Université Paul Sabatier - Toulouse 3
Master 1 - ESR

Second Semestre 2018-2019

Analyse Fonctionnelle

Contrôle Terminal

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Vous veillerez à justifier soigneusement toutes vos réponses. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsque vous ne pouvez répondre à une question, il vous est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il était demandé de démontrer.

Exercice 1. Questions de cours [25%].
On souhaite montrer qu'un espace vectoriel normé est de Banach si et seulement si toute série de E absolument convergence est convergente.

(1) Soient E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de E. On suppose qu'il existe une sous-suite $(y_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers y, montrer alors que
$$\lim_{n\to\infty} x_n = y.$$
(2) Soient E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de E. Montrer qu'il existe une sous-suite $(y_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que
$$\|y_{p+1} - y_p\|_E \le \frac{1}{2^p}, \quad p \in \mathbf{N}^*.$$
(3) Montrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement toute série de E absolument convergente est convergente.

(4) Soit $E = C([-1,1],\mathbf{R})$, l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$, muni de la norme $\|.\|_1$. On pose
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-1,0], \\ n\,x, & \text{si } x \in [0,1/n], \\ 1, & \text{si } x \in [1/n,1]. \end{cases}$$
— Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans E. Est-elle convergente dans E ?

— On considère la série de terme général $g_n = f_{n+1} - f_n$. Montrer que
$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \|g_n\|_1 < \infty, \quad \textit{mais} \sum_{n\in\mathbf{N}^*} g_n \quad \textit{ne converge pas dans } E.$$

Exercice 2. **Questions traitées partiellement en TD [25%].**
Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés et b une application bilinéaire de $E \times F$ à valeur dans G.
On note
$\forall x \in E$, $b_x : F \mapsto G$, définie par $b_x(y) = b(x, y)$ et
$\forall y \in F$, $b^y : E \mapsto G$, définie par $b^y(x) = b(x, y)$.

(1) On suppose que b est séparément continue, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, b_x est continue et pour tout $y \in F$, b^y est continue.
Montrer que si E ou F est un espace de Banach, alors b est continue sur $E \times F$ dans G.

(2) On suppose désormais que $E = F = l^1$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.
Soit b la forme bilinéaire définie par
$$b(x, y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n \, y_n,$$
avec $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont des éléments de l^1.
— Montrer que b est bien définie et est séparément continue.
— Montrer que b n'est pas continue sur $E \times F$. Expliquer le résultat.
On pourra utiliser les éléments $x^{(k)} \in l^1$, $k \in \mathbf{N}^*$ tels que $x_n^{(k)} = 1$ lorsque $n \leq k$ et 0 sinon.

Exercice 3. **Espaces de Banach [20%].**
Soient E, F deux espaces de Banach et $T : E \mapsto F$ une application linéaire.

(1) Rappeler le théorème du graphe fermé.
(2) Montrer que T est continue si et seulement si pour tout $f \in F^*$, $f \circ T \in E^*$, où E^*, (resp. F^*) désigne le dual topologique de E (resp. F).

Exercice 4. **Opérateurs continus [30%].**
Soit $H = l^2$ et $(e_j)_{j \in \mathbf{N}^*}$ la base hilbertienne canonique de H, c'est-à-dire e_j est la suite dont tous les éléments sont nuls sauf celui de rang j qui vaut 1.
On note $H_0 = \mathrm{Vect}\{e_n, \; n \in \mathbf{N}^*\}$ et on définit l'opérateur linéaire $S_0 : \; H_0 \mapsto H_0$ tel que $S_0 \, e_n \; = \; e_{n+1}$, puis prolongé à H_0 par linéarité.

(1) Montrer que S_0 peut être prolongée de manière unique sur H tout entier comme application linéaire continue S de H dans H.
(2) Montrer alors que S est isométrique. Quelle est sa norme ? On pourra d'abord montrer que S_0 est une isométrie.
(3) Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $T \, S = \mathrm{Id}$ mais que S n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(H)$. On pourra raisonner comme dans (1) et (2).

(4) Montrer que pour tout $\mu \in \mathbf{C}$, l'équation en x, $Sx = \mu x$ n'admet que 0 comme solution.

(5) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Résoudre l'équation $Sx - \lambda x = e_p$.

(6) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ avec $|\lambda| \neq 1$, montrer que

$$r = \inf\{\|Sx - \lambda x\|, \quad \|x\| = 1\}$$

est strictement positif. En déduire que $\mathrm{Im}(S - \lambda \mathrm{Id})$ est un sous-espace vectoriel fermé de H [on pourra remarquer que si $(Sx_n - \lambda x_n)_n$ est une suite de Cauchy alors x_n l'est aussi...].

(7) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ avec $|\lambda| = 1$.
— Etudier la suite $((S - \lambda\,\mathrm{Id})f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ pour $f_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^{n} \lambda^{-p}\, e_p$.
— En déduire que $G = \mathrm{Im}(S - \lambda \mathrm{Id})$ n'est pas fermé dans H.

(8) Donner la définition du spectre d'un opérateur.

(9) Montrer que le spectre $\sigma(S)$ de S est le disque unité fermé.