10, 1, 0.5$ et 0.2). Les points x sont d'autant plus proches des axes qu'ils sont dans une boule l^q pour q petit.

On dira que x est *compressible* s'il est tel que

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|_\infty} \ll N^{\frac{1}{q}}$$

pour q petit (ex : $q \leq 1$) x a peu de grandes coordonnées et beaucoup de petites. On dira que ces coordonnées (sous-entendu, après avoir été ré-ordonnées dans un ordre décroissant) décroissent très rapidement. Ce point est illustré sur la Figure 4.1 sur laquelle sont représentées les boules unités pour plusieurs valeurs de q .

Proposition 15 Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et \tilde{x} défini par (4.3), on a pour $+\infty \geq p \geq q \geq 0$

$$\|x - \tilde{x}\|_p \leq \|x\|_q K^{-r},$$

pour $r = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \geq 0$, pour $p < +\infty$; $r = \frac{1}{q}$, pour $p = +\infty$; et $r = 0$, pour $p = q = +\infty$.

Preuve. Tout d'abord, si $q = +\infty$, on a bien sûr, $p = +\infty$ et

$$\|x - \tilde{x}\|_p \leq \varepsilon \leq \|x\|_q.$$

Supposons maintenant que $q < +\infty$, on commence par remarquer que

$$\|x\|_q^q = \sum_{k=1}^N |x_k|^q \geq \sum_{k \in S} |x_k|^q \geq \varepsilon^q K,$$

et donc

$$\varepsilon \leq \|x\|_q K^{-\frac{1}{q}}.$$

Remarquez que, lorsque $p = +\infty$ et $q < +\infty$, on obtient immédiatement l'énoncé de la proposition en utilisant aussi (4.2). En effet :

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty = \max_{k \notin S} |x_k| \leq \varepsilon \leq \|x\|_q K^{-\frac{1}{q}}.$$

Lorsque $p < +\infty$ (on a donc aussi $q < +\infty$), on remarque aussi que, comme $p - q \geq 0$, on a pour tout $k \notin S$

$$\begin{aligned} |x_k| \leq \varepsilon & \quad \text{et donc} & \quad |x_k|^{p-q} \leq \varepsilon^{p-q}, \\ & \quad \text{et donc} & \quad |x_k|^p \leq \varepsilon^{p-q} |x_k|^q. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}\|_p^p &= \sum_{k \notin S} |x_k|^p, \\ &\leq \varepsilon^{p-q} \sum_{k \notin S} |x_k|^q, \\ &\leq \left(\|x\|_q K^{-\frac{1}{q}} \right)^{p-q} \|x\|_q^q, \\ &\leq \|x\|_q^p K^{-\frac{p-q}{q}} = \|x\|_q^p K^{-p \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)} = \|x\|_q^p K^{-pr}, \end{aligned}$$

où r est défini dans l'énoncé. On conclut en mettant à la puissance $\frac{1}{p}$ (≥ 0) les termes de gauche et de droite de cette série d'inégalités. \square

Notez que, au regard de la preuve ci-dessus, la proposition est en fait vraie pour $x \in \ell^q(\mathbb{N})$. Ceci correspond à la notion de compressibilité dans le cas d'un espace de dimension infini.

Cette proposition formalise le fait que l'on aura une petite erreur d'approximation lorsque les coordonnées de x décroissent fortement. En effet, on a une erreur d'approximation $\|x - \tilde{x}\|_p$ faible, lorsque $\|x\|_q$ est faible pour r grand, c'est à dire pour $q \ll p$. Si, par exemple, on mesure l'erreur en norme l^2 , cela veut dire que l'on veut x aillant une norme l^q faible pour q petit (par exemple égal 1 ou inférieur à 1).

Une variable aléatoire décrivant des images/signaux inclut dans un ensemble $V \subset \mathbb{R}^N$ est compressible dans la base B si tous les images/signaux de cet ensemble ont des coordonnées x telles que

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|_\infty} \ll N^{\frac{1}{q}} \quad \text{pour } q \text{ faible.} \quad (4.4)$$

On a, en effet, toujours

$$\|x\|_q^q \leq N \|x\|_\infty^q \quad \text{et donc} \quad [\|x\|_q \leq N^{\frac{1}{q}} \|x\|_\infty].$$

Il faut noter, finalement, que la Proposition 15 et sa preuve sont aussi vraies pour $x \in \ell^q$, une suite infinie dont la somme des modules des termes à la puissance $q \geq 0$ existe.

Des énoncés complémentaires à ce cours, mais que nous n'aborderons pas, caractérisent la compressibilité de différentes classes de fonctions (définies sur \mathbb{R}^2 ou $[0, N]^2$) dans différentes bases, en fonction de leur régularité.

4.3 Compressibilité et erreur d'estimation

Dans cette section, on considère un simple problème de débruitage, dans lequel

$$u_{m,n} = v_{m,n} + b_{m,n} \quad , \text{ pour tout } (m,n) \in \{1, \dots, N\}^2,$$

pour une image idéale v et un bruit blanc Gaussien centré de variance σ^2 , noté b . Pour simplifier les notations, les notations u et b désignent suivant le contexte les variables aléatoires ou une de leur réalisation.

Dans cette section, on voit les images comme un élément de \mathbb{R}^{N^2} et on suppose que l'on dispose d'une base orthonormée décrite par une matrice B telle que v soit compressible dans cette base. On note les coordonnées de nos images

$$y = B^* u \quad , \quad x = B^* v \quad \text{et} \quad z = B^* b.$$

Là encore, nous abusons des notations et utilisons y et z pour désigner des variables aléatoires et une de leur réalisation.

Remarquons tout d'abord (résultat admis) que comme b est blanc Gaussien centré, de variance σ^2 et que B est unitaire, z est aussi un bruit blanc Gaussien centré, de variance σ^2 . On a donc, pour tout $k \in \{1, \dots, N^2\}$

$$\mathbb{E}(z_k) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(z_k^2) = \sigma^2.$$

4.3.1 Deux estimateurs oracles

On considère ici une première classe d'estimateur oracle (i.e. : un estimateur que l'on ne peut pas utiliser en pratique car il suppose l'usage d'information dont nous ne disposons pas). Pour reconstruire v , à partir de u , cet estimateur multiplie chaque coordonnée y_k de u par un nombre $t_k \in \mathbb{R}$ pré-déterminé. L'estimateur bénéficie d'un oracle local lui indiquant la valeur x_k , mais il ne connaît pas z_k . De plus, t_k est déterminé à l'avance et ne dépend pas de y . On a donc une image estimée définie par

$$\tilde{v} = B\tilde{x},$$

où, pour tout $k = 1..N$,

$$\tilde{x}_k = t_k y_k. \tag{4.5}$$

Pour un tel estimateur, on peut estimer la norme de l'erreur commise. On a, pour la norme l^2 ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|v - \tilde{v}\|_2^2) &= \mathbb{E}(\|x - \tilde{x}\|_2^2) = \sum_{k=1}^{N^2} \mathbb{E}((x_k - \tilde{x}_k)^2) \\ &= \sum_{k=1}^{N^2} \mathbb{E}((x_k - t_k(x_k + z_k))^2) \\ &= \sum_{k=1}^{N^2} \mathbb{E}((x_k(1 - t_k) - t_k z_k)^2) \\ &= \sum_{k=1}^{N^2} \mathbb{E}((x_k(1 - t_k))^2 - 2t_k z_k x_k(1 - t_k) + (t_k z_k)^2) \\ &= \sum_{k=1}^{N^2} x_k^2(1 - t_k)^2 + t_k^2 \sigma^2 \\ &= \sum_{k=1}^{N^2} (x_k^2 + \sigma^2) t_k^2 - 2x_k^2 t_k + x_k^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

On trouve donc facilement que la valeur de t_k donnant la plus petite erreur est celle annulant la dérivée en t_k

$$2(x_k^2 + \sigma^2)t_k - 2x_k^2$$

du terme à l'intérieur de la somme et vaut

$$t_k^* = \frac{x_k^2}{x_k^2 + \sigma^2}. \quad (4.7)$$

On a alors

$$\mathbb{E}(\|v - \tilde{v}\|_2^2) = \sum_{k=1}^{N^2} \frac{\sigma^2 x_k^2}{(x_k^2 + \sigma^2)}.$$

Pour bien comprendre la formule ci-dessus, on considère un estimateur oracle de seuillage dur dont on montrera qu'il a essentiellement les mêmes performances.

On prend donc :

$$t'_k = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x_k \geq \sigma, \\ 0 & , \text{ si } x_k < \sigma. \end{cases} \quad (4.8)$$

Pour cet estimateur, la contribution à l'erreur de chaque k vaut (voir (4.6))

$$x_k^2(1 - t'_k)^2 + t_k'^2 \sigma^2 = \begin{cases} \sigma^2 & , \text{ si } x_k \geq \sigma, \\ x_k^2 & , \text{ si } x_k < \sigma, \end{cases}$$

On a alors pour le seuillage dur

$$x_k^2(1 - t'_k)^2 + t_k'^2 \sigma^2 = \min(x_k^2, \sigma^2).$$

Finalement, l'erreur commise lorsque l'on utilise l'estimateur oracle définie par (4.8) vaut

$$\mathbb{E}(\|v - \tilde{v}\|_2^2) = \sum_{k=1}^{N^2} \min(x_k^2, \sigma^2).$$

Comme annoncé précédemment, les erreurs commises par ces deux estimateurs oracles sont de même ordre, on a en effet

$$\min(x_k^2, \sigma^2)(x_k^2 + \sigma^2) \leq x_k^2 \sigma^2 + x_k^2 \sigma^2$$

et donc

$$\frac{1}{2} \min(x_k^2, \sigma^2) \leq \frac{x_k^2 \sigma^2}{x_k^2 + \sigma^2}.$$

On obtient par ailleurs facilement que

$$\frac{x_k^2 \sigma^2}{x_k^2 + \sigma^2} \leq \min(x_k^2, \sigma^2).$$

On a donc finalement pour l'atténuation oracle (4.7), en sommant sur k

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N^2} \min(x_k^2, \sigma^2) \leq \mathbb{E}(\|v - \tilde{v}\|_2^2) \leq \sum_{k=1}^{N^2} \min(x_k^2, \sigma^2).$$

Les deux erreurs ont donc bien le même ordre de grandeur.

Ceci montre d'une part que l'estimateur de seuillage dur défini par (4.8) et (4.5) est presque aussi bon que l'estimateur oracle idéal. En ajustant le seuil à la valeur (sans oracle)

$$t_k = \sigma \sqrt{2 \ln(N^2)},$$

on pourrait montrer que le seuillage dur fournit toujours une erreur de même ordre de grandeur (modulo un facteur multiplicatif $\ln(N)$).

Cette analyse illustre aussi que, si l'on note

$$S = \{k \in \{1, \dots, N^2\} \mid x_k^2 \geq \sigma^2\},$$

et $K = \#S$, on a, en utilisant la Proposition 15,

$$\mathbb{E}(\|v - \tilde{v}\|_2^2) \leq \sum_{k=1}^{N^2} \min(x_k^2, \sigma^2) = \sum_{k \in S} \sigma^2 + \sum_{k \notin S} x_k^2 \leq K\sigma^2 + \|x\|_q K^{-r}.$$

Ce dernier terme est petit si K est l'erreur d'approximation $\|x\|_q K^{-r}$ sont tous les deux petits. C'est à dire si x est bien compressible dans la base B .

4.4 Conclusion sur la compressibilité

On a illustré dans les chapitres précédents l'importance de la compressibilité dans une base B , telle qu'elle est décrite par l'équation (4.4). Cette propriété garantit que les données (signaux/images) compressibles seront bien approximées et débruités à l'aide d'opérations simples sur leurs coordonnées dans cette base B . Au delà des exemples donnés, c'est une propriété cruciale que l'on retrouve très souvent dans les méthodes les plus évoluées du traitement d'image et du signal. Au delà de ces disciplines, la représentation des données dans une base permettant de la compresser est un exemple important des méthodes de "réduction de dimension" qui sont au cœur de nombreuses applications des mathématiques.

Les bases de cosinus et d'ondelettes qui sont présentées dans la suite du polycopié sont des exemples importants de bases permettant de compresser des signaux et des images. Ces bases sont par exemple utilisés dans les standards de compression des signaux et des images tels que MP3, JPEG et JPEG2000.

Chapitre 5

Bases de cosinus et cosinus locaux

5.1 Les cosinus

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la base de Fourier est périodique. On a, pour $e^{k,l}$ défini par (4.1) et quelque soit $(m,n) \in \{0, \dots, N-1\}^2$

$$\begin{aligned} e_{m,n}^{k,l} &= e^{2i\pi \frac{km+ln}{N}} \\ &= e^{2i\pi \frac{k(m+N)+l(n+N)}{N}} \\ &= e_{m+N,n+N}^{k,l}. \end{aligned}$$

Ceci crée souvent un brusque changement près des bords de l'image. Ce n'est pas souhaitable pour (au moins) deux raisons :

- Dans les traitements utilisant la transformée de Fourier (par exemple la convolution), on aura souvent des problèmes près des bords puisque l'on utilise de l'information provenant de deux côtés opposés de l'image.
- On a vu que la régularité d'une image est liée à la décroissance des coefficients de Fourier (pour les hautes fréquences). La discontinuité que l'on crée près des bords de l'image se traduit donc par des "grands" coefficients de Fourier. (Ce qui n'est pas souhaitable pour des application comme la compression où l'on cherche à avoir le moins de grands coefficients possible.)

La base de cosinus a donc été introduite pour éviter ce défaut. Elle ressemble beaucoup à la base de Fourier. En fait, c'est, à peu de choses près, la transformée de Fourier de l'image périodisée. Plus précisément, on prolonge une suite finie $(w_{m,n})_{(m,n) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$, en la suite finie $(\tilde{w}_{m,n})_{(m,n) \in \{0, \dots, 2N-1\}^2}$, en posant

$$\tilde{w}_{m,n} = \tilde{w}_{m,2N-1-n} = \tilde{w}_{2N-1-m,n} = \tilde{w}_{2N-1-m,2N-1-n} = w_{m,n} \quad (5.1)$$

pour $(m,n) \in \{0, \dots, N-1\}^2$.

Si l'on note $(\hat{w}_{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, 2N-1\}^2}$, la transformée de Fourier de \tilde{w} , on a (voir Proposition 9 et (5.1))

$$\begin{aligned} w_{m,n} &= \frac{1}{(2N)^2} \sum_{k,l=0}^{2N-1} \hat{w}_{k,l} e^{2i\pi \frac{km+ln}{2N}} \\ &= \frac{1}{(2N)^2} \sum_{k,l=0}^{2N-1} \hat{w}_{k,l} e^{2i\pi \frac{k(2N-1-m)+ln}{2N}} \\ &= \frac{1}{(2N)^2} \sum_{k,l=0}^{2N-1} \hat{w}_{k,l} e^{2i\pi \frac{km+l(2N-1-n)}{2N}} \\ &= \frac{1}{(2N)^2} \sum_{k,l=0}^{2N-1} \hat{w}_{k,l} e^{2i\pi \frac{k(2N-1-m)+l(2N-1-n)}{2N}}. \end{aligned}$$

En sommant ces égalités, on obtient

$$w_{m,n} = \frac{1}{(2N)^2} \sum_{k,l=0}^{2N-1} \hat{w}_{k,l} e^{-2i\pi \frac{k}{4N}} \cos\left(2\pi \frac{k(m+\frac{1}{2})}{2N}\right) e^{-2i\pi \frac{l}{4N}} \cos\left(2\pi \frac{l(n+\frac{1}{2})}{2N}\right), \quad (5.2)$$

car

$$\begin{aligned} A &= e^{2i\pi \frac{km+ln}{2N}} + e^{2i\pi \frac{k(2N-1-m)+ln}{2N}} + e^{2i\pi \frac{km+l(2N-1-n)}{2N}} + e^{2i\pi \frac{k(2N-1-m)+l(2N-1-n)}{2N}} \\ &= \left(e^{2i\pi \frac{km}{2N}} + e^{2i\pi \frac{k(2N-1-m)}{2N}} \right) \left(e^{2i\pi \frac{ln}{2N}} + e^{2i\pi \frac{l(2N-1-n)}{2N}} \right) \\ &= e^{-2i\pi \frac{k}{4N}} 2 \cos\left(2\pi \frac{k(m+\frac{1}{2})}{2N}\right) e^{-2i\pi \frac{l}{4N}} 2 \cos\left(2\pi \frac{l(n+\frac{1}{2})}{2N}\right). \end{aligned}$$

Enfin, on peut simplifier (5.2) en remarquant que, pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$ et tout $m \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\cos\left(2\pi \frac{(2N-k)(m+\frac{1}{2})}{2N}\right) = -\cos\left(2\pi \frac{k(m+\frac{1}{2})}{2N}\right),$$

$$e^{-2i\pi \frac{(2N-k)}{4N}} \hat{w}_{2N-k,l} = -e^{-2i\pi \frac{k}{4N}} \hat{w}_{k,l}$$

et que

$$\cos\left(2\pi \frac{N(m+\frac{1}{2})}{2N}\right) = \cos(m\pi + \frac{\pi}{2}) = 0.$$

On a donc

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \hat{w}_{k,l} e^{-2i\pi \frac{k}{4N}} \cos\left(2\pi \frac{k(m+\frac{1}{2})}{2N}\right) = \hat{w}_{0,l} \cos\left(2\pi \frac{0(m+\frac{1}{2})}{2N}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} 2\hat{w}_{k,l} e^{-2i\pi \frac{k}{4N}} \cos\left(2\pi \frac{k(m+\frac{1}{2})}{2N}\right).$$

En faisant la même simplification pour la somme en l , on voit finalement que l'on peut exprimer w comme une somme de la forme

$$w_{m,n} = \frac{1}{(2N)^2} \sum_{k,l=0}^{N-1} c_{k,l} \cos\left(\pi \frac{k(m+\frac{1}{2})}{N}\right) \cos\left(\pi \frac{l(n+\frac{1}{2})}{N}\right), \quad (5.3)$$

pour des valeurs appropriées $(c_{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$.

Ceci conduit à considérer la base constituée des éléments $(c^{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$, avec

$$c_{m,n}^{k,l} = \cos\left(\pi \frac{k(m + \frac{1}{2})}{N}\right) \cos\left(\pi \frac{l(n + \frac{1}{2})}{N}\right), \quad (5.4)$$

pour $(m, n) \in \{0, \dots, N-1\}^2$.

Le fait que pour tout $w \in \mathbb{R}^{N^2}$ il existe $(c_{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$ vérifiant (5.3) et que $(c^{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$ contienne N^2 éléments nous garantit que $(c^{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$ est bien une base. Les coordonnées de w dans cette base pourrait être explicités en détaillant plus que nous ne l'avons fait les calculs menant à (5.3). (Il suffirait d'exprimer complètement les valeurs $(c_{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$.) Il n'est pas très difficile de voir que la base de cosinus ainsi obtenue est orthogonale (on pourrait facilement la normaliser).

On ne donnera pas plus de détails sur la base de cosinus. Il faut tout de même savoir que, comme la base de Fourier, il existe un algorithme de complexité $N^2 \log N$ (pour une image $N \times N$) permettant de calculer les coordonnées d'une image dans la base de cosinus. Cet algorithme s'appelle la "Discrete Cosine Transform" (DCT).

5.2 Les cosinus locaux

La base de cosinus que nous avons vue au chapitre précédent présente encore un gros défaut : Elle est globale. En effet, les fonctions (5.4) sont supportées par $\{0, \dots, N-1\}^2$ tout entier. Ainsi, si on modifie une image sur zone (même très petite), toute ses coordonnées, dans la base de cosinus, sont modifiées...

(On rappelle que pour une base orthogonale $(e^{k,l})_{(k,l) \in \{0, \dots, N-1\}^2}$ de \mathbb{R}^{N^2} , la coordonnée $\lambda_{k,l}$ d'une image v est

$$\lambda_{k,l} = \frac{1}{\alpha_{k,l}} \sum_{m,n=0}^{N-1} v_{m,n} e_{m,n}^{k,l},$$

avec

$$\alpha_{k,l} = \sum_{m,n=0}^{N-1} e_{m,n}^{k,l} e_{m,n}^{k,l}.$$

Une première approche (qui est utilisée par le standard de compression JPEG) consiste à découper notre image en sous-images de taille 8×8 et à utiliser une base de cosinus sur chacune des sous-images. On a ainsi "localisé" la base de cosinus.

Il est clair que les fonctions ainsi obtenues forment une base orthogonale, car les fenêtres 8×8 sont disjointes et il n'y a pas de trou entre les sous-images. (On ne considère pas ici le cas où la taille de l'image de départ n'est pas un multiple de 8.)

On remarque aussi l'importance de localiser une base de cosinus et non une base de Fourier. En effet, comme on utilise beaucoup de sous-images, les défauts que l'on observe sur les bords de l'image, lorsque l'on utilise la base de Fourier, auraient eu lieu aux bords des sous-images. C'est-à-dire partout... De même, les grands coefficients créés par la périodisation, lorsque l'on utilise la base de Fourier, auraient été présents pour chaque sous-image. Ils auraient ainsi été très nombreux.

Chapitre 6

Bases d'ondelettes discrètes

6.1 Objectif

Nous avons vu jusque-là des bases dont les éléments étaient soit très bien localisés en espace (la base canonique) soit très bien localisés en fréquence (la base de Fourier et la base de cosinus). La seule base "intermédiaire" est la base de cosinus locaux. Elle est à la fois localisée en espace (un coefficient ne dépend que des valeurs de l'image dans une sous-image de taille 8×8) et en fréquence (un coefficient représente l'importance d'une fréquence dans une fenêtre 8×8).

Les ondelettes (et paquets d'ondelettes) nous fourniront toute une palette pour les localisations en espace et en fréquence. La décomposition en ondelettes présente aussi l'avantage de représenter l'information contenue dans l'image de façon "multi-résolution". Intuitivement, cela reviendrait à choisir automatiquement la meilleure taille possible pour les sous-images pour la base de cosinus locaux. (8×8 semble en effet un peu arbitraire.)

Nous recommandons la lecture de [2, 3, 1], pour tout ce qui touche aux ondelettes.

6.2 Des bancs de filtres aux ondelettes, en dimension 1

Les ondelettes sont en fait un cas particulier de bancs de filtres ("filter banks", en anglais). Afin d'introduire ces notions, on va considérer le cas d'un signal.

Soit $u \in \mathbb{R}^N$ (on suppose que N est pair), $h, g, \tilde{h}, \tilde{g}$ des noyaux de convolution, définis sur $\{0, \dots, N-1\}$.

On note

$$u_m^1 = (\bar{h} * u)_{2m} \text{ et } u_m^2 = (\bar{g} * u)_{2m}, \text{ pour } m \in \{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\}. \quad (6.1)$$

On note ici $\bar{h}_m = h_{-m}$ (on a dans le domaine de Fourier, $\widehat{\bar{h}}_k = \widehat{h}_k^*$, où $*$ désigne le nombre complexe conjugué.)

Ceci correspond à une décomposition.

Pour la recombinaison, on note

$$\tilde{u}_m^1 = \begin{cases} u_m^1 & , \text{ si } m \text{ est pair,} \\ 0 & , \text{ si } m \text{ est impair,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{u}_m^2 = \begin{cases} u_m^2 & , \text{ si } m \text{ est pair,} \\ 0 & , \text{ si } m \text{ est impair,} \end{cases}$$

On note

$$v = \tilde{h} * \tilde{u}^1 + \tilde{g} * \tilde{u}^2 \quad (6.2)$$

qui est le résultat de la recombinaison.

En résumé, on a défini deux opérations :

– Une décomposition : on a décomposé un signal de taille N en deux signaux de tailles $\frac{N}{2}$. Remarquez que cette décomposition est un opérateur linéaire.

– Une recombinaison : on a construit un signal de taille N à partir de deux signaux de tailles $\frac{N}{2}$. Remarquez que cette recombinaison est un opérateur linéaire.

Nous allons maintenant voir sous quelles conditions ces opérateurs sont inverses l'un de l'autre.

Pour cela, nous allons voir comment ces opérateurs agissent sur les coefficients de Fourier de u . On a, en effet, en utilisant les analogues des Propositions 10 et 12 pour des signaux

$$\widehat{u}^1_k = \frac{1}{2} \left(\widehat{h}_k^* \widehat{u}_k + \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{2}} \right) \quad (6.3)$$

et

$$\widehat{u}^2_k = \frac{1}{2} \left(\widehat{g}_k^* \widehat{u}_k + \widehat{g}_{k+\frac{N}{2}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{2}} \right), \quad (6.4)$$

pour $k \in \{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$.

Pour la reconstruction, on a, pour $k \in \{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$,

$$\begin{aligned} \widehat{u}^1_k &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{u}_m^1 e^{-2i\pi \frac{km}{N}} \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} u_m^1 e^{-2i\pi \frac{2km}{N}} \\ &= \widehat{u}^1_k \end{aligned}$$

et, pour $k \in \{\frac{N}{2}, \dots, N-1\}$,

$$\begin{aligned} \widehat{u}^1_k &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{u}_m^1 e^{-2i\pi \frac{km}{N}} \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} u_m^1 e^{-2i\pi \frac{(2k-N)m}{N}} \\ &= \widehat{u}^1_{k-\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

On réécrit ce résultat sous la forme

$$\widehat{u}^1_k = \widehat{u}^1_{k[\frac{N}{2}]},$$

où $k \in \{0, \dots, N-1\}$ et $k[\frac{N}{2}]$ signifie " k modulo $\frac{N}{2}$ ".

De même, on a, pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\widehat{u}^2_k = \widehat{u}^2_{k[\frac{N}{2}]}$$

On obtient donc finalement, pour tout $k \in \{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$,

$$\begin{aligned} \widehat{v}_k &= \widehat{h}_k \widehat{u}^1_k + \widehat{g}_k \widehat{u}^2_k \\ &= \frac{1}{2} \widehat{h}_k \left(\widehat{h}_k^* \widehat{u}_k + \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{2}} \right) + \frac{1}{2} \widehat{g}_k \left(\widehat{g}_k^* \widehat{u}_k + \widehat{g}_{k+\frac{N}{2}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{2}} \right). \end{aligned}$$

On a aussi, pour tout $k \in \{\frac{N}{2}, \dots, N-1\}$,

$$\begin{aligned}\hat{v}_k &= \frac{1}{2}\hat{h}_k \left(\hat{h}_{k-\frac{N}{2}}^* \hat{u}_{k-\frac{N}{2}} + \hat{h}_k^* \hat{u}_k \right) + \frac{1}{2}\hat{g}_k \left(\hat{g}_{k-\frac{N}{2}}^* \hat{u}_{k-\frac{N}{2}} + \hat{g}_k^* \hat{u}_k \right) \\ &= \frac{1}{2}\hat{h}_k \left(\hat{h}_k^* \hat{u}_k + \hat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \hat{u}_{k+\frac{N}{2}} \right) + \frac{1}{2}\hat{g}_k \left(\hat{g}_k^* \hat{u}_k + \hat{g}_{k+\frac{N}{2}}^* \hat{u}_{k+\frac{N}{2}} \right).\end{aligned}$$

On a enfin, pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\hat{v}_k = \frac{1}{2} \left(\hat{h}_k \hat{h}_k^* + \hat{g}_k \hat{g}_k^* \right) \hat{u}_k + \frac{1}{2} \left(\hat{h}_k \hat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* + \hat{g}_k \hat{g}_{k+\frac{N}{2}}^* \right) \hat{u}_{k+\frac{N}{2}}$$

Ceci nous assure que $v = u$, quelque soit le signal u de départ, si et seulement si, pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\hat{h}_k \hat{h}_k^* + \hat{g}_k \hat{g}_k^* = 2 \quad (6.5)$$

et

$$\hat{h}_k \hat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* + \hat{g}_k \hat{g}_{k+\frac{N}{2}}^* = 0 \quad (6.6)$$

Ces deux équations nous donnent les conditions reliant h , g , \tilde{h} et \tilde{g} sous lesquelles les décompositions et recompositions que nous avons décrites ci-dessus sont inverses l'une de l'autre. On appelle les filtres qui satisfont ces deux équations des "bancs de filtres à reconstruction exacte". Pour de tels filtres, comme les décompositions/recompositions sont linéaires, ce sont des changements de base. En d'autres termes, les signaux u^1 et u^2 représentent les coordonnées du signal de départ dans une base.

La question qui se pose maintenant est de savoir comment choisir les filtres h , g , \tilde{h} et \tilde{g} , pour que la base soit intéressante.

Nous allons dans un premier temps voir comment simplifier (6.5) et (6.6) de manière à simplifier la construction des filtres h , g , \tilde{h} et \tilde{g} .

La dernière équation nous garantit que le vecteur (\hat{h}_k, \hat{g}_k) est orthogonal à $(\hat{h}_{k+\frac{N}{2}}, \hat{g}_{k+\frac{N}{2}})$. Il existe donc un nombre $\lambda_k \in \mathbb{C}$, tel que

$$\hat{h}_k = \lambda_k^* \hat{g}_{k+\frac{N}{2}}^* \text{ et } \hat{g}_k = -\lambda_k \hat{h}_{k+\frac{N}{2}}^*. \quad (6.7)$$

En utilisant (6.5), on obtient que

$$\hat{g}_{k+\frac{N}{2}} \hat{h}_k - \hat{h}_{k+\frac{N}{2}} \hat{g}_k \neq 0$$

et

$$\lambda_k = \frac{2}{\hat{g}_{k+\frac{N}{2}} \hat{h}_k - \hat{h}_{k+\frac{N}{2}} \hat{g}_k}. \quad (6.8)$$

On peut en déduire que

$$\lambda_{k+\frac{N}{2}} = -\lambda_k. \quad (6.9)$$

Remarque : Les équations (6.7) et (6.8) nous disent comment construire les filtres pour la reconstruction (\tilde{h} et \tilde{g}) une fois que les filtres pour la décomposition (h et g) sont fixés. Nous ne les utiliserons cependant pas en l'état. Nous allons plutôt utiliser (6.5) et (6.6) pour déduire g et \tilde{g} en fonction de h et \tilde{h} .

En utilisant la première égalité de (6.7) (à la fréquence $k + \frac{N}{2}$) et (6.9), on trouve que

$$\begin{aligned}\hat{g}_k^* &= \frac{1}{\lambda_{k+\frac{N}{2}}^*} \hat{h}_{k+\frac{N}{2}} \\ &= -\frac{1}{\lambda_k^*} \hat{h}_{k+\frac{N}{2}}.\end{aligned}$$

L'équation (6.5) devient alors

$$\begin{aligned} 2 &= \widehat{h}_k \widehat{h}_k^* + \left(-\lambda_k^* \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \right) \left(-\frac{1}{\lambda_k^*} \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}} \right) \\ &= \widehat{h}_k \widehat{h}_k^* + \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

Cette équation nous donne une condition que doivent satisfaire h et \tilde{h} . Si h et \tilde{h} sont fixés, on peut trouver g et \tilde{g} en utilisant

$$\widehat{g}_k = -\frac{1}{\lambda_k} \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \quad \text{et} \quad \widehat{\tilde{g}}_k = -\lambda_k^* \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^*.$$

En pratique, on se contente de prendre

$$\lambda_k = -e^{2i\pi \frac{k}{N}}$$

pour obtenir

$$\widehat{g}_k = e^{-2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \quad \text{et} \quad \widehat{\tilde{g}}_k = e^{-2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^*. \quad (6.10)$$

Ce choix peut sembler arbitraire mais n'est, en fait, pas une grosse restriction (voir le Théorème 7.8, dans [2]). Il permet, par ailleurs, la simplification ci-dessous. Celle-ci garantit notamment que les filtres g et \tilde{g} aient un support de petite taille lorsque h et \tilde{h} sont de petite taille (voir le résultat du calcul ci-dessous).

Ceci nous donne en effet, pour tout $m \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned} g_m &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{g}_k e^{2i\pi \frac{km}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* e^{2i\pi \frac{km}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{h}_k^* e^{2i\pi \frac{(k-\frac{N}{2})(m-1)}{N}} \\ &= e^{-i\pi(m-1)} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{h}_k^* e^{2i\pi \frac{k(m-1)}{N}} \right) \\ &= (-1)^{(1-m)} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{h}_k e^{2i\pi \frac{k(1-m)}{N}} \right)^* \\ &= (-1)^{(1-m)} \tilde{h}_{1-m}. \end{aligned}$$

Car \tilde{h} est à valeur dans \mathbb{R} . On a de même

$$\tilde{g}_m = (-1)^{(1-m)} h_{1-m}.$$

6.3 Les ondelettes discrètes en dimension 1

6.3.1 Ondelettes biorthogonales

Rappelons tout d'abord la définition de la biorthogonalité.

Définition 4 Deux bases $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N^2}$ et $(\tilde{\varphi}_i)_{1 \leq i \leq N^2}$ de \mathbb{R}^{N^2} sont dites biorthogonales si pour tout $u \in \mathbb{R}^{N^2}$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{N^2} \langle u, \tilde{\varphi}_i \rangle \varphi_i, \\ &= \sum_{i=1}^{N^2} \langle u, \varphi_i \rangle \tilde{\varphi}_i. \end{aligned}$$

Théorème 1 Soit h et $\tilde{h} \in \mathbb{R}^N$ (on les suppose périodisés en dehors de $\{0, \dots, N-1\}$), tels que

$$\widehat{h}_k^* \widehat{h}_k + \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}} = 2. \quad (6.11)$$

On note

$$g_m = (-1)^{(1-m)} \tilde{h}_{1-m} \quad \text{et} \quad \tilde{g}_m = (-1)^{(1-m)} h_{1-m}, \quad (6.12)$$

pour $m \in \{0, \dots, N-1\}$.

L'ensemble $\{\tilde{h}_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}} \cup \{\tilde{g}_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}}$ est une base de \mathbb{R}^N .

De même, l'ensemble $\{h_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}} \cup \{g_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}}$ est une base de \mathbb{R}^N . Ces deux bases sont biorthogonales.

Preuve. En fait, ce résultat découle de ce que, sous les hypothèses du théorème, h , \tilde{h} , g et \tilde{g} forment une banc de filtres à reconstruction exacte. En effet, étant donné (6.12), on peut retrouver (6.10) et obtenir que, pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\widehat{g}_k = e^{-2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \quad \text{et} \quad \widehat{\tilde{g}}_k = e^{-2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^*.$$

L'hypothèse (6.11) nous garantit alors que

$$\begin{aligned} 2 &= \widehat{h}_k^* \widehat{h}_k + \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}} \\ &= \widehat{h}_k^* \widehat{h}_k + \widehat{g}_k^* \widehat{g}_k. \end{aligned}$$

Ce qui correspond à la condition (6.5) des bancs de filtres à reconstruction exacte. On a aussi, pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\begin{aligned} \widehat{h}_k \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* + \widehat{g}_k \widehat{g}_{k+\frac{N}{2}}^* &= \widehat{h}_k \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* + \left(e^{-2i\pi \frac{k}{N}} \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \right) \left(e^{2i\pi \frac{k+\frac{N}{2}}{N}} \widehat{h}_k \right) \\ &= \widehat{h}_k \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* - \widehat{h}_k \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \\ &= 0, \end{aligned}$$

qui correspond à la condition (6.6) des bancs de filtres à reconstruction exacte.

Enfin, h , \tilde{h} , g et \tilde{g} forment une banc de filtres à reconstruction exacte et donc, quelque soit $u \in \mathbb{R}^N$, (6.2) peut s'écrire

$$\begin{aligned} u_m &= \tilde{h} * \tilde{u}_m^1 + \tilde{h} * \tilde{u}_m^2 \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{u}_l^1 \tilde{h}_{m-l} + \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{u}_l^2 \tilde{g}_{m-l}, \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_l^1 \tilde{h}_{m-2l} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_l^2 \tilde{g}_{m-2l}, \end{aligned}$$

pour tout $m \in \{0, \dots, N-1\}$. Ceci signifie que l'ensemble $\{\tilde{h}_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}} \cup \{\tilde{g}_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}}$ est une base de \mathbb{R}^N .

Il est aussi important de noter que l'on peut interchanger, dans (6.11), les rôles de h et \tilde{h} . Ceci nous assure que le deuxième ensemble est une base.

Pour montrer la biorthogonalité de ces deux bases, il faut montrer¹ que

$$u_l^1 = \langle u, h_{\cdot-2l} \rangle \quad \text{et} \quad u_l^2 = \langle u, g_{\cdot-2l} \rangle.$$

On on a immédiatement en appliquant (6.1)

$$\begin{aligned} u_l^1 &= (\bar{h} * u)_{2l}, \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h_{m-2l} u_m, \\ &= \langle u, h_{\cdot-2l} \rangle, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_l^2 &= (\bar{g} * u)_{2l}, \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} g_{m-2l} u_m, \\ &= \langle u, g_{\cdot-2l} \rangle. \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. □

6.3.2 Ondelettes orthogonales

Théorème 2 Soit $h \in \mathbb{R}^N$ (on suppose h périodisé en dehors de $\{0, \dots, N-1\}$) tel que

$$|\hat{h}_k|^2 + |\hat{h}_{k+\frac{N}{2}}|^2 = 2. \quad (6.13)$$

On note

$$g_m = (-1)^{(1-m)} h_{1-m},$$

pour $m \in \{0, \dots, N-1\}$.

L'ensemble $\{h_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}} \cup \{g_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}}$ est une base orthogonale de \mathbb{R}^N . On appelle cette base "base d'ondelettes orthogonale".

Preuve. Le fait que $\{h_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}} \cup \{g_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}}$ soit une base est une conséquence du Théorème 1. Il suffit de l'appliquer avec $\tilde{h} = h$.

Montrons maintenant les relations d'orthogonalités des éléments de la base. Soit $l \neq l'$, dans $\{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}$, pour montrer que deux termes h_{m-2l} et $h_{m-2l'}$ sont orthogonaux, on remarque d'abord que

$$\widehat{\tau_{2l} h}_k = e^{-2i\pi \frac{2kl}{N}} \hat{h}_k,$$

pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$ et

$$(\tau_{2l} h)_m = h_{m-2l},$$

1. Nous nous contentons ici de montrer la première égalité des bases biorthogonales. La seconde se montre de manière analogue.

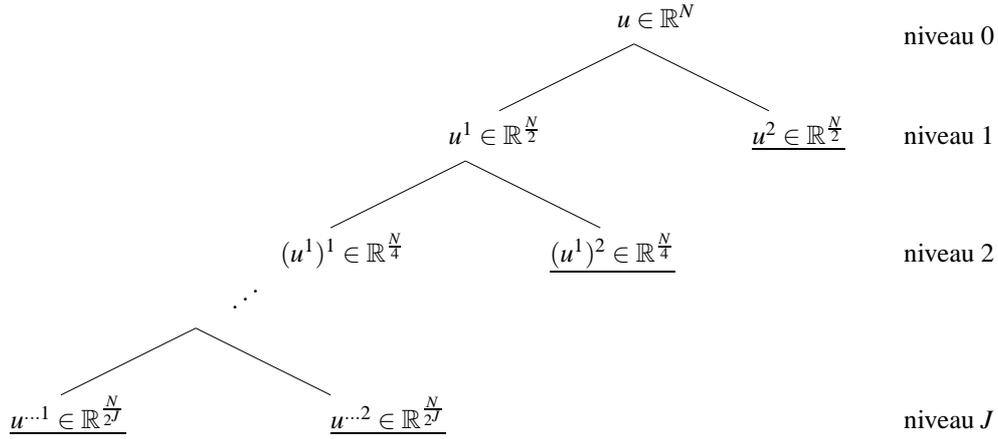


FIGURE 6.1 – Décomposition d'un signal sur plusieurs niveaux. Les signaux soulignés forment les coordonnées de u dans la base d'ondelettes.

la translaté de $2l$ de h .

On a alors (en adaptant la Proposition 11 aux signaux 1D), que

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{N-1} h_{m-2l} h_{m-2l'} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{2kl}{N}} \hat{h}_k e^{2i\pi \frac{2kl'}{N}} \hat{h}_k^* \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} |\hat{h}_k|^2 e^{-2i\pi \frac{2k(l-l')}{N}} + |\hat{h}_{k+\frac{N}{2}}|^2 e^{-2i\pi \frac{(2k+N)(l-l')}{N}} \\
 &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-2i\pi \frac{2k(l-l')}{N}} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

car $l \neq l'$.

On montre de même les autres relations d'orthogonalités. (Pour mémoire, $\hat{g}_k = e^{-2i\pi \frac{k}{N}} \hat{h}_{k+\frac{N}{2}}^*$) \square

6.3.3 Bases d'ondelettes de niveau quelconque

En fait, on précise en général que la base $\{\tilde{h}_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}} \cup \{\tilde{g}_{m-2l}\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}}$ (même chose pour les autres bases) est une base d'ondelettes "de niveau 1".

En effet, en général, si $N = 2^K$, on peut redécomposer u^1 pour obtenir $(u^1)^1$, que l'on redécompose à son tour et ainsi de suite (voir la Figure 6.9). On appelle "niveau de décomposition" le nombre de fois que l'on a décomposé avec h . On peut décomposer tant que la taille du signal est plus grande que la taille des filtres \tilde{h} et \tilde{g} .

Bien sûr, chaque décomposition correspond à un changement de base et donc le processus dans son ensemble est un changement de base. Si chaque transformation est unitaire (i.e. la base est orthonormée), la base obtenue est aussi unitaire, en tant que composition de transformations unitaires.

6.3.4 Localisation en espace des éléments de la base d'ondelettes

Par exemple, si l'on décompose un signal $u \in \mathbb{R}^N$ en deux signaux $u^1 \in \mathbb{R}^{\frac{N}{2}}$ et $u^2 \in \mathbb{R}^{\frac{N}{2}}$, puis si l'on décompose à nouveau u^1 en $(u^1)^1 \in \mathbb{R}^{\frac{N}{4}}$ et $(u^1)^2 \in \mathbb{R}^{\frac{N}{4}}$. On obtient, pour tout $m \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$u_m = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_l^1 \tilde{h}_{m-2l} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_l^2 \tilde{g}_{m-2l},$$

et, pour tout $l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}$,

$$u_l^1 = \sum_{l'=0}^{\frac{N}{4}-1} (u^1)_{l'}^1 \tilde{h}'_{l-2l'} + \sum_{l'=0}^{\frac{N}{4}-1} (u^1)_{l'}^2 \tilde{g}'_{l-2l'},$$

où \tilde{h}' et \tilde{g}' sont des versions $\frac{N}{2}$ -périodiques de \tilde{h} et \tilde{g} . C'est à dire $\tilde{h}' \in \mathbb{R}^{\frac{N}{2}}$ (et de même \tilde{g}') est tel que

$$\tilde{h}'_m = \tilde{h}_m, \text{ pour tout } m \in \left\{-\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4}-1\right\},$$

et l'on suppose $\tilde{h}_m = 0$, pour $m \in \{\frac{N}{4}, \dots, \frac{3N}{4}-1\}$.

On a donc

$$\begin{aligned} u_m &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{l'=0}^{\frac{N}{4}-1} (u^1)_{l'}^1 \tilde{h}'_{l-2l'} \tilde{h}_{m-2l} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{l'=0}^{\frac{N}{4}-1} (u^1)_{l'}^2 \tilde{g}'_{l-2l'} \tilde{h}_{m-2l} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_l^2 \tilde{g}_{m-2l}, \\ &= \sum_{l'=0}^{\frac{N}{4}-1} (u^1)_{l'}^1 \left(\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{h}'_{l-2l'} \tilde{h}_{m-2l} \right) + \sum_{l'=0}^{\frac{N}{4}-1} (u^1)_{l'}^2 \left(\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{g}'_{l-2l'} \tilde{h}_{m-2l} \right) + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_l^2 \tilde{g}_{m-2l}. \end{aligned}$$

On peut donc l'écrire sous la forme

$$u_m = \sum_{l'=0}^{\frac{N}{4}-1} (u^1)_{l'}^1 \tilde{h}_{m-4l'}^2 + \sum_{l'=0}^{\frac{N}{4}-1} (u^1)_{l'}^2 \tilde{g}_{m-4l'}^2 + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_l^2 \tilde{g}_{m-2l}^1,$$

en posant

$$\begin{aligned} \tilde{g}^1 &= \tilde{g}, \\ \tilde{g}_{m-4l'}^2 &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{g}'_{l-2l'} \tilde{h}_{m-2l} = \sum_{l=-2l'}^{\frac{N}{2}-1-2l'} \tilde{g}'_l \tilde{h}_{m-2(l+2l')} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{g}'_l \tilde{h}_{(m-4l')-2l}, \end{aligned}$$

où l'on a fait le changement de variable $l \leftarrow l - 2l'$. On a donc

$$\tilde{g}_m^2 = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{g}'_l \tilde{h}_{m-2l}.$$

De même,

$$\tilde{h}_m^2 = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{h}'_l \tilde{h}_{m-2l}.$$

Plus généralement, la base de niveau J , prend alors la forme

$$\{\tilde{h}_{m-2^J l}^J\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2^J}-1\}} \cup \{\tilde{g}_{m-2^J l}^J\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2^J}-1\}} \cup \dots \cup \{\tilde{g}_{m-2l}^1\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}}. \quad (6.14)$$

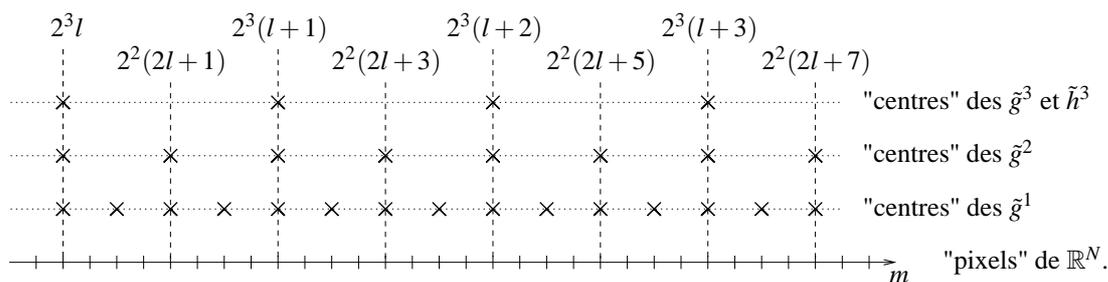


FIGURE 6.2 – Exemple de localisation en espace d'une base d'ondelettes de niveau 3.

La localisation en espace (on dit aussi en temps) des éléments de notre base est illustrée sur la figure 6.2.

On utilise parfois deux notations pour désigner les coefficients d'ondelettes (i.e. les coordonnées dans une base d'ondelettes). Le but est de distinguer s'il s'agit d'un coefficient correspondant à un élément \tilde{h}^J , ou s'il s'agit d'une coordonnée correspondant à un élément \tilde{g}^j . On note

$$\{a_l^j\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2^j} - 1\}}$$

les coordonnées suivant les $\{\tilde{h}_{m-2^j l}^j\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2^j} - 1\}}$, et

$$\{d_l^j\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2^j} - 1\}},$$

celles selon $\{\tilde{g}_{m-2^j l}^j\}_{l \in \{0, \dots, \frac{N}{2^j} - 1\}}$, pour $j \in \{1, \dots, J\}$. (Cette notation vient de *average*, pour a_l^j , et *details*, pour d_l^j .)

6.3.5 Localisation fréquentielle des éléments de la base d'ondelettes

Les relations entre \tilde{h}^J , les $\{\tilde{g}^j\}_{1 \leq j \leq J}$, \tilde{h} et \tilde{g} peuvent ne pas être simple. Afin de les expliciter dans le domaine de Fourier, on remarque que si $h' \in \mathbb{R}^{\frac{N}{2}}$ est tel que

$$h'_m = h_m \quad , \text{ pour tout } m \in \left\{ -\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} - 1 \right\},$$

on a pour tout $k \in \{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$

$$\begin{aligned} \widehat{h}'_k &= \sum_{m=-\frac{N}{4}}^{\frac{N}{4}-1} h'_m e^{-2i\pi \frac{km}{N/2}}, \\ &= \sum_{m=-\frac{N}{4}}^{\frac{N}{4}-1} h_m e^{-2i\pi \frac{2km}{N}}, \\ &= \widehat{h}_{2k}, \end{aligned}$$

dès que $h_m = 0$, pour tout $m \in \left\{ \frac{N}{4}, \dots, \frac{3N}{4} - 1 \right\}$ (i.e. h est de petite taille par rapport au signal).

Ainsi, dans le cas où h et g ont un support de petite taille (ce qui est généralement le cas), on a par exemple pour $k \in \{0, \frac{N}{4} - 1\}$

$$\begin{aligned}
\widehat{(u^1)}_k &= \frac{1}{2} \left(\widehat{h}_k^* \widehat{u}_k + \widehat{h}_{k+\frac{N}{4}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{4}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\widehat{h}_{2k}^* \widehat{u}_k + \widehat{h}_{2k+\frac{N}{2}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{4}} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\widehat{h}_{2k}^* \left(\widehat{h}_k^* \widehat{u}_k + \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{2}} \right) + \widehat{h}_{2k+\frac{N}{2}}^* \left(\widehat{h}_{k+\frac{N}{4}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{4}} + \widehat{h}_{k+\frac{3N}{4}}^* \widehat{u}_{k+\frac{3N}{4}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\widehat{h}_{2k}^* \widehat{h}_k^* \widehat{u}_k + \widehat{h}_{2k+\frac{N}{2}}^* \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{4}} + \widehat{h}_{2k}^* \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{2}} + \widehat{h}_{2k+\frac{N}{2}}^* \widehat{h}_{k+\frac{3N}{4}}^* \widehat{u}_{k+\frac{3N}{4}} \right),
\end{aligned}$$

On voit alors qu'il existe h^2 tel que

$$(u^1)_m = (\overline{h^2} * u)_{4m}.$$

Cette dernière formule conduit, en effet, en utilisant la formule de Poisson à

$$\begin{aligned}
\widehat{(u^1)}_k &= \frac{1}{4} \sum_{t=0}^3 \widehat{h^2}^* u_{k+t\frac{N}{4}} \\
&= \frac{1}{4} \left(\widehat{h}_k^* \widehat{u}_k + \widehat{h}_{k+\frac{N}{4}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{4}} + \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \widehat{u}_{k+\frac{N}{2}} + \widehat{h}_{k+\frac{3N}{4}}^* \widehat{u}_{k+\frac{3N}{4}} \right).
\end{aligned}$$

En identifiant chaque terme à son homologue dans l'équation ci-dessus, on obtient pour $k \in \{0, \dots, \frac{N}{4} - 1\}$

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_k^* &= \widehat{h}_{2k}^* \widehat{h}_k^* \\
\widehat{h}_{k+\frac{N}{4}}^* &= \widehat{h}_{2k+\frac{N}{2}}^* \widehat{h}_{k+\frac{N}{4}}^* \\
\widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* &= \widehat{h}_{2k}^* \widehat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \\
\widehat{h}_{k+\frac{3N}{4}}^* &= \widehat{h}_{2k+\frac{N}{2}}^* \widehat{h}_{k+\frac{3N}{4}}^*.
\end{aligned}$$

En résumé, on sait que, pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\widehat{h}_k^2 = \widehat{h}_{2k} \widehat{h}_k. \quad (6.15)$$

On a, de même, pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\widehat{g}_k^2 = \widehat{g}_{2k} \widehat{h}_k, \quad (6.16)$$

où g^2 est tel que, pour tout $m \in \{0, \dots, \frac{N}{4} - 1\}$,

$$(u^1)_m^2 = (\overline{g^2} * u)_{4m}.$$

On voit bien sur (6.15) et (6.16), que les termes \widehat{h}_{2k} et \widehat{g}_{2k} permettent d'avoir une localisation en fréquence de la base d'ondelettes de plus en plus fine pour les basses fréquences. Par exemple, si h est un filtre passe bas (ce qui est généralement le cas), h^2 "laisse passer" deux fois moins de fréquences que h .

Plus généralement, si on note h^J et $\{g^j\}_{1 \leq j \leq J}$ les filtres permettant d'obtenir les coordonnées d'un élément de \mathbb{R}^N dans la base d'ondelettes biorthogonale (voir (6.14)), on a, pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\widehat{h}_k^J = \widehat{h}_{2^{J-1}k} \dots \widehat{h}_{2k} \widehat{h}_k,$$

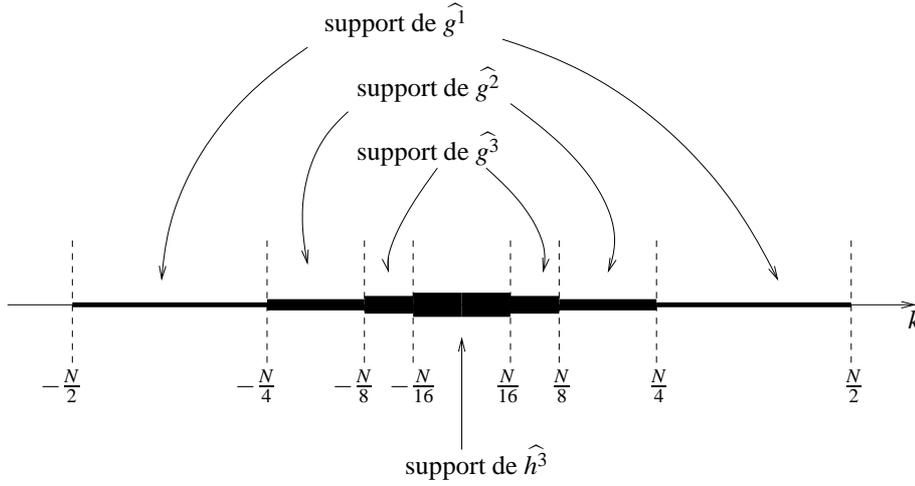


FIGURE 6.3 – Exemple de localisation fréquentielle d'une base d'ondelettes de niveau 3.

et, pour $j \in \{1, \dots, J\}$,

$$\hat{g}_k^j = \hat{g}_{2^{j-1}k} \dots \hat{h}_{2k} \hat{h}_k.$$

Dans le cas où h est un filtre passe bas, localisé en fréquence sur $[-\frac{N}{4}, \frac{N}{4}]$, on obtient le découpage fréquentiel illustré sur la Figure 6.3. On parle d'une base "multi-échelle" (*multiscale*, en anglais).

6.4 Les ondelettes discrètes en dimension 2

Le passage à la dimension deux ne pose pas de réelle difficulté. Algorithmiquement (voir Figure 6.4),

- on décompose avec une décomposition en ondelette 1D toutes les lignes de l'image $u \in \mathbb{R}^{N^2}$ et on met les résultats dans les lignes de deux images $u^1 \in \mathbb{R}^{N \times \frac{N}{2}}$ et $u^2 \in \mathbb{R}^{N \times \frac{N}{2}}$;
- puis on décompose avec une décomposition en ondelette 1D toutes les colonnes des deux images u^1 et u^2 pour obtenir quatre images de coefficients $u^{11} \in \mathbb{R}^{(\frac{N}{2})^2}$, $u^{12} \in \mathbb{R}^{(\frac{N}{2})^2}$, $u^{21} \in \mathbb{R}^{(\frac{N}{2})^2}$ et $u^{22} \in \mathbb{R}^{(\frac{N}{2})^2}$.

On re-décompose ensuite (itérativement) l'image contenant les coefficients d'ondelettes correspondant aux basses fréquences de l'image initiale (i.e. u^{11}).

Pour la base de niveau 1, on peut écrire la formule de reconstruction permettant de mettre en évidence les éléments de la base d'ondelettes. On a pour tout $(m, n) \in \{0, \dots, N-1\}^2$

$$\begin{aligned} u_{m,n} &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_{m,l}^1 \tilde{h}_{n-2l} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_{m,l}^2 \tilde{g}_{n-2l}, \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} u_{k,l}^{11} \tilde{h}_{m-2k} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} u_{k,l}^{12} \tilde{g}_{m-2k} \right) \tilde{h}_{n-2l} \\ &\quad + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} u_{k,l}^{21} \tilde{h}_{m-2k} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} u_{k,l}^{22} \tilde{g}_{m-2k} \right) \tilde{g}_{n-2l}. \end{aligned}$$

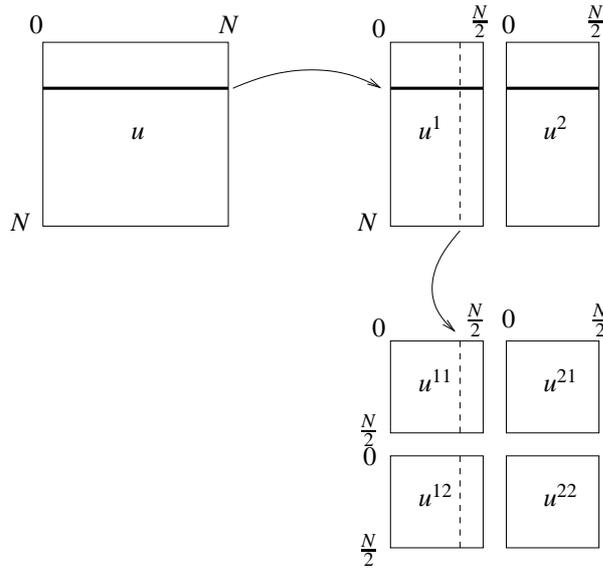


FIGURE 6.4 – Illustration de l’algorithmique permettant le calcul des coefficients d’ondelettes 2D.

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 u_{m,n} = & \sum_{k,l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_{k,l}^{11} \tilde{h}_{m-2k} \tilde{h}_{n-2l} + \sum_{k,l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_{k,l}^{12} \tilde{g}_{m-2k} \tilde{h}_{n-2l} \\
 & + \sum_{k,l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_{k,l}^{21} \tilde{h}_{m-2k} \tilde{g}_{n-2l} + \sum_{k,l=0}^{\frac{N}{2}-1} u_{k,l}^{22} \tilde{g}_{m-2k} \tilde{g}_{n-2l}
 \end{aligned}$$

On a ainsi la base d’ondelettes discrète 2D de niveau 1

$$\begin{aligned}
 \{ \tilde{h}_{m-2l} \tilde{h}_{n-2l'} \}_{(l,l') \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}^2} \cup \{ \tilde{h}_{m-2l} \tilde{g}_{n-2l'} \}_{(l,l') \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}^2} \\
 \cup \{ \tilde{g}_{m-2l} \tilde{h}_{n-2l'} \}_{(l,l') \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}^2} \cup \{ \tilde{g}_{m-2l} \tilde{g}_{n-2l'} \}_{(l,l') \in \{0, \dots, \frac{N}{2}-1\}^2} .
 \end{aligned}$$

Elle contient quatre types d’éléments qui correspondent aux produits tensoriels des éléments de la base 1D.

Dans le cas où h est un filtre passe bas, on a un élément bas-bas, un bas-haut, un haut-bas, un haut-haut. Les localisations fréquentielles respectives de ces éléments sont représentées sur la Figure 6.5. Pour des bases de niveaux supérieurs, on redécoupe le carré correspondant à la partie bas-bas en suivant le même motif.

Les coefficients d’ondelettes de l’image "barbara", dans une base d’ondelettes de niveau 1, sont représentés sur la Figure 6.6.

Pour obtenir la décomposition dans la base de niveau 2 (voir Figure 6.7), on a simplement décomposé la partie correspondant aux basses fréquences (appelée "résumé" en Français et "remainder" en anglais).

On utilise souvent des bases d’ondelettes de niveau important. Un exemple de décomposition au niveau 5 est illustré sur la Figure 6.8.

Remarque : Le contraste des coefficients d’ondelettes correspondant aux détails a été augmenté sur Figures 6.6, 6.7 et 6.8. Ceci permet de faire ressortir les coefficients correspondant aux détails. La partie correspondant aux détails aurait autrement été presque uniformément noire.

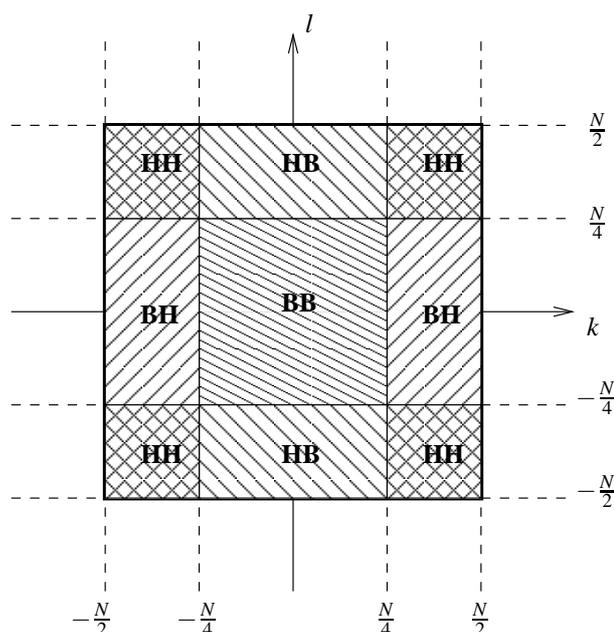


FIGURE 6.5 – Localisation fréquentielle d'une base d'ondelettes de niveau 1. La localisation de bas-bas correspond à la partie **BB**, celle de haut-bas à **HB**, celle de bas-haut à **BH**, celle de haut-haut à **HH**.

6.5 Choisir une ondelette

Une question que nous n'avons pas abordée pour le moment est la question du choix des filtres h et (éventuellement) \tilde{h} . Ce choix dépend évidemment de l'application pour laquelle on utilise la base d'ondelettes. En général (notamment pour la compression et le débruitage d'images), le but est de choisir ce(s) filtre(s) de manière à représenter les images avec le moins de coefficients possible.

Le choix du ou des filtres est généralement un compromis entre le nombre de coefficients nécessaire pour représenter une "zone régulière" de l'image et les coefficients intervenant dans la représentation des bords séparant deux zones régulières.

6.5.1 Le nombre de moments nuls

Pour comprendre combien d'éléments de la base d'ondelettes vont intervenir dans la représentation d'une zone régulière, il faut être capable de caractériser la régularité de cette zone. Malheureusement, cela n'est pas possible dans le cadre de bases d'ondelettes discrètes. L'analyse est donc faite dans le cas de bases d'ondelettes de fonctions définies sur \mathbb{R} et nous ne rentrerons pas dans ces détails (voir [2]).

L'intuition derrière cette analyse est liée au fait que, pour une fonction régulière en un point x , on peut l'approximer, au voisinage de x , par un polynôme. La propriété d'avoir " p moments nuls", où p est un entier positif, fait en sorte que les éléments de la base représentant les détails fins de l'image soient orthogonaux aux polynômes de degré inférieur à p .

Remarquez, que la décomposition d'un polynôme est un polynôme. Ceci est d'ailleurs vrai pour les ondelettes discrètes. Si on a, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé,

$$u_m = m^p, \forall m \in \{0, \dots, N-1\},$$



FIGURE 6.6 – Coefficients d'ondelettes pour une base d'ondelettes de niveau 1.

on a alors en décomposant avec (6.1) pour tout $m \in \{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$,

$$\begin{aligned}
 u_m^1 &= (\bar{h} * u)_{2m}, \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} \bar{h}_l u_{2m-l}, \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} h_{-l} (2m-l)^p, \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} h_{-l} \sum_{p'=0}^p C_p^{p'} (2m)^{p'} (-l)^{p-p'}, \\
 &= \sum_{p'=0}^p \left(C_p^{p'} 2^{p'} \sum_{l=0}^{N-1} h_{-l} (-l)^{p-p'} \right) m^{p'}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, tout polynôme de degré inférieur à p est décomposé en

- un signal qui est polynôme de degré inférieur à p
- et un signal nul.

Ceci reste vrai lorsque l'on décompose sur plusieurs niveaux, comme cela est fait dans une décomposition en ondelettes (voir Figure ??).

Dans le cas (simpliste mais plus réaliste) où une image contient une large zone Z dans laquelle elle vaut la même chose qu'un polynôme de degré inférieur à p , pour toutes les échelles (les indices j) et les localisations (les indices l), pour lesquelles le support de $g_{\cdot, -2^j l}^j$ est inclus dans Z , la coordonnée d_l^j est nulle. Intuitivement, les indices (j, l) concernés forment un cône : Si le support de $g_{\cdot, -2^j l}^j$ est inclus

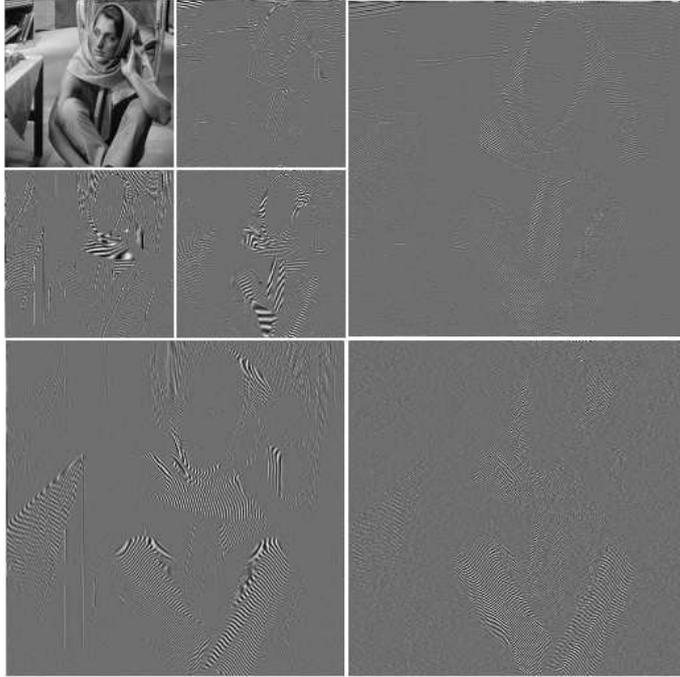


FIGURE 6.7 – Coefficients d'ondelettes pour une base d'ondelettes de niveau 2.

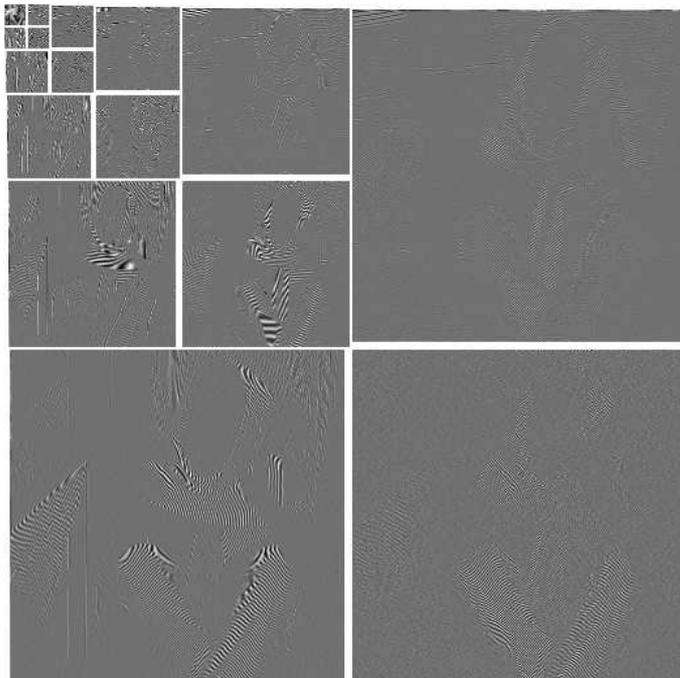


FIGURE 6.8 – Coefficients d'ondelettes pour une base d'ondelettes de niveau 5.

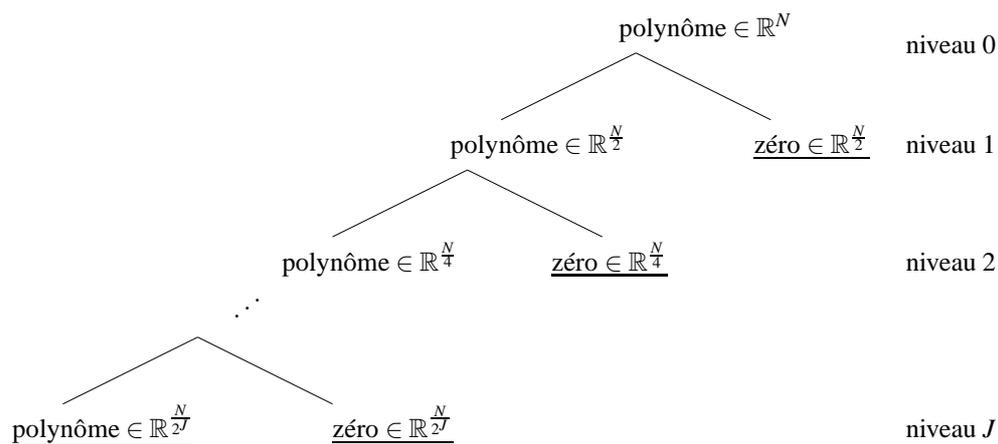


FIGURE 6.9 – Décomposition d’un polynôme de degré inférieur à p sur plusieurs niveaux. Les signaux soulignés forment les coordonnées du polynôme dans la base d’ondelettes.

dans Z , les supports de $g_{\cdot, -2^j-12l}^{j-1}$ et $g_{\cdot, -2^{j-1}(2l+1)}^{j-1}$ sont inclus dans Z , et ainsi de suite. (C’est évidemment approximatif.)

Par ailleurs, on peut montrer mathématiquement que la propriété d’avoir plusieurs moments nuls est équivalente au fait que le filtre h soit tel que \hat{h} "aille rapidement à 0" en π . (Dans le cas des bases d’ondelettes de \mathbb{R}^N telles que nous les avons vues, il s’agit de la fréquence $\frac{N}{2}$.) Cette propriété n’est en fait pas très difficile à obtenir. Il faut d’abord remarquer que, pour des ondelettes, la décroissance vers 0 de \hat{h} en π est la même que celle de \hat{g} en 0. Le résultat vient alors simplement du fait que la transformée de Fourier d’un polynôme, défini sur \mathbb{R} , est "concentrée sur la fréquence 0". Ce résultat fait cependant intervenir des outils mathématiques (les distributions) que nous n’aborderons pas dans ce cours.

Ainsi, le fait d’avoir beaucoup de moments nuls (et donc que notre base représente efficacement les zones où l’image est régulière) correspond au fait que h soit bien localisé sur les basses fréquences.

Une ondelette est souvent associée à un nombre de moments nuls : il représente l’aptitude de la base à bien représenter des images très régulières (avec peu de bords nets).

6.5.2 La taille du support de l’ondelette

En suivant l’analyse faite ci-dessus, on se rend compte que les zones où l’image est régulière sont essentiellement représentées par le résumé de la décomposition en ondelettes. En première analyse, les coefficients d’ondelettes correspondant aux détails interviennent donc pour représenter les bords séparant les zones régulières. Si on note B les pixels du bord entre deux zones régulières, les $g_{\cdot, -2^j-12l}^{j-1}$ intersectant B vont produire des "forts" coefficients. À une échelle donnée (j est fixé), il y aura d’autant plus d’indices l , pour lesquels $g_{\cdot, -2^j-12l}^j$ intersecte B , que le support de g^j est grand. Or la taille du support de g^j croît avec les tailles des supports de g et de h . (Il va de soit que la taille du support de g est la même que celle du support de \tilde{h} ou h (voir les Théorèmes 1 et 2.)

Il semble donc naturel de chercher des filtres h et \tilde{h} (ou h , pour des ondelettes orthogonales) ayant un support de petite taille. Ceci permet d’avoir une représentation efficace des bords présents dans l’image.

Cette propriété est (explicitement) une condition sur la localisation en espace des éléments de la base d’ondelettes.

6.5.3 Conclusion

Le fait d'avoir un support de petite taille est en fait contradictoire avec le fait d'avoir beaucoup de moments nuls. Il faudra ainsi choisir un compromis entre ces deux propriétés. Ce compromis dépend du type d'images que l'on souhaite traiter.

- Si elles contiennent des grandes zones très régulières, on préférera des ondelettes ayant beaucoup de moments nuls et un support un peu grand.
- Si elles contiennent beaucoup de petites zones régulières, on préférera des ondelettes avec un petit support et peu de moments nuls.

Souvent un bon compromis est obtenu pour une ondelette ayant 3 ou 4 moments nuls.

Il existe dans la littérature beaucoup d'ondelettes (Daubechies, splines, Meyer, Haar,...). Les ondelettes de Daubechies connaissent un grand succès, car elles ont la propriété d'avoir la plus petite taille possible, étant donné un nombre de moments nuls. Les bases d'ondelettes sont données explicitement par les coefficients des filtres h et, si besoin, \tilde{h} (voir [2]).

On a, par exemple, pour les ondelettes de Daubechies avec 4 moments nuls

$$h_m = \begin{cases} 0.230377813309 & , \text{ si } m = 0, \\ 0.714846570553 & , \text{ si } m = 1, \\ 0.630880767930 & , \text{ si } m = 2, \\ -0.027983769417 & , \text{ si } m = 3, \\ -0.187034811719 & , \text{ si } m = 4, \\ 0.030841381836 & , \text{ si } m = 5, \\ 0.032883011667 & , \text{ si } m = 6, \\ -0.010597401785 & , \text{ si } m = 7, \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Comme ce sont des ondelettes orthogonales, on sait que $\tilde{h} = h$.

Chapitre 7

Les paquets d'ondelettes

7.1 Principe des paquets d'ondelettes en dimension 1

À la base de la décomposition en ondelettes, il y a :

- un algorithme permettant de décomposer une suite finie de \mathbb{R}^N en deux suites finies de $\mathbb{R}^{\frac{N}{2}}$;
- un algorithme permettant de recomposer deux suites finies de $\mathbb{R}^{\frac{N}{2}}$ en une suite finie de \mathbb{R}^N .

Ces algorithmes sont inverses l'un de l'autre. Ils sont décrits au début de la section 6.2. Pour la décomposition en ondelette, on fait le choix de toujours décomposer le “résumé”. C'est à dire que, parmi les deux signaux obtenus après une décomposition, on décompose le signal représentant les basses fréquences. Ceci est itéré de manière récursive jusqu'à atteindre un niveau de décomposition donné.

Avec cette construction, une décomposition en ondelettes est caractérisée par :

- un filtre h (resp^t deux filtres h et \tilde{h}) dans le cas d'une base d'ondelettes orthogonale (resp^t biorthogonale) ;
- un niveau de décomposition.

Dans le cadre des paquets d'ondelettes, on utilise la même décomposition/recomposition de signaux mais on s'autorise, à chaque niveau, à décomposer le signal représentant les basses fréquences et/ou le signal représentant les hautes fréquences.

La décomposition en paquets d'ondelettes est donc caractérisée par :

- un filtre h (resp^t deux filtres h et \tilde{h}) dans le cas d'une base de paquets d'ondelettes orthogonale (resp^t biorthogonale) ;
- un arbre décrivant les décompositions à effectuer (voir la section 7.2, pour les détails).

Bien entendu, comme chaque décomposition est linéaire et inversible, son résultat correspond à des coordonnées du signal de départ dans une base. Faire successivement plusieurs décomposition revient à composer plusieurs changement de bases. C'est donc toujours un changement de base.

Par ailleurs, si tous les changements de bases correspondent à des bases orthogonales, la composition de ces changements de bases orthogonales est toujours un changement de base orthogonale.

Ainsi, on pourra toujours parler de bases orthogonales ou biorthogonales de paquets d'ondelettes. De plus, les conditions sur les filtres h et \tilde{h} pour obtenir des bases orthogonales et biorthogonales sont les mêmes que pour les bases d'ondelettes (voir (6.11) et (6.13)).

7.2 Les arbres de paquets d'ondelettes

En dimension 1, à chaque fois que l'on décompose un signal on obtient deux signaux. Pour décrire une décomposition un noeud a donc soit

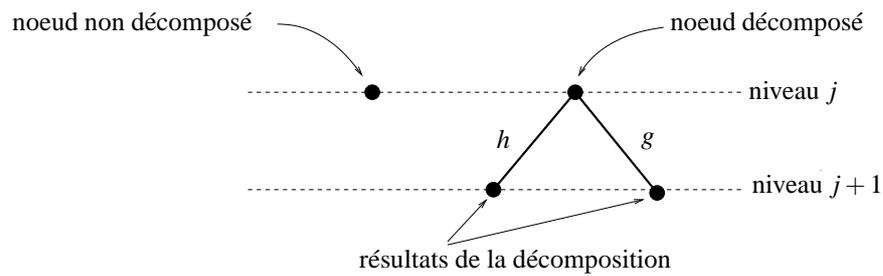


FIGURE 7.1 – Les deux sortes de noeuds possibles dans un arbres de paquets d’ondelettes en dimension 1.

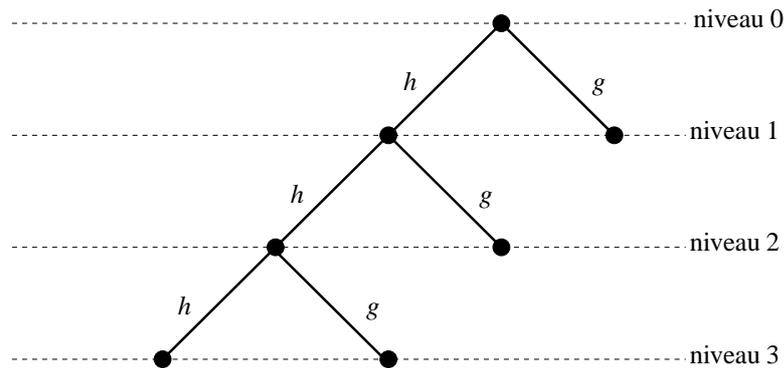


FIGURE 7.2 – Arbre décrivant une décomposition en paquet d’ondelette. La décomposition décrite par cet arbre correspond à une décomposition en ondelette de niveau 3.

- 0 fils : Il n’est pas décomposé
- 2 fils : Il est décomposé. Dans ce cas, chacun des fils représente un signal décomposé. On adopte la convention suivante :
 - le fils de gauche correspond au signal obtenu en décomposant à l’aide du filtre h (i.e. basses fréquences);
 - le fils de droite correspond au signal obtenu en décomposant à l’aide du filtre g (i.e. hautes fréquences).

Ces deux sortes de noeuds sont représentées sur la Figure 7.1.

La racine de l’arbre correspond au signal avant toute décomposition.

Ainsi, avec cette façon de définir les arbres, on peut décrire toutes les bases de paquets d’ondelettes. Par exemple, une base d’ondelettes de niveau 3 est une base de paquets d’ondelettes utilisant l’arbre représenté sur la Figure 7.2.

Nous avons évidemment beaucoup de possibilités pour le choix de l’arbre. Ceux-ci peuvent être adaptés à la nature du signal (ou de l’image) et à une application. Comme pour les ondelettes on comprend et interprète une décomposition en paquets d’ondelettes en analysant sa localisation fréquentielle et spatial. Nous verrons dans la section suivante comment faire cette analyse.

On parle d’un arbre de paquets d’ondelettes complètement décomposé jusqu’au niveau k pour un arbre dont tous les noeuds sont décomposés jusqu’au niveau k . Un arbre complètement décomposé jusqu’au niveau 2 est représenté sur la Figure 7.3.

On sera amené à considérer un arbre miroir d’ondelettes. C’est un arbre dans lequel on décompose successivement le signal correspondant aux hautes fréquences. Cet arbre permet de décomposer le plus

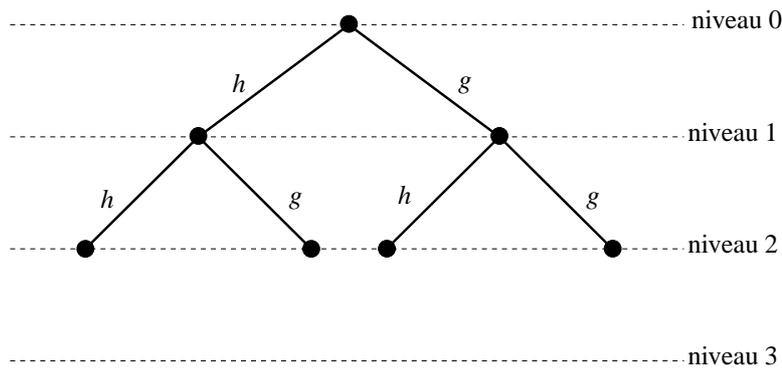


FIGURE 7.3 – Arbre décrivant une base de paquets d’ondelettes complètement décomposée jusqu’au niveau 2.

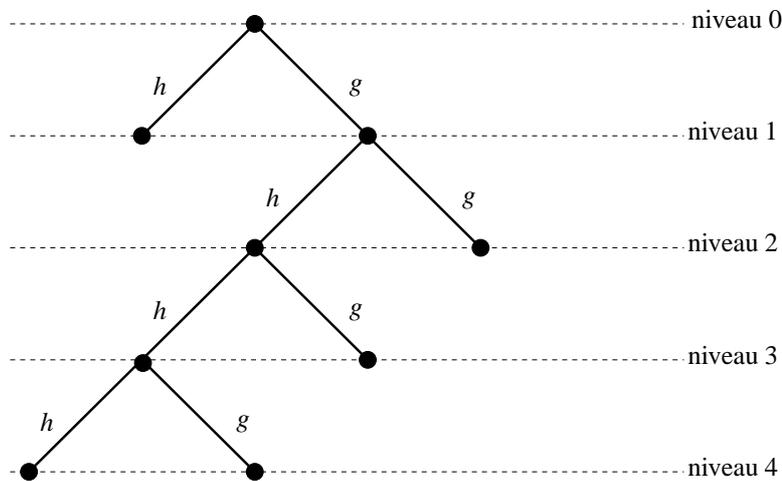


FIGURE 7.4 – Arbre décrivant une base de paquets d’ondelettes: arbre miroir d’ondelette de niveau 4.

possible les hautes fréquences et le moins possible les basses fréquences. il est utile pour certaines déconvolution. Un arbre miroir d’ondelette de niveau 4 est représenté sur la Figure 7.4. La raison pour laquelle cet arbre a cette forme devrait être claire après la lecture de la Section 7.3.

Dans le cas d’images, on a un “quadtree”¹ dont chaque noeud a exactement 0 ou 4 fils. En dimension 3, on a un “octree”² dont chaque noeud a 0 ou 8 noeuds. Ainsi de suite, en dimension n , on caractérise une base de paquets d’ondelettes par des arbres dont chaque noeud a exactement 0 ou 2^n noeuds.

On peut faire, en dimension quelconque, les mêmes constructions d’arbre d’ondelettes, d’arbres complètement décomposés, d’arbre miroir d’ondelettes qu’en dimension 1.

1. Un “quadtree” est un arbre dans lequel chaque noeud a moins de 4 noeuds.
 2. Un “octree” est un arbre dans lequel chaque noeud a moins de 8 noeuds.

7.3 Localisation des paquets d'ondelettes

7.3.1 La localisation spatiale

Les principes expliquant la localisation spatiale des éléments de la base de paquets d'ondelettes sont similaires à ceux expliquant la localisation des ondelettes. Un élément de la base de paquets d'ondelettes correspondant à un niveau de décomposition j est translaté tous les 2^j pixels. Le calcul de ses coefficients s'est fait en sous-échantillonnant j fois par un facteur 2. La taille du support d'un élément de la base de paquets d'ondelettes du niveau j est comprise entre $2^j \min(|h|, |g|)$ et $2^j \max(|h|, |g|)$.

On considère donc généralement que plus le niveau de décomposition du coefficient d'ondelette est élevé, plus sa localisation spatiale est mauvaise.

7.3.2 La localisation fréquentielle

Pour suivre ce qui se passe dans le domaine fréquentiel, lorsque l'on décompose un signal $u \in \mathbb{R}^N$, rappelons (6.3) et (6.4) :

$$\hat{u}^1_k = \frac{1}{2} \left(\hat{h}_k^* \hat{u}_k + \hat{h}_{k+\frac{N}{2}}^* \hat{u}_{k+\frac{N}{2}} \right)$$

et

$$\hat{u}^2_k = \frac{1}{2} \left(\hat{g}_k^* \hat{u}_k + \hat{g}_{k+\frac{N}{2}}^* \hat{u}_{k+\frac{N}{2}} \right).$$

Ces formules nous donnent la transformée de Fourier des signaux obtenus après la décomposition en fonction de la transformée de Fourier du signal u .

Rappelons aussi que dans le cadre des ondelettes, h est typiquement passe bas et g passe haut. Pour simplifier l'analyse, on suppose

$$\hat{h}_k \sim 0, \text{ pour } k \notin \left\{ -\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} \right\}$$

et

$$\hat{g}_k \sim 0, \text{ pour } k \in \left\{ -\frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} \right\}.$$

Ainsi, lors d'une première décomposition on obtient le résultat schématisé sur la Figure 7.5 :

- La transformée de Fourier du résultat de la décomposition utilisant h (c.à.d. \hat{u}^1) correspond aux basses fréquences de u (les bandes 0 et 1).
- La transformée de Fourier du résultat de la décomposition utilisant g (c.à.d. \hat{u}^2) correspond aux hautes fréquences de u (les bandes 2 et 3), mais l'ordre de ces hautes fréquences est inversé, du fait de la formule de Poisson.

Si l'on décompose à nouveau u^2 (ce que l'on ne faisait pas avec les ondelettes mais que l'on peut faire avec les paquets d'ondelettes) :

- Les basses fréquences de u^2 (c.à.d. les bandes 3) correspondent à la transformée de Fourier de la décomposition avec h .
- Les hautes fréquences de u^2 (c.à.d. les bandes 2) correspondent à la transformée de Fourier de la décomposition avec g .

On généralise l'observation qui est faite ci-dessus de la façon suivante : Un paquet d'ondelettes décomposé au niveau j va être localisé sur une bande de fréquence

$$\left\{ -(k+1) \frac{N}{2^{j+1}}, \dots, -k \frac{N}{2^{j+1}} \right\} \cup \left\{ k \frac{N}{2^{j+1}}, \dots, (k+1) \frac{N}{2^{j+1}} \right\},$$

pour un certain $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$ bien choisi.

Pour établir la correspondance entre un des éléments de la base de paquets d'ondelettes du niveau j et le bon nombre entier $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$, on numérote les 2^j noeuds possibles au niveau j de gauche à

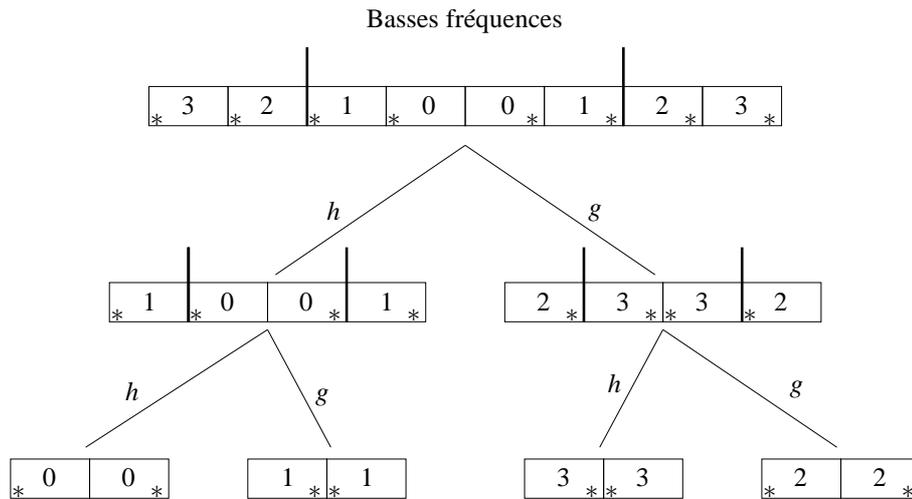


FIGURE 7.5 – Suivit des différentes bandes de fréquences au cours des décompositions avec les filtres h et g .

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
G(p)	0	1	3	2	7	6	4	5	15	14	12	13	8	9	11	10

TABLE 7.1 – Correspondance entre le numéro du paquet d'ondelettes et le numéro de la bande de fréquence correspondante

droite. Le noeud numéroté par p correspond à la bande de fréquence repéré par $k = G(p)$, où la fonction G est construite par récurrence :

$$G(0) = 0, G(1) = 1$$

et pour $j' = 1, 2, \dots, j - 1$ et $p \in \{2^{j'-1}, \dots, 2^j - 1\}$

$$\text{si } G(p) \text{ est pair } \begin{cases} G(2p) = 2G(p) \\ G(2p+1) = 2G(p) + 1 \end{cases}$$

et

$$\text{si } G(p) \text{ est impair } \begin{cases} G(2p) = 2G(p) + 1 \\ G(2p+1) = 2G(p) \end{cases}$$

On remarque en effet (par récurrence) que la parité de $G(p)$ indique le sens des fréquences. Si $G(p)$ est pair les fréquences du signal sont orientées dans le sens normal ; et si $G(p)$ est impair les fréquences du signal ont été inversées par une formule de Poisson permettant d'aboutir dans ce noeud.

Les premiers éléments de la suite G sont donnés dans le Tableau 7.1

On peut donc atteindre n'importe quelle partition du domaine fréquentiel. Bien sûr, si l'on cherche à être trop précis dans le domaine fréquentiel, on aboutira à des niveaux de décomposition élevé et donc à une faible localisation en espace (ce qui n'est généralement pas souhaitable).

Enfin cette analyse n'est pertinente que dans la mesure où les filtres h et g sont eux même bien localisés en fréquences (i.e. ils ont un nombre élevé de moments nuls). Cette analyse n'a, par exemple, qu'une portée très limitée avec l'ondelette de Haar qui n'est pas du tout localisée en fréquence.

7.4 Le passage aux dimensions 2 et plus

Pour définir les paquets d'ondelettes d'images ou, plus généralement, de données en dimension supérieure à 1, on utilise, comme pour les ondelettes, un simple produit tensoriel des éléments de la base. Algorithmiquement :

- pour chaque noeud de l'arbre : si le noeud a des fils on le décompose.
- Décomposer un noeud se fait
 - en appliquant la décomposition successivement sur toutes les lignes de l'image (on obtient deux images) ;
 - en appliquant la décomposition successivement sur toutes les colonnes des deux images.

Concernant les localisations spatiales et fréquentielles, on a des propriétés similaires à la dimension 1. Une souplesse que l'on n'a pas est que les éléments d'une base de paquets d'ondelettes en dimension 2 ont un niveau unique qui s'applique à ces lignes et ses colonnes. Ainsi, le support d'un élément d'une base de paquets d'ondelettes est toujours plus ou moins carré. Il en va de même pour la localisation en fréquence.

On ne peut pas cependant, comme c'était le cas en dimension 1, atteindre toutes les partitions du domaine fréquentiel. Par ailleurs, la localisation fréquentielle se fait au détriment de la localisation en espace des éléments de la base de paquets d'ondelettes.

7.5 D'autres bases

Nous avons vu jusqu'ici les bases de Fourier (voir la Section 3), de cosinus et cosinus locaux (voir la Section 5), d'ondelettes (voir la Section 6) et plusieurs de paquets d'ondelettes (voir la Section 7).

Il existe, en fait, d'autres bases (et dictionnaires) dont l'étude n'est pas faite dans ce cours. Les lecteurs intéressés pourront trouver des détails sur internet à partir des mots clés : ridgelet, curvelet, contourlet, bandlet, brushlet.

Chacune de ces bases est adaptée à un contenu particulier, éventuellement à une échelle particulière. La plupart d'entre elles cherchent à mieux représenter (i.e. à représenter avec le moins de coordonnées possible) les bords des images.

7.6 Les dictionnaires de paquets d'ondelettes

L'un des intérêts des paquets d'ondelettes est qu'ils permettent de définir des dictionnaires de paquets d'ondelettes. Les dictionnaires ("frame" en anglais) sont des systèmes redondants.

Dans le cadre des paquets d'ondelette, un arbre définit une base. On peut aisément construire des dictionnaires en considérant plusieurs arbres. On peut, par exemple, considérer l'union des bases de paquets d'ondelettes complètement décomposés de niveau j , pour $j \in \{1, \dots, J\}$.

L'un des attraits particuliers des dictionnaires de paquets d'ondelettes est que les calculs des coefficients pour j petit sont des calculs intermédiaires pour le calcul des coefficients du niveau $j + 1$. Ils ne sont donc pas à refaire lorsque l'on calcule ces coefficients. Ainsi le coût de calcul des coefficients dans un dictionnaire de paquets d'ondelettes contenant tous les paquets d'ondelettes jusqu'au niveau J est le même que le coût de calcul dans une (unique !) base de paquets d'ondelette complètement décomposé jusqu'au niveau J .

Il en va évidemment de même pour la reconstruction.



FIGURE 7.6 – Décomposition de l'image "barbara" dans une base de paquets d'ondelettes complètement décomposée jusqu'au niveau 1. Les paquets sont présentés dans l'ordre fréquentiel.

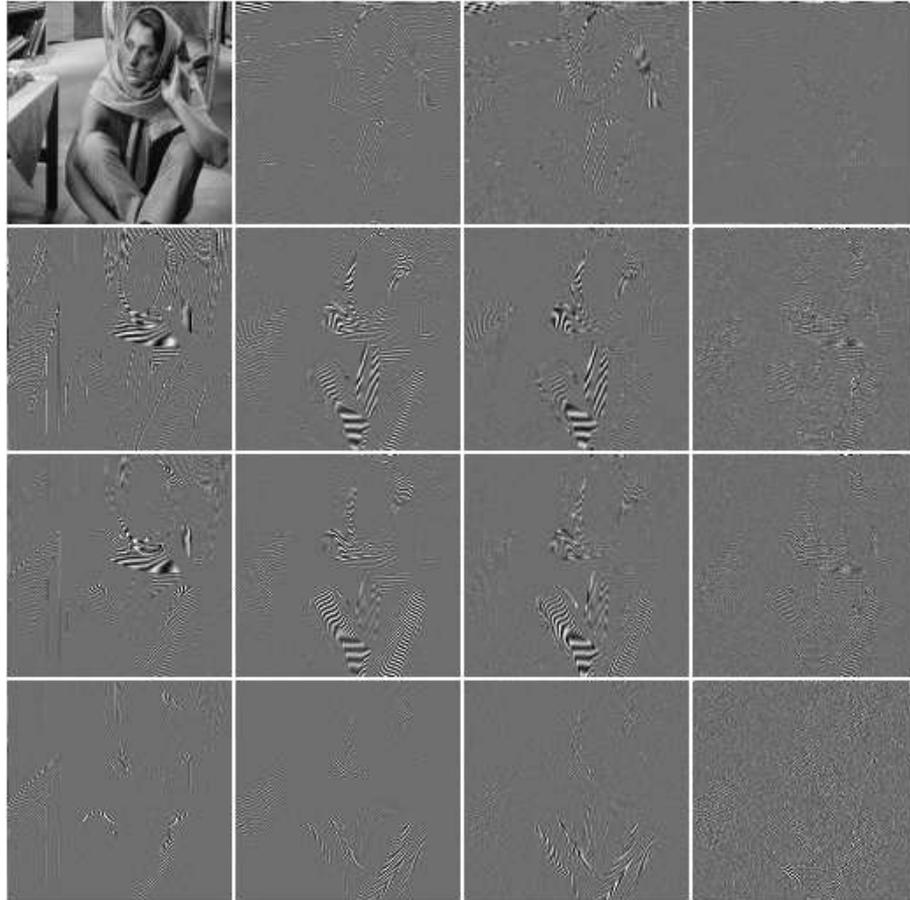


FIGURE 7.7 – Décomposition de l'image "barbara" dans une base de paquets d'ondelettes complètement décomposée jusqu'au niveau 2. Les paquets sont présentés dans l'ordre fréquentiel.

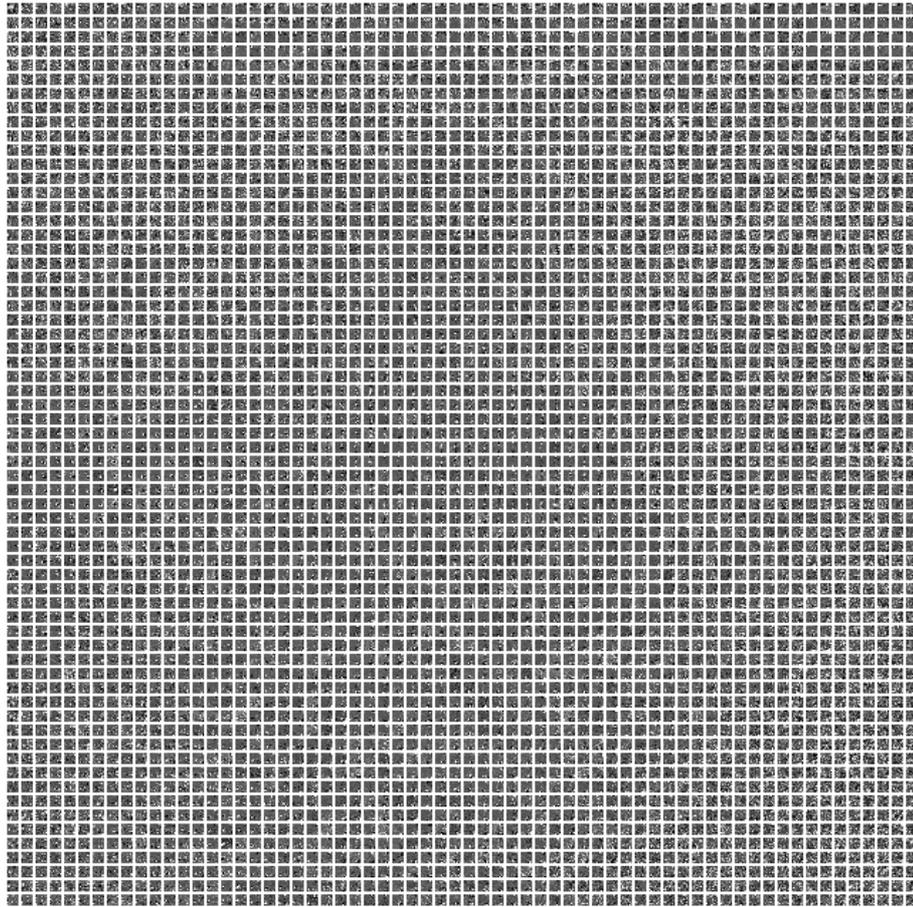


FIGURE 7.8 – Décomposition de l'image "barbara" dans une base de paquets d'ondelettes complètement décomposée jusqu'au niveau 6. Les paquets sont présentés dans l'ordre fréquentiel.

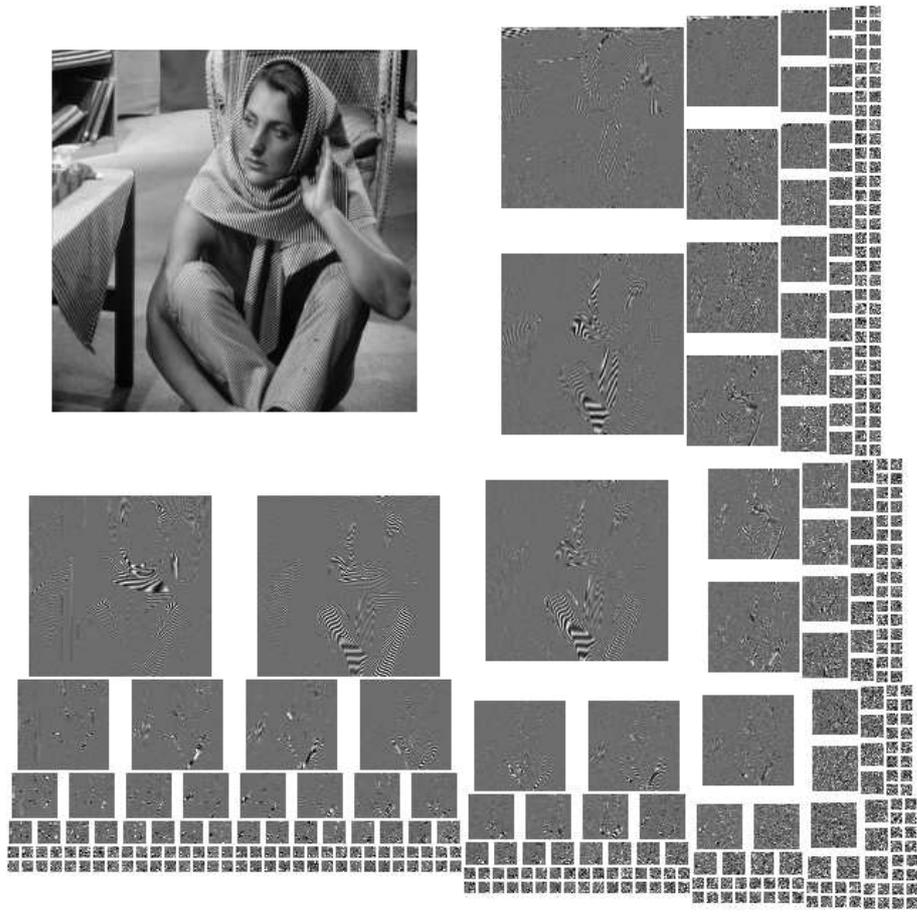


FIGURE 7.9 – Décomposition de l'image "barbara" dans une base de paquets d'ondelettes miroir d'ondelette de niveau 6. Les paquets sont présentés dans l'ordre fréquentiel.

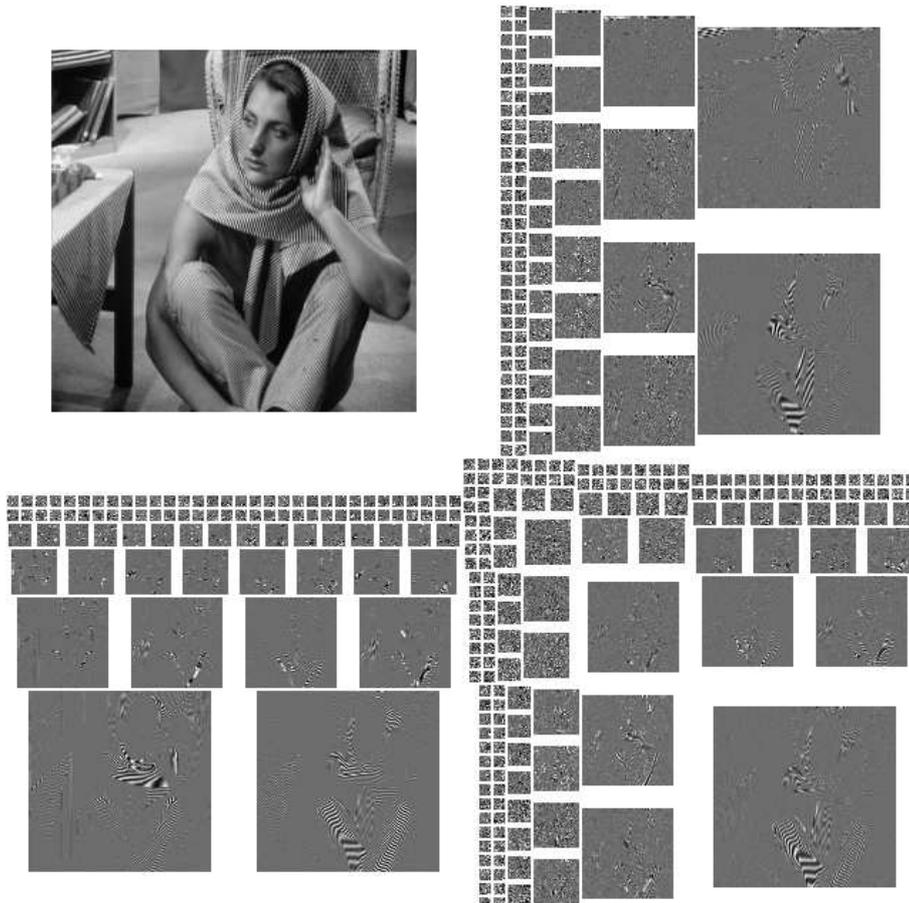


FIGURE 7.10 – Décomposition de l'image "barbara" dans une base de paquets d'ondelettes miroir d'ondelette de niveau 6. Les paquets sont présentés dans leur ordre naturel.

Chapitre 8

La représentation dans un dictionnaire

8.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons envisagé d'exprimer notre donnée dans une base. Ce faisant, nous avons vu plusieurs bases. Certaines bases étaient bien adaptées pour représenter des structures périodiques sur toute la donnée (Fourier), des objets de petite taille (les ondelettes), des textures périodiques (certains paquets d'ondelettes). Nous avons aussi mentionné des bases (ou dictionnaires) permettant de représenter des bords étendus.

En fait ces différentes structures (bords, textures...) sont souvent présentes sur une même donnée. Par exemple, sur l'image *Barbara* (voir Figure 8.1) on a simultanément des bords (par exemple à la frontière entre le pied de la table et le sol) des textures périodiques (par exemple sur le pantalon), des petits objets (par exemple le point blanc au bas du pied de la table ou les marques des livres). On voudrait donc idéalement représenter chaque zone de l'image avec les éléments de la base la mieux adaptée à chaque zone.

Par exemple, si on a deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de \mathbb{R}^{N^2} , on cherche à approximer une donnée $u \in \mathbb{R}^{N^2}$ en utilisant le moins de coordonnées possible dans $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$. On veut donc idéalement résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } l^0((\lambda_\varphi)_{\varphi \in (\mathcal{B} \cup \mathcal{B}')}) \\ \|\sum_{\varphi \in (\mathcal{B} \cup \mathcal{B}')} \lambda_\varphi \varphi - u\| \leq \tau, \end{cases}$$

où $\tau \geq 0$,

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i,j=0}^{N-1} |v_{i,j}|^2}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{N^2}$$

et

$$l^0((\lambda_\varphi)_{\varphi \in (\mathcal{B} \cup \mathcal{B}')}) = \#\{\varphi \in (\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'), \lambda_\varphi \neq 0\},$$

représente le nombre de coordonnées λ_φ non nulles. (On rappelle que $\#$ désigne le cardinal d'un ensemble.)

Ci dessus, on n'a considéré que le cas où le dictionnaire est constitué de deux bases. Plus généralement, si on considère un dictionnaire \mathcal{D} (i.e. un système linéaire fini générant \mathbb{R}^{N^2}), on cherche un jeu de coordonnées résolvant le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } l^0((\lambda_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{D}}) \\ \|\sum_{\varphi \in \mathcal{D}} \lambda_\varphi \varphi - u\| \leq \tau, \end{cases} \quad (8.1)$$

pour $\tau \geq 0$.



FIGURE 8.1 – Exemple d'image contenant des structures ponctuelles, des bords et des textures périodiques.

Proposition 16 Pour tout dictionnaire \mathcal{D} engendrant \mathbb{R}^{N^2} et tout $u \in \mathbb{R}^{N^2}$, le problème d'optimisation (8.1) a une solution. Cette solution n'est généralement pas unique (voir la preuve de la démonstration pour plus de précisions).

Preuve. Il n'est pas très difficile de voir que le problème (8.1) a une solution et qu'il atteint cette solution. En effet, comme \mathcal{D} génère \mathbb{R}^{N^2} , il existe (au moins) un jeu de coordonnées permettant de construire u . Ainsi

$$\left\{ (\lambda_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}, \left\| \sum_{\varphi \in \mathcal{D}} \lambda_\varphi \varphi - u \right\| \leq \tau \right\} \neq \emptyset.$$

Par ailleurs, comme la fonction l^0 est à valeur dans \mathbb{N} (un ensemble minoré), le problème (8.1) a une valeur minimum que l'on note $val(u, \mathcal{D}, \tau)$. On remarque que $val(u, \mathcal{D}, \tau) \in \mathbb{N}$.

On peut donc construire un jeu de coordonnées $(\lambda_\varphi^*)_{\varphi \in \mathcal{D}}$ tel que

$$\begin{cases} l^0((\lambda_\varphi^*)_{\varphi \in \mathcal{D}}) \leq val(u, \mathcal{D}, \tau) + \frac{1}{2} \\ \left\| \sum_{\varphi \in \mathcal{D}} \lambda_\varphi^* \varphi - u \right\| \leq \tau. \end{cases}$$

Comme $l^0(\cdot)$ est à valeur dans \mathbb{N} , on a donc forcément

$$l^0((\lambda_\varphi^*)_{\varphi \in \mathcal{D}}) = val(u, \mathcal{D}, \tau),$$

et $(\lambda_\varphi^*)_{\varphi \in \mathcal{D}}$ est donc un minimiseur de (8.1).

Enfin, il n'est pas non plus très difficile de voir que le problème (8.1) n'a généralement pas une unique solution. En effet, si $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ est tel qu'il existe un minimiseur $(\lambda_\varphi^*)_{\varphi \in \mathcal{S}}$ de (8.1), alors

$$\text{Vect}(\mathcal{S}) \cap \{v \in \mathbb{R}^{N^2}, \|v - u\| \leq \tau\}$$

où

$$\text{Vect}(\mathcal{S}) = \left\{ \sum_{\varphi \in \mathcal{S}} \lambda_\varphi \varphi, (\lambda_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}} \right\},$$

est une boule l^2 de $\text{Vect}(\mathcal{S})$. □

Le principal défaut de (8.1) est qu'il n'est ni convexe ni différentiable. Ceci rend sa résolution approchée par des algorithmes itératifs très difficile. Il est par ailleurs NP-difficile. Ceci signifie que (en général) le calcul d'une solution exacte de (8.1) est (et sera toujours) trop long pour être réalisé.

Il existe évidemment un certain nombre de situations dans lesquels on sait calculer une solution de (8.1). Par exemple, si \mathcal{D} est une base orthonormale, il suffit généralement de seuilier les coordonnées de la donnée à la bonne valeur pour obtenir une solution.

Proposition 17 On considère une base orthonormée \mathcal{D} et on suppose que $u \in \mathbb{R}^{N^2}$ est tel que

$$u_\varphi \neq u_{\varphi'} \quad , \quad \text{pour tout } \varphi \neq \varphi' \in \mathcal{D} \quad (8.2)$$

où $(u_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ est l'unique jeu de coordonnées tel que

$$u = \sum_{\varphi \in \mathcal{D}} u_\varphi \varphi.$$

On définit, pour $\alpha \geq 0$, la fonction de seuillage

$$T_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } |t| < \alpha, \\ t & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il existe $\alpha^* \geq 0$ (dont la construction est fournie dans la preuve) tel que

$$(T_{\alpha^*}(u_\varphi))_{\varphi \in \mathcal{D}}$$

soit un minimiseur de (8.1).

Preuve. On remarque tout d'abord que si $\tau \geq \|u\|$, les coordonnées uniformément nulles sont une solution triviale de (8.1). L'énoncé de la proposition est donc vrai pour tout $\alpha^* > \max\{|u_\varphi|, \varphi \in \mathcal{D}\}$.

Supposons maintenant que $\tau < \|u\|$.

En utilisant les notations de la proposition, on note pour tout $\alpha \geq 0$

$$f(\alpha) = \sum_{\varphi: |u_\varphi| < \alpha} u_\varphi^2,$$

il n'est pas difficile de voir que f est croissante, constante par morceaux et semi-continue inférieurement. On voit aussi qu'elle vaut 0 en 0 et $\|u\|^2$ pour $\alpha > \max\{|u_\varphi|, \varphi \in \mathcal{D}\}$.

On note aussi $\alpha^* = \max\{\alpha \geq 0, f(\alpha) \leq \tau^2\}$ et

$$\mathcal{S}^* = \{\varphi \in \mathcal{D}, |u_\varphi| < \alpha^*\}.$$

Soit $(\lambda_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ satisfaisant $\#\mathcal{S} > \#\mathcal{S}^*$ pour $\mathcal{S} = \{\varphi \in \mathcal{D}, \lambda_\varphi = 0\}$, on a

$$\left\| \sum_{\varphi \in \mathcal{D}} \lambda_\varphi \varphi - u \right\|^2 = \sum_{\varphi \in \mathcal{D}} (\lambda_\varphi - u_\varphi)^2 \geq \sum_{\varphi \in \mathcal{S}} u_\varphi^2. \quad (8.3)$$

Par ailleurs, comme $\#\mathcal{S} > \#\mathcal{S}^*$, on sait qu'il existe $\varphi_0 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^*$. Mais, du fait de la construction de \mathcal{S}^* ,

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{S} \setminus \{\varphi_0\}} u_\varphi^2 \geq \sum_{\varphi \in \mathcal{S}^*} u_\varphi^2.$$

On ajoute en effet plus de termes et ceux de \mathcal{S}^* sont plus petits. On a donc finalement que, du fait de (8.2), de la structure de f^* et de la définition de α^* , on a forcément

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{S}} u_\varphi^2 \geq \sum_{\varphi \in \mathcal{S}^*} u_\varphi^2 + u_{\varphi_0}^2, \quad (8.4)$$

Remarquez que

$$\forall \varphi_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}^*, \sum_{\varphi \in \mathcal{S}^*} u_\varphi^2 + u_{\varphi_0}^2 \geq f(\alpha^*) + \alpha^{*2}. \quad (8.5)$$

On a par ailleurs forcément, du fait de la définition de α^* ,

$$f(\alpha^*) + \alpha^{*2} > \tau^2. \quad (8.6)$$

On déduit donc finalement de (8.3), (8.4), (8.5), (8.6), que

$$\left\| \sum_{\varphi \in \mathcal{D}} \lambda_\varphi \varphi - u \right\|^2 > \tau^2.$$

Ainsi, pour tout $(\lambda_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$

$$l^0((\lambda_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{D}}) < N^2 - \#\mathcal{S}^* \implies \left\| \sum_{\varphi \in \mathcal{D}} \lambda_\varphi \varphi - u \right\|^2 > \tau^2$$

et donc que

$$\text{val}(u, \mathcal{D}, \tau) \geq N^2 - \#\mathcal{S}^*.$$

Enfin, on a par ailleurs que $(T_{\alpha^*}(u_\varphi))_{\varphi \in \mathcal{D}}$ vérifie

$$\begin{cases} l^0((T_{\alpha^*}(u_\varphi))_{\varphi \in \mathcal{D}}) = N^2 - \#\mathcal{S}^*, \\ \sum_{\varphi \in \mathcal{D}} (T_{\alpha^*}(u_\varphi) - u_\varphi)^2 = \sum_{\varphi \in \mathcal{S}^*} u_\varphi^2 \leq \tau^2. \end{cases}$$

On en conclut donc que $(T_{\alpha^*}(u_\varphi))_{\varphi \in \mathcal{D}}$ est un minimiseur de (8.1). \square

Remarquez que la condition (8.2) n'exclut qu'un ensemble de mesure nulle de données u . Ce n'est donc pas une restriction trop importante. On pourrait par ailleurs l'éviter en raffinant un peu le choix des coordonnées à seuiller.

Toutes les considérations énoncés ci-dessus ont conduit la communauté travaillant dans ce domaine à proposer différents algorithmes permettant d'approximer une solution de (8.1) en un temps acceptable.

Les principaux mots clefs de ce domaine sont : représentation parcimonieuses (sparse representation, sparsity), dictionnaire (dictionary, frame), échantillonnage compressé (compressed/compressive sensing).

8.2 Notations matricielle des dictionnaires

8.2.1 Introduction

Jusque là, nous avons utilisé des notations différentes pour les différentes bases que nous avons considérées. Nous allons dans la suite de ce chapitre utiliser des notations matricielles. Elles sont, en effet, bien pratiques et majoritairement utilisées dans le domaine des représentations parcimonieuses.

Pour cela on considérera que la donnée $u \in \mathbb{R}^{N^2}$ est un unique vecteur colonne. Ce vecteur est obtenu en faisant la concaténation de toutes les colonnes de la u . On considère également que les éléments du dictionnaire \mathcal{D} sont des vecteurs colonnes obtenus en faisant la concaténation des colonnes des éléments de la base. On note A la matrice obtenue en mettant côte à côte tous les éléments du dictionnaire. La matrice A est donc une matrice de taille $N^2 \times \#\mathcal{D}$ (c'est une matrice rectangulaire avec plus de colonnes que de lignes). Si on met les coordonnées $(\lambda_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ dans un vecteur colonne x , on a alors

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{D}} \lambda_\varphi \varphi = Ax.$$

Avec ces notations, le problème idéal (8.1) s'écrit

$$\begin{cases} \text{Min } l^0(x) \\ \|Ax - u\| \leq \tau, \end{cases} \quad (8.7)$$

pour $\tau \geq 0$.

Un dessin de la situation dans laquelle on se trouve est présentée sur la Figure 8.2.

Les différents algorithmes que nous allons voir¹ utilisent deux opérateurs mettant en jeu le dictionnaire :

1. comme tous les algorithmes dans ce domaine

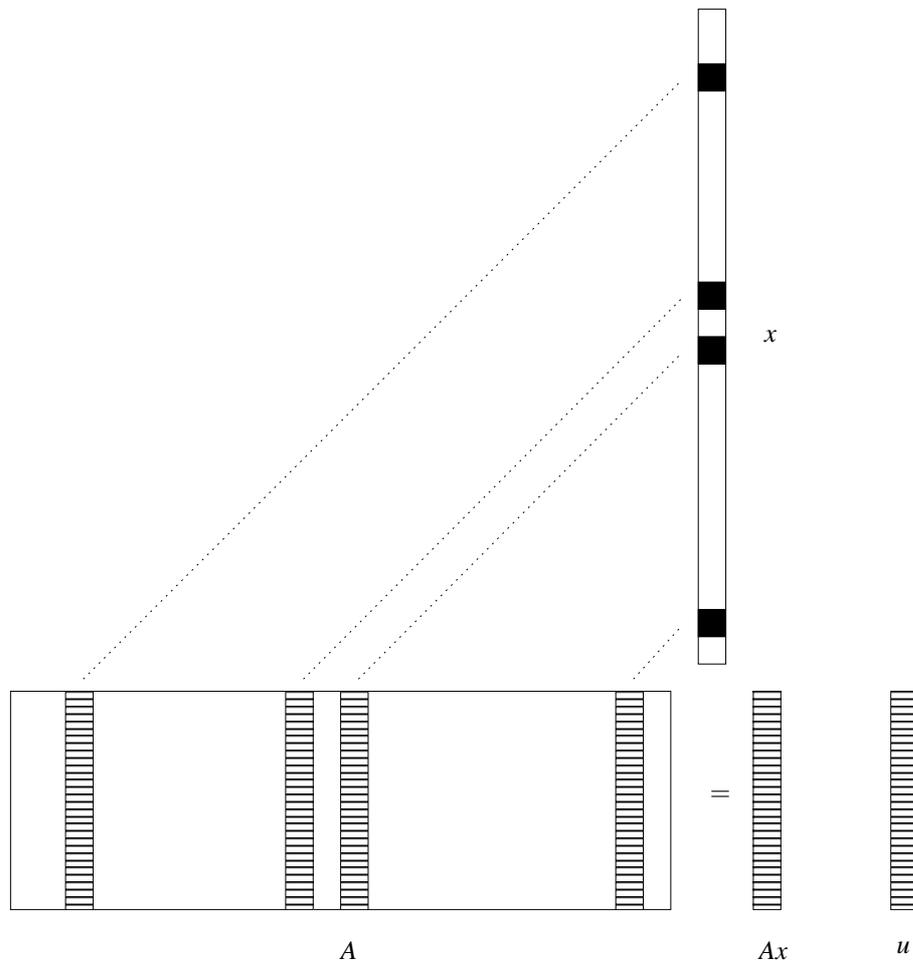


FIGURE 8.2 – Représentation des matrices et vecteurs manipulés dans le problème (8.7). Les cases noires de x représentent les coordonnées non-nulles.

- la multiplication Ax , pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{D}}$
- la multiplication $A^t v$, pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^{N^2}$ et pour A^t la transposée de A . Il n'est pas difficile de voir que cela correspond au calcul de

$$A^t v = (\langle v, \varphi \rangle)_{\varphi \in \mathcal{D}},$$

où $\langle v, \varphi \rangle$ désigne le produit scalaire entre v et φ .

Le temps de calcul nécessaire à un algorithme construisant une approximation parcimonieuse est souvent majoritairement passé à faire ces multiplications. Nous détaillons ci-dessous comment faire ces calculs pour les bases et dictionnaires vus jusqu'ici.

8.2.2 Le cas des bases

Dans les chapitres précédents, nous avons vu plusieurs bases. Si l'on utilise les notation matricielles, on sait calculer, pour chacune de ses bases Ax et son inverse $A^{-1}v$. Nous détaillons ci-dessous comment calculer les opérateurs Ax et $A^t v$ pour ces différentes bases.

- Pour les **bases orthonormales** : C'est la cas des bases d'ondelettes et de paquets d'ondelettes orthogonales. On sait que pour une base orthonormale, on a

$$\forall v \in \mathbb{R}^{N^2}, \quad v = \sum_{\varphi \in \mathcal{D}} \langle v, \varphi \rangle \varphi$$

- Nous pouvons calculer Ax en utilisant l'algorithme de reconstruction.
- Nous pouvons donc calculer les coordonnées $A^t v$ en appliquant à v l'algorithme calculant la décomposition.
- Pour les **bases orthogonales dont tous les éléments ont la même norme δ** : C'est le cas de la base de Fourier ($\delta = \frac{1}{N}$), de la base de cosinus, de la base de cosinus locaux. Il n'est pas difficile de voir que l'on a alors

$$\forall v \in \mathbb{R}^{N^2}, \quad v = \frac{1}{\delta^2} \sum_{\varphi \in \mathcal{D}} \langle v, \varphi \rangle \varphi$$

Par ailleurs, l'algorithme de reconstruction habituel comprend la multiplication par $\frac{1}{\delta^2}$.

- On peut donc calculer Ax en multipliant le résultat l'algorithme de reconstruction habituel par δ^2 .
- On peut calculer $A^t v$ en utilisant l'algorithme de décomposition habituel.
- Pour les **bases biorthogonale** : Dans le cas particulier des bases d'ondelettes et de paquets d'ondelettes biorthogonales, on calcule la décomposition et son inverse à l'aide de filtres $(h, g, \tilde{h}, \tilde{g})$ (voir les Section 6.2 et 6.3). On obtient alors deux bases bi-orthogonales $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N^2}$ et $(\tilde{\varphi}_i)_{1 \leq i \leq N^2}$ qui vérifient

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{R}^{N^2}, \quad v &= \sum_{i=1}^{N^2} \langle v, \varphi_i \rangle \tilde{\varphi}_i, \\ &= \sum_{i=1}^{N^2} \langle v, \tilde{\varphi}_i \rangle \varphi_i. \end{aligned}$$

- Pour calculer Ax , on recompose les coefficients avec les filtres \tilde{h} et \tilde{g} (respectivement h et g).
 - Pour calculer $A^t v$ on décompose avec les filtres \tilde{h} et \tilde{g} (respectivement h et g).
- Ainsi, contrairement à ce que l'on fait pour calculer une décomposition en ondelette bi-orthogonale et son inverse, on n'utilise que deux filtres pour les calculs de Ax et $A^t v$: soit \tilde{h} et \tilde{g} ; soit h et g .

8.2.3 L'union de bases

Ici, on considère un dictionnaire constitué de plusieurs bases $\mathcal{D} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_K$. On considère, pour $i = 1, \dots, K$ et pour chaque base \mathcal{B}_i , la matrice A_i correspondante. La matrice A correspondant à \mathcal{D} est alors la concaténation (en ligne) des matrices A_i , pour $i = 1, \dots, K$. Le calcul de Ax , où x est la concaténation des vecteurs colonnes x_1, \dots, x_K se fait donc avec la formule suivante :

$$Ax = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_Kx_K.$$

Le calcul de $A^t v$, pour $v \in \mathbb{R}^{N^2}$ se fait en concaténant tous les vecteurs colonnes $A_i^t v$, pour $i = 1, \dots, K$.

8.3 La minimisation l^1

Comme nous l'avons vu, le problème (8.7) est trop difficile pour être résolu. Une alternative possédant quelques similarités avec le problème (8.7) consiste à remplacer le terme l^0 de (8.7) par un terme l^1 . On obtient alors le problème

$$\begin{cases} \text{Min } l^1(x) \\ \|Ax - u\| \leq \tau, \end{cases} \quad (8.8)$$

pour $\tau \geq 0$ et pour la norme l^1 définie par

$$l^1(x) = \sum_{i=1}^{\#\mathcal{D}} |x_i|.$$

L'avantage de ce problème est que l'on peut calculer ses solutions de manière exacte en exploitant la structure de ce problème. Par contre, ce calcul n'est faisable en un temps acceptable que dans les cas où sa solution reste très parcimonieuse (i.e. à très peu de coordonnées non nulles). Lorsque ce n'est pas le cas, on peut utiliser un algorithme itératif pour approcher une solution de (8.8). Ce problème est, en effet, convexe et coercif (mais non différentiable).

Un nombre important d'algorithmes ont été proposées pour résoudre (8.8). Ils reposent souvent sur un argument de dualité lagrangienne qui permet de récrire (8.8) sous la forme

$$l^1(x) + \frac{\beta}{2} \|Ax - u\|^2, \quad (8.9)$$

pour une valeur de β bien choisie.

Les problèmes (8.9) et (8.8) sont généralement appelés "minimisation l^1 " ou "Basis Pursuit Denoising". Ils sont souvent considérés comme les meilleures alternatives convexe du problème (8.1). Ceci est notamment lié au fait qu'ils ont le meilleur comportement observé vis à vis dans le cadre d'une des applications de (8.1) et (8.8) : le "compressed sensing".

8.4 Les algorithmes de type "Orthogonal Matching Pursuit"

Une alternative purement algorithmique au problème (8.7) est l'orthogonal matching pursuit (OMP). En fait, il y a toute une famille d'algorithmes se ressemblant : Matching Pursuit, stagewise OMP, CO-SAMP...

Le point commun entre ces algorithmes est de sélectionner à chaque itération une ou plusieurs coordonnées parmi les plus grandes coordonnées (en valeur absolue) de $A^t r$, où $r = u - Ax$ et x est la solution courante. Intuitivement, r contient la partie de u qui n'est pas encore présente dans Ax . Chaque coordonnée de $A^t r$ représente donc la corrélation entre un élément du dictionnaire et ce qu'il reste à exprimer. Cela revient à choisir les vecteurs "pointant" le plus dans la direction de r .

Une fois qu'un ensemble d'éléments du dictionnaire est sélectionné, on construit la solution en projetant u orthogonalement sur le sous-espace vectoriel engendré par ces éléments. Plus précisément, on note

- $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$,
- $\text{Vect}(\mathcal{S})$ le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^{N^2} engendré par les éléments de \mathcal{S}
- $P_{\text{Vect}(\mathcal{S})}(v)$ la projection orthogonale d'un élément $v \in \mathbb{R}^{N^2}$ sur $\text{Vect}(\mathcal{S})$ et est défini par

$$P_{\text{Vect}(\mathcal{S})}(v)_\varphi = \begin{cases} \tilde{x}_\varphi & , \text{ si } \varphi \in \mathcal{S} \\ 0 & , \text{ sinon,} \end{cases} \quad (8.10)$$

où

$$\tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{S}}}{\text{argmin}} \|v - A^{\mathcal{S}}x\|^2, \quad (8.11)$$

dans lequel $A^{\mathcal{S}}$ désigne la matrice obtenue en extrayant de A les colonnes dont l'indice est dans \mathcal{S} . Dans les algorithmes de la famille Orthogonal Matching Pursuit, on construit itérativement \mathcal{S} comme indiqué ci-dessus et on calcule les coordonnées de $P_{\text{Vect}(\mathcal{S})}(u)$ à l'aide de (8.10). Il est important de noter que dans (8.11) le calcul de \tilde{x} , n'est pas très difficile. En effet, il s'agit d'un simple problème de minimisation d'une fonction quadratique dont le gradient vaut

$$-(A^{\mathcal{S}})^T (v - A^{\mathcal{S}}x).$$

Si l'algorithme OMP est arrêté suffisamment tôt, un point critique

$$\tilde{x} = [(A^{\mathcal{S}})^T A^{\mathcal{S}}]^{-1} (A^{\mathcal{S}})^T v,$$

est aussi une solution de (8.11). Cette dernière expression est facile à calculer lorsque $\#\mathcal{S}$ est petit. Cependant, dans certains cas (notamment lorsque la solution n'est pas très parcimonieuse), le calcul de \tilde{x} peut être un peu long. Bien souvent, une algorithmique particulière est nécessaire pour accélérer ce calcul.

Nous présentons l'Orthogonal Matching Pursuit dans la Table 8.1.

<ul style="list-style-type: none"> * Entrées : La donnée u, un dictionnaire \mathcal{D}, un paramètre de critère d'arrêt. * Sortie : Les coordonnées x * L'algorithme : <ul style="list-style-type: none"> - On initialise $\mathcal{S} = \emptyset, r = u$ - Tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait : <ul style="list-style-type: none"> - On calcule $A^T r$ - On cherche φ correspondant au maximum de $A^T r$ - On met à jour $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{\varphi\}$ - On calcule les coordonnées x de la projection $P_{\text{Vect}(\mathcal{S})}(u)$ et le nouveau résidu $r = u - P_{\text{Vect}(\mathcal{S})}(u)$

TABLE 8.1 – L'algorithme Orthogonal Matching Pursuit.

Bibliographie

- [1] A. Cohen. *Ondelettes et traitement numérique du signal*. Masson, Paris, 1992.
- [2] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, Boston, 1998.
- [3] M. Misiti, Y Misiti, G. Oppenheim, and J.M. Poggi. *Les ondelettes et leurs applications*. Hermes science, Paris, 2003.
- [4] G. Peyré. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*. Ellipse, 2004.