

Pour tout réseau ReLU, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$, par définition

- $\mathcal{U}_1^x, \dots, \mathcal{U}_{m_x}^x$ sont non-vides, disjoints
- Pour tout j , $\theta \mapsto a(x, \theta)$ est constante sur $\mathcal{U}_j^x$ et prend des valeurs distinctes.
- $\forall j$, $\theta \mapsto \text{rk}(Df_\theta(x))$ est constante sur $\mathcal{U}_j^x$

De plus,

- Les ensembles $\mathcal{U}_1^x, \dots, \mathcal{U}_{m_x}^x$ sont ouverts
- $\left(\bigcup_{j=1}^{m_x} \mathcal{U}_j^x \right)^c$ est fermé, de mesure de Lebesgue nulle.
- $\forall j$, $\theta \mapsto f_\theta(x)$ est polynomiale de degré inférieur à H sur $\mathcal{U}_j^x$.

preuve: Les trois premiers items sont des conséquences immédiates des définitions de $\tilde{\mathcal{U}}_j^x$ et $\mathcal{U}_j^x$.

Le dernier item est une conséquence du Lemme.

Montrons que $\forall j \in \{1, \dots, m_x\}$, $\mathcal{U}_j^x$ est ouvert.

Soit $\theta \in \mathcal{U}_j^x$. Comme $\theta \in \tilde{\mathcal{U}}_j^x$ qui est ouvert et que $\theta \mapsto f_\theta(x)$ est polynomiale sur $\tilde{\mathcal{U}}_j^x$, la fonction $\theta \mapsto Df_\theta(x)$ est continue dans un voisinage de θ .

rk constant p.p. sur $\tilde{\mathcal{U}}_j^x$ 1/4

On a $\text{rk}(Df_\theta(x)) = r_j^x$. Comme la fonction rank est semi-continue inférieurement, la fonction $\theta \mapsto \text{rk}(Df_\theta(x))$ est aussi semi-continue inférieurement.

et il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\forall \theta' \in B(\theta, \varepsilon)$

$$\theta' \in \tilde{U}_j^x \text{ et } \text{rk}(Df_{\theta'}(x)) \geq r_j^x - \frac{1}{2}.$$

Du fait de la définition de r_j^x et comme le rk est entier, on a donc $\text{rk}(Df_{\theta'}(x)) = r_j^x$.

On a donc $B(\theta, \varepsilon) \subset U_j^x$.

U_j^x est ouvert.

Montrons maintenant que $\left(\bigcup_{j=1}^{m_x} U_j^x \right)^c$ est muni de mesure de Lebesgue nulle.

On considère des bases b de $\mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^B$ et c de $\mathbb{R}^{m_x \times n}$. On note $J_\theta(x)$ la matrice de $Df_\theta(x)$ dans ces bases. Comme Df_θ

Soit $j \in \{1, \dots, m_x\}$, comme $\theta \mapsto f_\theta(x)$ est polynomiale sur $\tilde{U}_j^x$, la fonction $\theta \mapsto J_\theta(x)$ est aussi polynomiale sur $\tilde{U}_j^x$.

Soit $\theta' \in \tilde{U}_j^x$ tel que $\text{rk}(Df_{\theta'}(x)) = r_j^x$, on a

$$\left[\text{rk constant p.p. sur } \tilde{U}_j^x \right] \quad 2 / 4$$

aussi $\text{rk} (J_{\theta'}(x)) = r_j^x$. On peut donc extraire
 de $J_{\theta'}(x) \in \mathbb{R}^{(|E|+|A|) \times m \times L}$ une matrice $W_{\theta'}(x) \in \mathbb{R}^{r_j^x \times r_j^x}$
 telle que $\text{rk} (W_{\theta'}(x)) = r_j^x$. On a donc

$$\det (W_{\theta'}(x)) \neq 0.$$

Or $\theta \mapsto W_{\theta}(x)$ est polynomiale et donc

$\theta \mapsto \det (W_{\theta}(x))$ est polynomiale et non nulle sur
 en $\theta' \in \tilde{U}_j^x$. On note

$$\gamma_j = \{ \theta \in \tilde{U}_j^x \mid \det (W_{\theta}(x)) = 0 \}$$

γ_j est de mesure nulle.

On a pour tout $\theta \in \tilde{U}_j^x \setminus \gamma_j$, $\text{rk} (W_{\theta}(x)) = r_j^x$ et
 donc $\text{rk} (J_{\theta}(x)) = \text{rk} (Df_{\theta}(x)) \geq r_j^x$.

On fait de la définition de r_j^x , on a

$$\text{pour tout } \theta \in \tilde{U}_j^x \setminus \gamma_j, \text{rk} (Df_{\theta}(x)) = r_j^x.$$

$$\text{Finalement, } \tilde{U}_j^x \setminus \gamma_j \subset U_j^x,$$

$$\text{c'est à dire } (U_j^x)^c \subset (\tilde{U}_j^x \setminus \gamma_j)^c \quad (*)$$

On a donc et on conclut

$$\forall j \in \{1, \dots, m_x\}, \exists \gamma_j \subset \tilde{U}_j^x \text{ de mesure nulle tq } (*) \text{ soit vraie.}$$

rk constant p.p. sur $\tilde{U}_j^x$ 3/4

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{j=1}^{m \times} U_j^x \right)^c &= \bigcap_{j=1}^{m \times} (U_j^x)^c \\
&\subset \bigcap_{j=1}^{m \times} (\tilde{U}_j^x \cup \gamma_j)^c \\
&= \bigcap_{j=1}^{m \times} \left[(\tilde{U}_j^x)^c \cap \gamma_j^c \right] \\
&\subset \bigcap_{j=1}^{m \times} \left[(\tilde{U}_j^x)^c \cup \bigcup_{j'=1}^{m \times} \gamma_{j'}^c \right] \\
&= \left(\bigcap_{j=1}^{m \times} (\tilde{U}_j^x)^c \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m \times} \gamma_j^c \right) \\
&= \left(\bigcup_{j=1}^{m \times} \tilde{U}_j^x \right)^c \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m \times} \gamma_j^c \right)
\end{aligned}$$

Ces deux derniers ensembles sont de mesure de Lebesgue nulle du fait du Lemme et parceque tous les γ_j sont de mesure nulle. Donc

$\left(\bigcup_{j=1}^{m \times} U_j^x \right)^c$ est de mesure nulle.



rk constant p-p sur $\tilde{U}_j^x$ 4 / 4