Chapitre 4 : Introduction à la topologie faible

07 Octobre 2018

Table des matières

En dimension infinie, il est délicat de trouver des ensembles compacts. Nous avons vu par exemple que, dans l'espace des fonctions continues, la compacité requiert des conditions additionnelles (l'équi-continuité). En pratique, une telle propriété n'est que rarement vérifiée. Pour surmonter cette difficulté, une possibilité est d'affaiblir la topologie, *i.e.* de passer d'une convergence forte (ou convergence en norme) à une convergence faible que nous définissons plus bas.

1 Rappels de topologie

Rappelons la définition d'une topologie.

Définition 1.1 *Une topologie sur un ensemble X est une famille de parties de X, appelées ouverts, vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. *l'ensemble vide et l'ensemble X lui-même font partie des ouverts,*
2. *toute réunion d'ouverts est un ouvert,*
3. *toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Une topologie est d'autant plus fine qu'elle contient plus d'ouverts. Des exemples extrêmes sont

— la topologie grossière (la moins fine !), pour laquelle seuls et X sont des ouverts,

— la topologie discrète (la plus fine), pour laquelle toutes les parties de X sont des ouverts.

Un exemple moins trivial de topologie est celle engendrée par les boules ouvertes dans un espace métrique : les ouverts sont alors tous les ensembles obtenus comme réunions quelconques d'intersections finies de boules ouvertes. En particulier dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et engendrent la même topologie.

On rappelle

Définition 1.2 *Une topologie est séparée si pour tout couple de points distincts x_1 et x_2, il existe des ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $x_1 \in O_1$ et $x_2 \in O_2$.*

Proposition 1.3 *Une topologie d'espace métrique est toujours séparée*

Démonstration : Il suffit de prendre pour les ouverts O_1 et O_2 des boules ouvertes de rayon strictement inférieur à la moitié de la distance entre x_1 et x_2. ■

On se rend bien compte que moins il y a d'ouverts, ou encore, moins la topologie est fine, plus il y a de compacts. Dans les espaces métriques, les compacts sont caractérisés par deux propriétés :

— la pré-compacité : un ensemble A est dit pré-compact ou encore totalement borné lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, A admet un recouvrement fini par des boules de rayon ε,

— la complétude : toutes les suites de Cauchy sont convergentes.

2 Définition et premières propriétés

Désormais, E est un $\mathbf{R}$-espace de Banach. Il est donc muni de la topologie engendrée par les boules ouvertes, que l'on appellera **topologie forte**. On va définir la **topologie faible** comme ayant moins d'ouverts et on verra (un peu plus tard) qu'elle a plus de compacts que la topologie forte.

2.1 Définitions

Définition 2.1 *La topologie faible sur E est la topologie la moins fine telle que toutes applications $T : E \to \mathbf{R}$ avec $T \in E'$ soient continues. On note cette topologie $\sigma(E, E')$.*

Ceci est une « vraie » définition au sens où il est possible de construire la topologie faible. En effet, on l'a construit comme suit :

1. la topologie faible doit au minimum contenir tous les ensembles de la forme $T^{-1}(U)$ où U est un ouvert de $\mathbf{R}$ et $T \in E'$.
2. on considère ensuite toutes les intersections finies des ensembles construits lors de l'étape précédente,
3. on considère enfin toutes les réunions quelconques de tels ensembles, on obtient alors une topologie, et c'est bien sûr celle qui a le moins d'ouverts parmi les topologies ayant les ensembles $T^{-1}(U)$ comme ouverts.

Remarque 2.2 *Attention, il faut bien respecter cet ordre dans la construction : si l'on considère d'abord l'union quelconque, on obtient un ensemble qui n'est pas stable par union quelconque...*

Rappelons qu'on appelle voisinage d'un point x tout ensemble contenant un ouvert contenant x, et qu'une base de voisinages est une famille de voisinages telle que tout ouvert contenant x contient au moins un de ces voisinages (par exemple les boules dans un espace métrique !).

On peut formuler cela autrement

Définition 2.3 *Soit (X, O) un espace topologique.*

- *Soit $x \in X$ et $V \subset X$. On dit que V est un voisinage de x si V contient un ouvert contenant x. L'ensemble des voisinages de x est noté $\mathcal{V}(x)$.*
- *On dit qu'un sous-ensemble V de $\mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages de x si tout élément de $\mathcal{V}(x)$ contient un élément de V.*

Bases de voisinages pour la topologie faible : Tout voisinage de $x_0 \in E$ pour la topologie $\sigma(E, E')$ contient un ouvert du type

$$\cap_{i=1}^{N} \{x \in E, \quad |T_i(x) - T_i(x_0)| < \alpha_i\}$$

avec $\alpha_i > 0$ et $T_i \in E'$.

2.2 Propriétés

Proposition 2.4 *La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Démonstration : Ceci est une conséquence du théorème de Hahn-Banach (forme géométrique). ■

Proposition 2.5 *En dimension finie, la topologie faible coïncide avec la topologie forte.*

Démonstration : Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(T_1, \ldots, T_n)$ sa base duale. Si U est un ouvert fort, si $x_0 \in U$ il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r soit incluse dans U. Or d'après l'inégalité triangulaire, cette boule contient l'ouvert faible

$$V(x_0) := \{x \in E; |\langle T_i, x - x_0 \rangle| < r/n, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Ainsi U est la réunion des ouverts faibles $V(x_0)$ lorsque x_0 parcourt U, c'est donc un ouvert faible. ■

Proposition 2.6 *La topologie faible est moins fine que la topologie forte, c'est-à-dire que tous les ouverts faibles sont fortement ouverts.*

Démonstration : Un ouvert « faible » est de la forme $T^{-1}(U)$ où U est un ouvert de $\mathbf{R}$ et $T \in E'$. C'est aussi un ouvert fort. ■

En dimension infinie en revanche, la topologie faible est strictement moins fine que la topologie forte : une boule ouverte n'est pas faiblement ouverte.

Proposition 2.7 *En dimension infinie, la boule unité ouverte $B(0, 1)$ est d'intérieur vide pour la topologie faible.*

Par passage au complémentaire, on conclut qu'en dimension infinie la topologie forte contient aussi plus de fermés que la topologie faible.

Proposition 2.8 *Les fermés sont par définition les complémentaires des ouverts. Par suite, les fermés faibles sont des fermés forts.*

Mais la réciproque est fausse. Par exemple, la sphére unité n'est pas faiblement fermée en dimension infinie, son adhérence fermée étant la boule fermée.

Dans le cas convexe cependant, les deux notions se rejoignent :

Théorème 2.9 *Soit C un convexe de E. Alors C est fermé pour la topologie forte si et seulement si C est fermé pour la topologie faible.*

Démonstration : Ceci est une conséquence du théorème de Hahn-Banach (forme géométrique). ■

3 Convergence faible

On distingue la convergence d'une suite pour la topologie faible en la notant $\rightharpoonup$ (au lieu de $\to$ pour la convergence forte).

3.1 Définition

On rappelle la notion de convergence pour un espace topologique

Définition 3.1 *Soit (X, O) un espace topologique, $l \in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l si pour tout voisinage V de l il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq N$.*

On montre alors la résultat suivant qui permet de caractériser la convergence pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Proposition 3.2 *Une suite $(x_n)_{n\in N}$ d'éléments de E converge vers $x \in E$ au sens de la topologie faible si et seulement si chaque suite $T(x_n)$ converge vers $T(x)$ pour tout $T \in E'$.*

3.2 Propriétés

Pour démontrer d'autres propriétés sur la topologie faible et la convergence faible, on a besoin d'autres théorèmes qui pourront se révéler être des outil puissants en Analyse : le théorème de Banach-Steinhaus et le théorème de Hahn-Banach.

Théorème 3.3 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E. On a les propriétés suivantes :*

— *$x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si $T(x_n) \to T(x)$ pour tout $T \in E'$.*
— *Si $x_n \to x$ alors $x_n \rightharpoonup x$.*
— *Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans E et*

$$\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E.$$

— *$T_n \to T$ dans E' et $x_n \rightharpoonup x$ alors $T(x_n) \to T(x)$. On pourra aussi noter $\langle T_n, x_n \rangle \to \langle T, x \rangle$.*

Démonstration : Conséquences du corollaire de Hahn-Banach (forme analytique) et de Banach-Steinhaus. ■

4 Un exemple

Soit l^∞ l'ensemble des suites rélles bornées et l^1 l'ensemble des suites réelles sommables :

$$l^1 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}, \quad \sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

Rappelons que les espaces vectoriels l^1 et l^∞ munis respectivement de la norme $\|x\|_1 = \sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|$ et $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|$ sont des Banach.

Nous allons montrer que le dual topologique de l^1 peut être identifié à l^∞. Tout d'abord, remarquons qu'à toute suite $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de l^∞, on peut associer une forme linéaire continue T_y sur l_1 en posant

$$\forall x \in l^1, \quad T_y(x) = \langle T_y, x\rangle (l^1)', l^1 \ = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n \, y_n.$$

En effet, comme

$$\forall (x, y) \in l^1 \times l^\infty, \quad |\langle T_y, x\rangle (l^1)', l^1| \leq \|x\|_1 \, \|y\|_\infty$$

l'application T_y est bien une forme linéaire continue sur l^1

Proposition 4.1 *L'application $T : y \to T_y$ est linéaire continue et bijective de l^∞ dans $(l^1)'$. De plus elle conserve la norme.*

Il existe donc une isométrie bijective entre l^∞ et $(l^1)'$. De ce fait, on a l'habitude d'identifier $(l^1)'$ et l^∞, et l'on dit couramment que l^∞ est le dual de l^1. On note d'ailleurs $\sigma(l^1, l^\infty)$ au lieu de $\sigma(l^1, (l^1)')$, la topologie faible sur l^1.

Bien que la topologie forte sur l^1 ait strictement plus d'ouverts que la topologie faible (on est en dimension infinie), on a le résultat suivant

Théorème 4.2 (Thórème de Shur) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de l^1, et $x \in l^1$. Alors*

$$x_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad x_n \rightharpoonup x.$$

Dans les prochains chapitres, nous verrons d'autres exemples de topologie faible. Le point crucial est l'étude du dual E'.