Chapitre 5 : Les espaces de Hilbert

02 Décembre 2019

Table des matières

1 Rappels

Soit E un espace vectoriel. On rappelle la définition du produit scalaire.

Définition 1.1 (Produit scalaire) *Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une application $P : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que*

— $P(x,x) \geq 0$ *et* $P(x,x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
— $P(x,y) = P(y,x)$.
— $P(\cdot, y)$ *est linéaire pour tout* $y \in E$.
— $P(x, \cdot)$ *est linéaire pour tout* $x \in E$.

1.1 Espace préhilbertien

Définition 1.2 (Espace pré-hilbertien) *Un espace muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.*

Par la suite, on notera $P(x, y) = \langle x, y\rangle = (x \mid y) = (x\ ,\ y)$, ce produit scalaire.

Par exemple, $\mathbf{R}^N$, $\mathbf{C}^N$, $C([a, b], \mathbf{C})$ avec $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$. sont des espaces préhilbertiens.

Proposition 1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \langle x, x\rangle$. On a alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle x, y\rangle| \ \leq\ \|x\|\, \|y\|, \qquad \forall x,\, y \in E.$$

Ainsi, l'application $x \in E \to \|x\|$ est une norme sur E canoniquement associée au produit scalaire donné qui confère ainsi à E une structure d'espace vectoriel normé.

Définition 1.4 *Un espace préhilbertien $(H, \langle ., .\rangle)$ est complet si l'espace vectoriel normé associé est complet. Un tel espace s'appelle espace de Hilbert.*

Par exemple, l'espace l^2 est un espace de Hilbert.

Proposition 1.5 *Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien. On a alors les identités*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \textit{(du parallèlogramme)}$$

et

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \qquad \textit{(de polarisation)}$$

1.2 Orthogonalité

Définition 1.6 *Soit $(H, \langle ., .\rangle)$ un espace de Hilbert.*
- *On dit que deux vecteurs $u, v \in H$ sont orthogonaux si $\langle u, v\rangle = 0$ et on notera $u \perp v$.*
- *On dit que deux ensembles A, $B \subset H$ sont orthogonaux si tous les éléments de A sont orthogonaux à tous les éléments de B. On notera $A \perp B$.*
- *Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux, alors ils sont en somme directe et on notera $A \oplus^{\perp} B$ pour signifier que cette somme directe est orthogonale.*
- *Pour tout ensemble $A \subset H$, on définit l'orthogonal de A de la façon suivante*

$$A^{\perp} = \{u \in H, u \perp A\}.$$

Proposition 1.7 *Soit A une partie quelconque de H, alors $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.*

Définition 1.8 (Familles orthogonales/orthonormales/totales. Bases hilbertiennes) *Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de H.*
- *La famille est dite orthogonale si $e_i \perp e_j,\ \forall i \neq j$.*
- *Elle est dite orthonormale (ou orthonormée) si de plus on a $\|e_i\| = 1,\ \forall i \in I$.*
- *La famille est dite totale si autrement dit si l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de la famille est dense dans H c'est-à-dire*

$$\overline{\text{Vect}(e_i,\ i \in I)} = H.$$

— *On dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H si elle est à la fois totale et orthonormée.*

Remarque 1.9 *En dimension finie, on retrouve la notion usuelle de base orthonormée. Toute base hilbertienne est alors également une base algébrique et le cardinal de ces bases est donc égal à la dimension de l'espace.*

En dimension infinie, une base Hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ ne peut en aucun cas être une base algébrique. Autrement dit, on a nécessairement

$$H \neq \mathrm{Vect}(e_i, \quad i \in I).$$

Remarque 1.10 *Si H est séparable, toute base Hilbertienne est de cardinal dénombrable, on notera alors $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Dans ce cas, on peut retrouver le fait que ça ne peut être une base algébrique de l'espace H en utilisant le théorème de Baire. La base algébrique contient forcément plus de vecteurs (plus que dénombrable), elle n'est donc pas très pratique.*

On admettra que tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.

Proposition 1.11 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) *Soit H un espace de Hilbert de dimension finie ou dénombrable et $(u_n)_{0\le n\le N}$ une famille totale et libre de H (avec éventuellement $N = +\infty$). Alors il existe une base hilbertienne $(e_n)_{0\le n\le N}$ de H vérifiant*

$$\forall 0 \le k \le N, \quad \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_k).$$

Cette base hilbertienne est unique si on impose de plus que $\langle u_n, e_n\rangle > 0$ pour tout n.

On démontre alors le résultat suivant

Théorème 1.12 *Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_n$ une base Hilbertienne de H.*

Inégalité de Bessel. Pour tout $N \ge 0$, et tout $u \in H$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \langle u, e_n\rangle^2 \le \|u\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $u \in \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_N)$.

Identité de Parseval. Pour tout $u \in H$, la série numérique de terme général $(\langle u, e_n\rangle^2)_n$ est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle u, e_n\rangle^2 = \|u\|^2,$$

et de plus nous avons la décomposition suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle u, e_n\rangle\, e_n = u,$$

la somme de la série étant entendue au sens de la convergence dans H, c'est-à-dire

$$\lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{n=0}^{N} \langle u, e_n\rangle\, e_n - u \Big\| = 0.$$

Réciproquement, si $(\alpha_n)_{n\in l} \in l^2$, alors la série

$$\sum_{n\in I} \alpha_n \, e_n,$$

est convergente dans H et sa limite notée u est l'unique élément de H vérifiant $\langle u, e_n\rangle = \alpha_n$, pour tout $n \geq 0$.

On a montré que, dès lors qu'on a choisi une base hilbertienne de H, on dispose d'une isométrie canonique entre l^2 et H définie par

$$\Phi : \alpha \in l^2 \to u = \sum_{n\in \mathbf{N}} \alpha_n \, e_n \; \in H.$$

Exemple : la série de Fourier $(e^{inx})_{n\in\mathbf{Z}}$

2 Projection orthogonale

Théorème 2.1 *Soit H un espace de Hilbert et K un ensemble convexe et fermé dans H. Pour tout point $x \in H$, il existe un unique point dans K noté $P_K(x)$ qui réalise l'infimum*

$$\|x - P_K(x)\| \; = \; \inf_{y\in K} \|x - y\|.$$

On l'appelle le projeté orthogonal, ou projection orthogonale, de x sur K. Ce point est aussi l'unique élément de K qui satisfasse les relations suivantes

$$\langle x - P_K(x), y - P_K(x)\rangle \; \leq \; 0, \quad \forall y \in K.$$

Proposition 2.2 *L'application $P_K : H \to H$ est 1-Lipschitzienne .*
En outre, elle est linéaire si et seulement si K est un sous-espace vectoriel.

Proposition 2.3 *Soit H un espace de Hilbert. Si E est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors nous avons*

$$H = E \oplus^{\perp} E^{\perp},$$

c'est-à-dire les deux espaces sont en somme directe et orthogonale.
Pour toute partie $A \subset H$, l'ensemble $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, de plus nous avons

$$(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}.$$

Conséquence : pour un sous-espace vectoriel E quelconque de H. D'après la Proposition 1.7, $E^{\perp}$ est toujours un sous-espace fermé et on peut donc appliquer la proposition précédente à l'espace $E^{\perp}$, ce qui donne

$$H = E^{\perp} \oplus^{\perp} (E^{\perp})^{\perp}$$

ou encore avec

$$H = E^{\perp} \oplus^{\perp} \overline{E}.$$

On déduit les propriétés utiles suivantes
- $H = E \oplus^{\perp} E^{\perp}$ est vraie si et seulement si E est fermé,
- $E^{\perp} = \{0\}$ si et seulement si E est dense.

3 Théorème de représentation de Riesz - applications

3.1 Théorème principal

Théorème 3.1 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit H un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue $L \in H'$, il existe un unique élément $l \in H$ tel que*

$$L(u) = \langle L, u \rangle_{H',H} = \langle l, u \rangle.$$

En outre $\|L\|_{H'} = \|l\|_H$.

3.2 Application

Le théorème suivant est fondamental dans la résolution de certains problèmes. Il permet de donner des conditions suffisantes à l'inversibilité d'un opérateur linéaire continu dans un espace de Hilbert. A noter, que ces conditions ne sont pas nécessaires et donc que certains problèmes ne peuvent être résolus par application directe de ce théorème.

Théorème 3.2 *Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire et $L : H \to \mathbf{R}$ une forme linéaire. On suppose que :*

— *La forme bilinéaire a est continue*
— *La forme bilinéaire a est coercive*
— *La forme linéaire L est continue*

Alors il existe une unique solution $u \in H$ au problème suivant

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

4 Compacité faible dans les Hilbert

4.1 Convergence faible dans un espace de Hilbert

Grâce au Théorème de représentation de Riesz, on peut donner une définition plus simple de la convergence faible [en mettant de côté les aspects topologiques].

Définition 4.1 (Proposition) *Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers $u \in H$ si elle vérifie*

$$\langle u_n, v \rangle \to \langle u, v \rangle, \quad \forall v \in H,$$

lorsque $n \to \infty$.

On démontre alors les propriétés élémentaires suivantes

Proposition 4.2 *Soit $(u_n)_n$ une suite d'un espace de Hilbert H. On a alors*

— *Une limite faible de $(u_n)_n$, si elle existe, est nécessairement unique.*
— *Si $(u_n)_n$ converge fortement vers u, alors elle converge aussi faiblement vers u.*
— *Si $(u_n)_n$ converge faiblement vers u, alors $(u_n)_n$ est bornée et on a*

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

En outre dans le cadre hilbertien on peut montrer

Proposition 4.3 *Soit H un espace de Hilbert et $(u_n)_n \subset H$.*
- *Si $(u_n)_n$ converge faiblement vers u et si de plus on a*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|u\|,$$

alors $(u_n)_n$ converge fortement vers u.
- *Soit H_2 un autre espace de Hilbert et $T : H \to H_2$ un opérateur linéaire continu. Si $(u_n)_n$ converge faiblement vers u dans H, alors $(Tu_n)_n$ converge faiblement vers Tu dans H_2.*
- *On suppose de plus que T est compact. Si $(u_n)_n$ converge faiblement vers u dans H, alors $(Tu_n)_n$ converge fortement vers Tu dans H_2.*

4.2 Compacité faible

Théorème 4.4 *Soit H un espace de Hilbert. Si $(u_n)_n$ est une suite bornée dans H, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge faiblement dans H.*

5 Théorie spectrale

On souhaite établir une théorie de la « diagonalisation » des opérateurs dans des espaces de dimension infinie. Nous allons seulement considérer le cas des opérateurs auto-adjoints compacts dans des espaces de Hilbert.

Pour cela, nous définissons d'abord la notion des opérateurs compacts et leurs propriétés, puis les opérateurs auto-adjoints.

La situation est plus complexe qu'en dimension finie. En plus de l'existence éventuelle de valeurs propres d'un opérateur, on peut avoir des valeurs λ qui ne sont pas valeurs propres mais pour lesquelles $T - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas inversible.

Définition 5.1 (Spectre. Valeurs propres) *Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur linéaire continu. On appelle spectre de T, l'ensemble*

$$\mathrm{Sp}(T) = \{\, \lambda \in \mathbf{R}, \quad \text{t.q.}\, T - \lambda\, Id \textit{n'est pas inversible}\}.$$

On note également

$$\mathrm{VP}(T) = \{\, \lambda \in \mathbf{R}, \quad \text{t.q.}\, \mathrm{Ker}\,(T - \lambda\, Id) \neq \{0\}\,\}\,.$$

l'ensemble des valeurs propres de T.

On a bien sûr l'inclusion $\mathrm{VP}(T) \subset \mathrm{Sp}(T)$ qui peut en général être stricte.

Remarque 5.2 *Si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$ alors $(T - \lambda\mathrm{Id})^{-1}$ est continue d'après le théoreème d'isomorphisme de Banach (Fiche 3, Théorème 2.2).*

Proposition 5.3 *Soit $T : H \to H$ linéaire continu, alors $\mathrm{Sp}(T)$ est un sous-ensemble compact de $\mathbf{R}$ contenu dans l'intervalle $[-\|T\|, \|T\|]$.*

5.1 Opérateurs compacts

Définition 5.4 (Opérateurs compacts) *Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $T : E \to F$ une application linéaire. On dit que T est un opérateur compact si l'image de tout borné B de E par T est relativement compacte dans F. Ceci est équivalent à demander que $T(B_E(0,1))$ est compact dans F.*

L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est noté $K(E,F)$.
On donne alors un premier résultat

Proposition 5.5 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés. Alors on a*

— *$K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ qui contient les opérateurs de rang fini, c'est-à-dire les opérateurs dont l'image est de dimension finie. Si en outre F est complet, alors $K(E,F)$ est fermé.*

— *Soient $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $S\mathcal{L}(F,G)$. Si T est compact ou si S est compact, alors $S \circ T$ est également compact.*

Démonstration : La démonstration est laissée en exercice. ∎

On donne ensuite quelques exemples :

— Soit K un compact, l'injection de $Lip(K)$ dans $\mathbf{C}^0(K)$ est compacte.

— Soit K un compact de $\mathbf{R}^d$, l'injection de l'ensemble des fonctions α Holdëriennes dans $\mathbf{C}^0(K)$ est compacte.

On donne ensuite un résultat important pour la suite.

Proposition 5.6 *Soit E un espace vectoriel normé et $T : E \to E$ un opérateur linéaire compact. Alors nous avons* $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{Id})$ *est de dimension finie,* $\forall \lambda \in R^*$.

Ce résultat stipule que, si λ est une valeur propre non nulle de T, elle ne peut avoir qu'un nombre fini de vecteurs propres linéairement indépendants. Notons que le cas des valeurs propres complexes se traite de façon tout à fait analogue.

5.2 Opérateurs adjoints

Théorème 5.7 *Opérateur adjoint] Soient $(H_1, \langle .,. \rangle_1)$ et $(H_2, \langle .,. \rangle_2)$ deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire continu. Il existe alors un unique opérateur linéaire continu noté $T^* : H_2 \to H_1$ tel que*

$$\langle Tu_1, u_2 \rangle_2 = \langle u_1, T^* u_2 \rangle_1, \quad \forall u_1 \in H_1,\, u_2 \in H_2.$$

De plus, nous avons les propriétés suivantes :

— $(T^*)^* = T$.

— $\|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)}$.

— *T est compact si et seulement si T^* est compact.*

Définition 5.8 *On dit qu'un opérateur linéaire continu $T : H \to H$, H espace de Hilbert, est auto-adjoint si on a $T = T^*$.*

5.3 Résultat principal

Le principal résultat de cette section montre que pour un opérateur compact et auto-adjoint dans un Hilbert, la situation est très proche de celle des matrices symétriques réelles en dimension finie.

Théorème 5.9 *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie séparable et $T : H \to H$ un opérateur linéaire compact auto-adjoint. Alors, on a $0 \in \mathrm{Sp}(T)$ et il existe une suite $(\lambda_n)_n$ de nombres réels non nuls et des éléments $(u_n)_n$ de H tels que*

- $\mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\} = \mathrm{VP}(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_n$.
- *Pour tout $n \in \mathbf{N}$,on a*
$$Tu_n = \lambda_n \, u_n.$$
Autrement dit u_n est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_n.
- *La famille $(u_n)_n$ est orthonormée.*
- *On a $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. En particulier, une même valeur propre non nulle ne peut apparaître qu'un nombre fini de fois dans la suite $(\lambda_n)_n$.*
- *Il existe une base Hilbertienne B de $\mathrm{Ker}\, T$ telle que $B \cup \{u_n\}_n$ soit une base Hilbertienne de H. Autrement dit, il existe une base Hilbertienne de H composée de vecteurs propres de T.*

La démonstration est longue et difficie, on privilégie donc d'abord l'application de ce théorème plutôt que sa démonstration.

5.3.1 Exemple du problème de Dirichlet

Soit $\Omega =]0,1[$ et $k \in \mathcal{C}^1([0,1])$ une fonction vérifiant $\inf_{[0,1]} k > 0$. On pose $h = 1/k$. Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on cherche une fonction $u \in C^2([0,1])$ solution du problème au bord suivant

$$\begin{cases} -\partial_x \left(k(x)\partial_x u\right) = f, \quad x \in]0,1[, \\ \\ u(0 = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Ce problème est central dans beaucoup de modèles concrets issus de la physique, de la biologie, de la chimie,... Bien entendu, c'est plutôt sa version multi-dimensionnelle qui est utile mais cela fera l'objet des cours d'EDP du second semestre et du M2.

On montre d'abord un résultat d'unicité

Proposition 5.10 *Si f et k sont fixées, alors le problème (5.1) admet au plus une solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$.*

Puis, on démontre un résultat d'existence d'une solution grâce à la formule de Green.

Proposition 5.11 *Pour tout $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, on définit la fonction suivante*

$$G(x,y) \;=\; \frac{1}{\int_0^1 h(s)ds} \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^y h(s)ds\right) \left(\displaystyle\int_x^1 h(t)dt\right), & \text{si}\, y \le x, \\ \left(\displaystyle\int_y^1 h(s)ds\right) \left(\displaystyle\int_0^x h(t)dt\right), & \text{si}\, x \le y, \end{cases}$$

— *G est continue, positive et symétrique sur $[0,1] \times [0,1]$ et elle est de classe $\mathcal{C}^2$ en dehors de la diagonale*

$$\Delta = \{(x,x), \quad x \in [0,1]\}.$$

— *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, la formule*

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) dy$$

définit bien une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ qui est solution du problème (5.1).

On s'interesse alors à la théorie des opérateurs et on montre le premier résultat

Proposition 5.12 *On travaille dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)$ et on définit l'opérateur $T : H \to H$ par la formule*

$$Tf = \int_0^1 G(x,y) f(y) dy \in H,$$

L'opérateur ainsi obtenu est linéaire, auto-adjoint, compact et injectif. De plus, l'image de T est constituée de fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en $x = 0$ et $x = 1$. Il est appelé : opérateur résolvant associé au problème (5.1).

On peut alors utiliser la théorie spectrale pour en déduire les propriétés suivantes.

Théorème 5.13 *Il existe une suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de nombres strictement positifs, croissante, telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = +\infty.$$

et une suite de fonctions $(e_n)_{n\geq 1}$ de classe $\mathcal{C}^2([0,1])$ vérifiant

$$-\partial_x(k(x)\partial_x e_n) \; = \; \mu_n \, e_n$$

et $e_n(0) = e_n(1) = 0$, et telle que $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0,1[)$.

5.3.2 Démonstration du Théorème 5.9

On démontre d'abord quelques lemmes utiles.

Lemme 5.14 *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur auto-adjoint. Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de T et u, v des vecteurs propres associés, alors on a $u \perp v$.*

Démonstration : Par hypothèse, on a $Tu = \lambda u$ et $Tv = \mu v$, de sorte que

$$\lambda \langle u, v\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = \mu\langle u, v\rangle,$$

où on a utilisé le caractère auto-adjoint de T dans la seconde égalité. Ceci donne $(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = 0$, et donc $u \perp v$ vu que $\lambda \neq \mu$. ∎

Lemme 5.15 *Soit H un Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur compact auto-adjoint, alors $\mathrm{VP}(T) \setminus \{0\}$ est un ensemble discret, c'est-à-dire que chacun de ces points est isolé. Cela signifie que si $(\lambda_n)_n$ est une suite de valeurs propres et distinctes deux-à-deux qui converge vers une autre valeur propre λ, alors $\lambda = 0$.*

Démonstration : On raisonne par l'absurde et supposer que $\lambda \neq 0$. On peut alors supposer que tous les λ_k sont non nuls et tous distincts de λ. Pour chaque k, on se donne un vecteur propre normalisé u_k. D'après le lemme précédent les $(u_k)_k$ forment une famille orthonormale.

Pour tout $N \geq 1$, on pose

$$U_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} u_k$$

Comme les u_k sont orthogonaux deux à deux, nous avons

$$\|U_N\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \|u_k\|^2 = 1.$$

Comme T est compact, on peut extraire une sous-suite $(TU_N)_N$ qui converge vers un certain V. De plus, nous avons

$$\|TU_N - \lambda U_N\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k - \lambda|^2,$$

et comme $(\lambda_k)_k$ converge vers λ, cette quantité tend vers 0 (Lemme de Césaro).

On utilise maintenant que $\lambda \neq 0$, pour déduire de tout ce qui précède que la suite $(U_N)_N$ converge vers $U = V/\lambda$ qui est donc de norme 1. De plus, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on a obtenu $TU = \lambda U$.

Donc U est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ. D'après le Lemme d'orthogonalité, U est donc orthogonal à tous les u_k. Ainsi, nous avons

$$\langle U, U_N \rangle = 0, \quad \forall N \geq 1,$$

et par passage à la limite on déduit $\|U\|^2 = 0$, ce qui contredit le fait que U est de norme 1. ∎

Lemme 5.16 (Alternative de Fredholm dans le cadre Hilbertien) *Soit H un Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur compact et $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Alors on a* $\mathrm{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) = (\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T}^* - \lambda \mathrm{Id}))^{\perp}$.

En particulier, $\mathrm{Im}(T - \lambda \mathrm{Id})$ *est toujours fermée et on a l'équivalence*

$$\mathrm{Ker}\,(T^* - \lambda \mathrm{Id}) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id} \ \textit{est surjectif.}$$

Démonstration : ∎

Lemme 5.17 *Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur compact auto-adjoint. Si* $\mathrm{Sp}(T) = \{0\}$*, alors* $T = 0$.

Démonstration : ∎

Démonstration du Théorème 5.9 On peut maintenant utiliser les lemmes précédents pour démontrer le résultat principal de décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints.

Tout d'abord, $0 \in \mathrm{Sp}(T)$ car sinon, T serait inversible (et d'inverse continu, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach) et donc $\mathrm{Id} = \mathrm{T}^{-1} \circ \mathrm{T}$ serait un opérateur compact (Proposition 5.5). Ceci impliquerait que la boule unité fermée de H (qui est l'image d'elle-même par l'identité) serait compacte et d'après le théorème de Riesz, ceci n'est possible que si H est de dimension finie, ce qui est exclu ici.

- L'inclusion $\mathrm{VP}(T) \subset \mathrm{Sp}(T)$ est toujours vraie. Soit maintenant $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)\backslash\{0\}$. D'après le Lemme 5.16 sur l'alternative de Fredholm dans les espaces de Hilbert, en utilisant que $T^* = T$, on observe que $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{Id})$ ne peut être réduit à zéro.Donc $\lambda \in \mathrm{VP}(T)$. D'après la Proposition 5.6, on sait de plus que la dimension de l'espace propre considéré est fini. Enfin, le Lemme 5.15, nous dit que l'ensemble des valeurs propres non nulles de T est discret. On peut donc bien ranger les valeurs propres non nulles, comptées avec leur multiplicité, sous la forme d'une suite $(\lambda_n)_n$.

Pour chacune de ces valeurs propres, on choisit un vecteur propre normalisé u_n, en s'arrangeant pour que les vecteurs propres associés à une même valeur propre soient orthogonaux entre eux (on rappelle que les espaces propres en question sont de dimension finie et on peut utiliser à bon droit le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt vu à la Proposition 1.11 à l'intérieur de chacun de ces espaces).

- D'après le Lemme 5.14, les vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont bien orthogonaux.

- La suite $(\lambda_n)_n$ est contenue dans le compact $[-\|T\|, \|T\|]$ d'après la Proposition 5.3 et d'après le Lemme 5.15, l'unique valeur d'adhérence de cette suite ne peut être que 0, ce qui montre bien que $\lambda_n \to 0$ (qui est la seule valeur d'adhérence).

- Comme $\mathrm{Ker}\, T$ est fermé, c'est un espace de Hilbert séparable (car H est séparable, il suffit de prendre les projections sur $\mathrm{Ker}\, T$ des éléments d'une partie dénombrable dense dans H). On peut donc en trouver une base hilbertienne B. Par ailleurs, $\mathrm{Ker}\, T$ est orthogonal à tous les u_n (Lemme 5.14) et donc nous avons bien au total une famille orthonormale.

On note $F = \mathrm{Vect}(B \cup (u_n)_n)$. Il s'agit de montrer que F est dense dans H. Par construction F est stable par T car les éléments de B et les u_n sont stables par T. Comme $T = T^*$,on en déduit que

$$T(F^\perp) \subset F^\perp.$$

Eneffet, si $u \in F^\perp$ et $v \in F$, nous avons

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = 0,$$

car $Tv \in F$, ce qui montre bien que $Tu \in F^\perp$.

L'espace $F^\perp$ est fermé, c'est donc un espace de Hilbert. La restriction $\tilde{T}$ de T à $F^\perp$ définit donc un opérateur compact autoadjoint dans $F^\perp$. Cet opérateur $\tilde{T}$ ne peut avoir de valeur propre non nulle, car si c'était pas le cas, le vecteur propre associé serait aussi un vecteur propre de T, appartenant à $F^\perp$. Comme F contient, par construction, tous les sous-espaces propres de T, cela n'est pas possible.

En utilisant les propriétés établies au début du théorème mais appliquées à $\tilde{T}$ nous déduisons que $\mathrm{Sp}(\tilde{T}) = \{0\}$ (en effet le spectre de $\tilde{T}$ est nécessairement non vide et ne peut contenir aucun nombre non nul). D'après le Lemme 5.17, on déduit que $\tilde{T} = 0$, ce qui prouve que T est nul sur $F^\perp$. Ceci n'est possible que si $F^\perp = \{0\}$ car le noyau de T est, par définition, contenu dans F.

On a donc montré que $F^\perp = \{0\}$ et donc d'après la Proposition 2.3

$$\overline{F} = (F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

Le théorème est démontré.