Objectif : ce TP porte sur la résolution et l'implémentation numérique des équations de diffusion linéaires traitées en cours qui sont de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad x \in]0;1[, \quad t > 0, \tag{1a}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in]0;1[, \tag{1b}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \text{ ou } \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{1c}$$

1 Commmandes Scilab

On pourra s'aider des commandes suivantes :

— `lufact(A)` : factorisation de A afin de résoudre des systèmes linéaires plus rapidement (A doit être creuse) ;

— `lusolve(A,b)` : résout le système linéaire $AU = b$.

— `backslash` : l'anti-slash représente la division matricielle à gauche telle que la solution de $AU = b$ est donnée par $U = A\backslash b$.

2 Conditions au bord de Dirichlet

On note, Δt le pas de temps, Δx le pas en espace, N le nombre de pas temps entre 0 et T avec $t_n = n\Delta t$ pour $n = 0, \dots, N$, et enfin J le nombre de points du maillage en espace situés à l'intérieur du segment $[0,1]$, avec $x_j = j\Delta x$ pour $j = 0, \dots, J+1$. On remarque donc que $T = N\Delta t$ et $J + 1 = 1/\Delta x$. On va donc chercher à calculer u_j^n valeur approchée de $u(x_j, t_n)$. Les conditions aux limites ne posent donc pas de problème, du moment où l'on impose

$$u_0^n = u_{J+1}^n = 0, \quad n = 0, \dots, N$$
$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, J+1$$

et on supposera que la condition initiale vérifie aussi les conditions aux limites $u_0(0) = u_0(1) = 0$. On travaillera avec la conditions initiale suivante

$$u_0(x) = \sin(2\pi x), \quad x \in [0,1].$$

Avec une telle condition initiale, la solution exacte de l'équation de diffusion est donnée par $u(x,t) = e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$.

2.1 Schéma explicite

Implémenter le schéma numérique suivant

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right), \quad j = 1, \dots, J.$$

En notant $U^n = (u_1^n, \dots, u_J^n)^T$, on pourra réécrire le schéma sous forme matricielle :

$$U^{n+1} = (\mathrm{Id} + \lambda A)U^n,$$

où $A \in \mathscr{M}_J(\mathbb{R})$ est une matrice creuse tri-diagonale, donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Id est la matricé identité, et $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. Pour les paramètres, on prendra $T = 0.02$, $N = 209$ et $J = 20, 50$. Comparer les erreurs commises avec 20 mailles et avec 50 mailles.

2.2 Schéma implicite

Implémenter le schéma numérique suivant

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right), \quad j = 1, \dots, J.$$

En notant $U^n = (u_1^n, \dots, u_J^n)^T$, on pourra réécrire le schéma sous forme matricielle :

$$U^{n+1} = (\mathrm{Id} - \lambda A)^{-1}U^n.$$

Pour les paramètres, on prendra $T = 0.02$, $N = 50$ et $J = 50$. Comparer l'erreur commises avec la solution exacte et celle commise pour le schéma explicite.

2.3 Le θ-schéma

Pour $\theta \in [0, 1]$, implémenter le schéma numérique suivant

$$u_j^{n+1} = u_j^n + (1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) + \theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right), \quad j = 1, \dots, J.$$

En notant $U^n = (u_1^n, \dots, u_J^n)^T$, on pourra réécrire le schéma sous forme matricielle :

$$U^{n+1} = (\mathrm{Id} - \theta\lambda A)^{-1}(\mathrm{Id} + (1-\theta)\lambda A)U^n,$$

On pourra prendre $\theta = 1/2$, $T = 0.02$, $N = 50$ et $J = 50$. Comparer les erreurs commises entre les différents schémas.

Reprendre les questions de chaque partie pour les conditions initiales suivantes

$$u_0(x) = 1 - |1 - 2x|,$$
$$u_0(x) = \chi_{[1/4,3/4]}(x).$$

3 Conditions au bord de Neumann

On note, Δt le pas de temps, Δx le pas en espace, N le nombre de pas temps entre 0 et T avec $t_n = n\Delta t$ pour $n = 0, \dots, N$, et enfin J le nombre de pas en espace entre 0 et 1, avec $x_j = (j-1)\Delta x$ pour $j = 1, \dots, J+1$. On remarque donc que $T = N\Delta t$ et $J = 1/\Delta x$. On va donc chercher à calculer u_j^n valeur approchée de $u(x_j, t_n)$. Les conditions aux limites posent ici problème. On va donc imposer

$$\begin{aligned} u_0^n &= u_1^n, \quad n = 0, \dots, N \\ u_{J+2}^n &= u_{J+1}^n, \quad n = 0, \dots, N \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 1, \dots, J+1 \end{aligned}$$

et on supposera que la condition initiale vérifie aussi les conditions aux limites $u_0'(0) = u_0'(1) = 0$. On travaillera avec la conditions initiale suivante

$$u_0(x) = \cos(2\pi x), \quad x \in [0,1].$$

Avec une telle condition initiale, la solution exacte de l'équation de diffusion est donnée par $u(x,t) = e^{-4\pi^2 t}\cos(2\pi x)$.

Pour $\theta \in [0,1]$, implémenter le schéma numérique suivant

$$u_j^{n+1} = u_j^n + (1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) + \theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right), \quad j = 1, \dots, J.$$

En notant $U^n = (u_1^n, \dots, u_{J+1}^n)^T$, on pourra réécrire le schéma sous forme matricielle :

$$U^{n+1} = (\mathrm{Id} - \theta\lambda B)^{-1}(\mathrm{Id} + (1-\theta)\lambda B)U^n,$$

où $B \in \mathscr{M}_{J+1}(\mathbb{R})$ est une matrice creuse tri-diagonale, donnée par

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Id est la matricé identité, et $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. On pourra prendre $\theta = \{0, 1/2, 1\}$, $T = 0.02$, $N = 209$ (pour $\theta = 0$) ou $N = 50$ (pour $\theta = \{1/2, 1\}$) et $J = 50$. Comparer les erreurs commises entre les différents schémas.