

## (Texte public)

**Résumé :** On s'intéresse à un modèle d'écoulement en milieux poreux.

**Mots clefs :** Équations aux dérivées partielles. Différences finies. Systèmes non linéaires.

---

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

Dans tout le texte on dira qu'une fonction  $F$  de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$  est coercive si elle tend vers l'infini à l'infini, c'est-à-dire  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|F(x)\| = +\infty$ .

### 1. Introduction

On s'intéresse dans ce texte à un modèle d'écoulement en milieu poreux. Un cadre typique d'application de tels modèles est celui de l'industrie pétrolière. La situation géométrique bi-dimensionnelle (très simplifiée bien sûr) est celle décrite par la figure 1. Le pétrole est supposé piégé dans la zone poreuse et les zones hachurées sont totalement imperméables. Le but est de faire sortir le pétrole par les deux extrémités de la zone poreuse (à gauche et à droite sur le dessin) en injectant de l'eau avec un certain débit à travers des puits représentés sur la figure.

La zone poreuse est supposée rectiligne et de longueur 1 pour fixer les idées, de sorte que la position horizontale dans celle-ci est repérée par une abscisse  $x \in [0, 1]$ . On se place dans une situation stationnaire et on note  $Q(x)$  le débit de fluide (i.e. du mélange eau+pétrole) à travers la section d'abscisse  $x$  orientée de gauche à droite. Autrement dit, pour tout intervalle

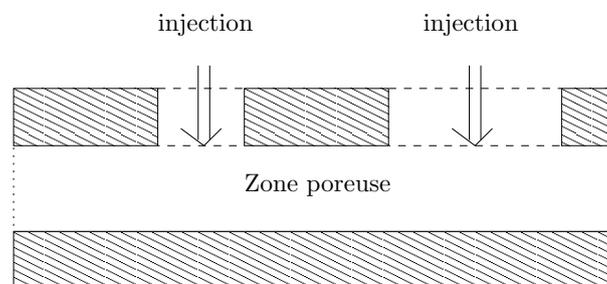


FIGURE 1. Configuration géométrique du gisement.

de temps  $\delta t$ , la quantité de fluide qui traverse la section d'abscisse  $x$  est donnée par  $Q(x)\delta t$ . On note  $f(x)$  le débit (entrant) de l'injection au point  $x$ . La fonction  $f$  est donc non nulle (et par exemple constante) uniquement pour les abscisses correspondant aux zones d'injection.

Si on écrit le bilan des débits entre deux abscisses  $a < b$  quelconques, on obtient

$$(1) \quad Q(b) - Q(a) = \int_a^b f(x) dx,$$

ce qui fournit une première équation aux dérivées partielles

$$(2) \quad \frac{dQ}{dx}(x) = f(x), \quad \forall x \in ]0, 1[.$$

Il reste maintenant à exprimer le débit  $Q$  en fonction de la pression  $p$ . Celle-ci est supposée constante dans chaque section verticale de la zone poreuse, elle ne dépend donc que de la variable  $x$ . À ce stade, plusieurs modèles peuvent être donnés en fonction des propriétés des divers fluides en présence et du milieu poreux considéré (sable, argile, etc...). Il est raisonnable de penser que le débit est une fonction monotone du gradient de pression

$$(3) \quad Q(x) = -\varphi\left(\frac{dp}{dx}(x)\right), \quad \forall x \in [0, 1],$$

où  $\varphi$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , strictement croissante, sans point critique, coercive et avec  $\varphi(0) = 0$ .

Donnons deux exemples de telles lois :

— Si on se place dans l'hypothèse de faibles débits, on peut envisager une loi linéaire

$$(4) \quad \varphi(\xi) = K\xi,$$

où  $K > 0$  est un paramètre du problème.

— Dans le cas général, les lois sont plus complexes et on peut, par exemple, prendre

$$(5) \quad \varphi(\xi) = \frac{2K\xi}{1 + \sqrt{1 + |\xi|}}.$$

Enfin, les deux extrémités de la zone poreuse étant supposées à l'air libre, la pression à ces deux extrémités est donc égale à la pression atmosphérique (qu'on prendra nulle quitte à retrancher une constante à la pression).

En résumé, on est ramené à l'étude du problème aux limites suivant

$$(6) \quad \begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(\varphi\left(\frac{dp}{dx}(x)\right)\right) = f(x), & \text{pour } 0 < x < 1, \\ p(0) = p(1) = 0. \end{cases}$$

D'un point de vue pratique, pour les industriels du pétrole, une question pertinente est : étant donnés la position et le débit des puits d'injection (i.e. la fonction  $f$  dans le modèle), quel est le débit de pétrole en sortie que l'on va obtenir ?

## 2. Analyse théorique du modèle

On souhaite ici démontrer le résultat suivant :

**Théorème 1.** Soit  $\varphi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , strictement croissante, sans point critique et coercive. Pour toute fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$ , il existe une unique solution  $p$  au problème (6).

Pour justifier cela, on note, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $p_\alpha$  l'unique solution sur  $[0, 1]$  du problème de Cauchy

$$(7) \quad \begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( \varphi \left( \frac{dp_\alpha}{dx} \right) \right) = f(x), & \text{pour } 0 < x < 1, \\ p_\alpha(0) = 0, \\ \frac{dp_\alpha}{dx}(0) = \alpha. \end{cases}$$

On vérifie que cette solution s'exprime de la façon suivante

$$(8) \quad p_\alpha(x) = \int_0^x \varphi^{-1} \left( \varphi(\alpha) - \int_0^t f(u) du \right) dt,$$

et que la fonction  $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto p_\alpha(1) \in \mathbb{R}$  est continue, strictement croissante et coercive. Il existe donc une unique valeur  $\alpha_0$  de  $\alpha$  pour laquelle on a

$$(9) \quad p_{\alpha_0}(1) = 0.$$

La fonction  $p_{\alpha_0}$  ainsi obtenue est bien l'unique solution de (6).

Remarquons que tout ce qui précède fonctionne encore si la fonction  $f$  est seulement continue par morceaux, on obtient alors une solution  $p$  de classe  $\mathcal{C}^2$  par morceaux.

## 3. Approximation numérique des solutions

### 3.1. Approche par dichotomie

Les formules établies ci-dessus ne permettent manifestement pas le calcul explicite de la solution de (6). On peut néanmoins s'en servir pour bâtir une méthode numérique en s'inspirant de la technique de démonstration du théorème 1. Pour cela, pour tout paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on utilise une formule de quadrature pour calculer une approximation des  $p_\alpha$ . Plus précisément, pour un entier  $N$  fixé et  $h = 1/(N+1)$ , on pose  $x_i = ih$ ,  $0 \leq i \leq N+1$ , on cherche alors une approximation  $p_i$  de  $p_\alpha$  au point  $x_i$  par la récurrence

$$(10) \quad \begin{cases} p_0 = 0, \\ S_0 = 0, \\ S_{i+1} = S_i + hf(x_{i+1}), \quad \forall i \in \{0, \dots, N-1\}, \\ p_{i+1} = p_i + h\varphi^{-1}(\varphi(\alpha) - S_i), \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}. \end{cases}$$

On cherche ensuite l'unique  $\alpha$  tel que  $p_{N+1} = 0$ , par exemple par une méthode de dichotomie.

Cette approche fonctionne assez bien mais présente des inconvénients relativement rédhibitoires. Tout d'abord, elle nécessite de pouvoir calculer explicitement l'inverse de la fonction  $\varphi$ , ce qui n'est pas nécessairement accessible dans des situations complexes. Dans ce cas, il faut envisager un calcul approché de  $\varphi^{-1}$  à chaque étape du calcul. Par ailleurs, la méthode n'est pas généralisable aux dimensions supérieures à 1.

### 3.2. Approche directe

On propose d'étudier directement le schéma aux différences finies suivant pour résoudre le problème :

$$(11) \quad \begin{cases} p_0 = p_{N+1} = 0 \\ -\frac{1}{h} \left( \varphi \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right) - \varphi \left( \frac{p_i - p_{i-1}}{h} \right) \right) = f(x_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \end{cases}$$

On vérifie que toute solution du schéma par dichotomie (10) (pour la bonne valeur de  $\alpha$  bien entendu) est aussi solution du schéma (11). Les deux méthodes proposées sont donc équivalentes dans le cas présent mais la formulation (11) est adaptable à des cas beaucoup plus généraux (notamment en dimension supérieure), c'est pourquoi nous en proposons ici une étude directe.

**Théorème 2.** Pour toute fonction continue  $f$ , le schéma (11) admet une unique solution  $(p_i)_{0 \leq i \leq N+1}$ .

Pour prouver cela, on définit une fonction non-linéaire  $\Phi : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$  par

$$(12) \quad \Phi_i(p) = -\frac{1}{h} \left( \varphi \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right) - \varphi \left( \frac{p_i - p_{i-1}}{h} \right) \right), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

avec, par convention,  $p_0 = p_{N+1} = 0$ , et on va montrer que  $\Phi$  est bijective.

Commençons par remarquer que pour tous  $p, q \in \mathbb{R}^N$ , on a

$$(13) \quad (\Phi(p) - \Phi(q), p - q) = \sum_{i=0}^N \left( \varphi \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right) - \varphi \left( \frac{q_{i+1} - q_i}{h} \right), \frac{p_{i+1} - p_i}{h} - \frac{q_{i+1} - q_i}{h} \right).$$

Ceci montre que  $\Phi$  est **monotone**, c'est-à-dire que  $(\Phi(p) - \Phi(q), p - q) > 0$  pour tous  $p \neq q$ .

Le résultat général que l'on peut alors appliquer est le suivant :

**Théorème 3.** Toute fonction  $\Phi$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , monotone et coercive de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$  est bijective.

Soit  $b \in \mathbb{R}^N$ , on veut trouver  $p \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\Phi(p) = b$ . L'unicité d'un tel  $p$  découle immédiatement de l'hypothèse de monotonie. Pour démontrer l'existence d'une solution  $p$ , on peut procéder de la façon suivante :

(1) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on introduit la fonction  $\Phi_\varepsilon(p) = \Phi(p) + \varepsilon p$ . Celle-ci vérifie

$$(14) \quad (\Phi_\varepsilon(p) - \Phi_\varepsilon(q), p - q) \geq \varepsilon \|p - q\|^2, \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^N.$$

En particulier, pour tout  $p \in \mathbb{R}^N$ , la matrice jacobienne  $D\Phi_\varepsilon(p)$  est inversible et donc l'image de  $\Phi_\varepsilon$  est un ouvert.

(2) De (14), on déduit également que

$$(15) \quad (\Phi_\varepsilon(p), p) \geq \varepsilon \|p\|^2 + (\Phi(0), p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^N,$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$(16) \quad \|\Phi_\varepsilon(p)\| \geq \varepsilon \|p\| - \|\Phi(0)\|, \quad \forall p \in \mathbb{R}^N.$$

En particulier, on a obtenu que  $\Phi_\varepsilon$  est coercive.

(3) Montrons qu'il existe  $p_\varepsilon \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\Phi_\varepsilon(p_\varepsilon) = b$ . Pour cela, on définit  $p_\varepsilon \in \mathbb{R}^N$  par le problème de minimisation suivant :

$$(17) \quad \|b - \Phi_\varepsilon(p_\varepsilon)\| = \inf_{q \in \mathbb{R}^n} \|b - \Phi_\varepsilon(q)\|.$$

Un tel  $p_\varepsilon$  existe grâce à la continuité de  $\Phi_\varepsilon$  et à (16). Si  $\|b - \Phi_\varepsilon(p_\varepsilon)\| = 0$ , le résultat est démontré. Supposons par l'absurde que  $\|b - \Phi_\varepsilon(p_\varepsilon)\| > 0$ . On a vu plus haut que l'image de  $\Phi_\varepsilon$  est un ouvert. Il existe donc  $r > 0$  tel que la boule  $B(\Phi_\varepsilon(p_\varepsilon), r)$  est incluse dans l'image de  $\Phi_\varepsilon$ . Or il existe nécessairement un élément  $z$  de cette boule tel que  $\|b - z\| < \|b - \Phi_\varepsilon(p_\varepsilon)\|$ , ce qui contredit (17).

(4) On a donc trouvé un  $p_\varepsilon \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\Phi_\varepsilon(p_\varepsilon) = b$ . D'après (16), on a

$$(18) \quad \varepsilon \|p_\varepsilon\| \leq \|b\| + \|\Phi(0)\|,$$

et donc, par définition de  $\Phi_\varepsilon$ , on trouve

$$(19) \quad \|\Phi(p_\varepsilon)\| \leq \|\Phi_\varepsilon(p_\varepsilon)\| + \varepsilon \|p_\varepsilon\| \leq 2\|b\| + \|\Phi(0)\|.$$

Comme  $\Phi$  est coercive, l'inégalité précédente prouve que la famille  $(p_\varepsilon)_\varepsilon$  est bornée. On peut donc en extraire une suite  $(p_{\varepsilon_n})_n$  qui converge vers un certain  $p \in \mathbb{R}^N$  et en passant à la limite dans l'équation  $\Phi_{\varepsilon_n}(p_{\varepsilon_n}) = b$ , on obtient que la limite  $p$  vérifie  $\Phi(p) = b$  et le théorème est démontré.

En pratique, on peut résoudre le système (11) en utilisant, par exemple, la méthode de Newton qu'on pourra initialiser par n'importe quelle fonction non constante.

### 3.3. Résultats numériques

On applique les méthodes présentées ci-dessus pour la non-linéarité  $\varphi(\xi) = |\xi|\xi$  (même si cette fonction ne satisfait pas toutes les hypothèses requises précédemment), le terme source  $f$  constant par morceaux qui vaut 10 sur  $[0.5, 0.8]$  et qui vaut 0 partout ailleurs. On prend  $N = 100$  points de discrétisation.

La figure 2 donne les courbes de  $p_\alpha$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  entre 0 et 2. On obtient approximativement la valeur  $\alpha_0 = 0.91$  du paramètre  $\alpha$  pour laquelle  $p_{\alpha_0}(1) = 0$ .

La figure 3 montre la solution de (6) obtenue en appliquant la méthode de Newton pour les équations (11), une bonne précision étant obtenue au bout d'une vingtaine d'itérations.

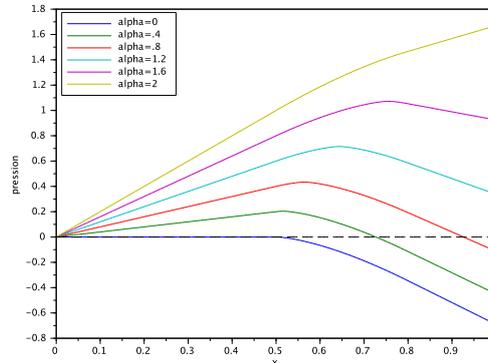


FIGURE 2. Calcul de  $p_\alpha$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

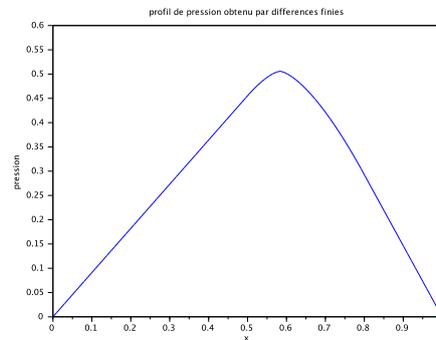


FIGURE 3. Solution  $p$  calculée par le schéma aux différences finies.

## Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*
  - Pourquoi la stricte monotonie de la fonction  $\varphi$  dans le modèle est une hypothèse naturelle?
  - Détailler l'analyse théorique du modèle présentée dans la section 2.
  - Discuter et mettre en œuvre la méthode numérique présentée dans la section 3.1 Peut-on estimer, pour une valeur de  $\alpha$  fixée, l'erreur que l'on commet sur la valeur de  $p_\alpha(1)$ ? En calculant la valeur du paramètre  $\alpha_0$  pour différentes valeurs du nombre de points  $N$ , que peut-on dire sur l'erreur commise sur la fonction  $p$ ?
  - Détailler la démonstration des théorèmes 2 et 3. Mettre en œuvre l'approche par différences finies de la section 3.2. On pourra en particulier calculer la matrice Jacobienne du système et discuter de méthodes numériques adaptées pour calculer son inverse.