

Corollaire:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et toute fonction objectif $R: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$
 • Pour tout $\theta^* \in \bigcup_{j=1}^{p \times} \mathcal{U}_j^x$. On note $k: \text{rk}(R_{\theta^*}(X))$

θ^* est un p.c. de (P) $(\Rightarrow) (\theta^*, 1)$ est KKT de (P_k)

• Pour tout $\theta^* \in \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^B$. On note $k: \dim^+(\theta^*, X)$

θ^* est un minimiseur de (P) $(\Rightarrow) \theta^*$ est un minimiseur de (P_k)

θ^* est un point selle de (P) $(\Rightarrow) \theta^*$ est un point selle de (P_k)

On prouve uniquement l'énoncé sur les minimiseurs locaux.

preuve: On note $\forall \theta \in \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^B$, $f(\theta) = R(\beta_\theta(X))$

$\Rightarrow$ On considère $\theta^* \in \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^B$, un minimiseur local de (P).

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \theta \in B(\theta^*, \varepsilon)$ $f(\theta^*) \leq f(\theta)$

Comme le rang ne prend qu'un nombre fini de valeurs
 et $k: \dim^+(\theta, X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{j: B(\theta, \varepsilon) \cap \mathcal{U}_j^x \neq \emptyset} r_j^x$ est croissante

et semi-continue inférieurement, il existe ε' et $j^* \in \llbracket 1, p \times \rrbracket$ tels que

$B(\theta^*, \varepsilon') \cap \mathcal{U}_{j^*}^x \neq \emptyset$, $r_{j^*}^x = k$ et

$\forall j$ tel que $B(\theta^*, \varepsilon') \cap \mathcal{U}_j^x \neq \emptyset$ $r_j^x \leq k$.

On a donc $\dim^-(\theta, X) \leq k$, $\forall \theta \in B(\theta^*, \varepsilon')$

On pose $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon, \varepsilon')$ et $\forall \theta \in B(\theta^*, \varepsilon_0)$

$\dim^-(\theta, X) \leq k$ et $f(\theta) \leq f(\theta^*)$

θ^* est donc un minimiseur local de (P_k) .

$\Leftarrow$ | On considère $\theta^* \in \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^A$ un minimiseur local de (P_k) pour $k = \dim^+(\theta^*, x)$.

Il existe $\varepsilon > 0$ tq $\forall x \in B(\theta^*, \varepsilon)$ satisfaisant $\dim^-(\theta, x) \leq k$, on ait $f(\theta) \leq f(\theta^*)$.

Mais, comme précédemment, il existe $\varepsilon' > 0$ tel et j^* tels que $B(\theta^*, \varepsilon') \cap U_{j^*}^{x^*} \neq \emptyset$, $k = r_{j^*}^{x^*}$, et pour tout j et $\forall \theta \in B(\theta^*, \varepsilon') \cap U_j^{x^*}$ $r_j^{x^*} \leq k$

On a donc $\dim^-(\theta, x) \leq k \quad \forall \theta \in B(\theta^*, \varepsilon')$

et finalement $\forall \theta \in B(\theta^*, \min(\varepsilon, \varepsilon'))$

$$f(\theta) \leq f(\theta^*).$$

θ^* est un minimiseur local de (P) .

□