Chapitre 3 : Les théorèmes fondamentaux de l'Analyse Fonctionnelle

18 Décembre 2019

Table des matières

1	Le Théorème de Banach-Steinhaus	1
2	Le Théorème de l'application ouverte	2
2.1	Le théorème principal	2
2.2	Application	2
3	Le Théorème du graphe fermé	2
4	Le Théorème de Hahn-Banach	3
4.1	Le théorème de Hahn-Banach, version analytique	3
4.2	Le théorème de Hahn-Banach, version géométrique	3

En dimension infinie, il est délicat de trouver des ensembles compacts. Pour surmonter cette difficulté, une possibilité est d'affaiblir la topologie, *i.e.* de passer d'une convergence en norme à une convergence plus faible. Avant cela, on montre une série de résultats qui représentent les fondements de l'Analyse Fonctionnelle : le théorème de Banach-Steinhaus et le théorème de Hahn-Banach.

Dans toute cette partie, E et F sont deux espaces vectoriels normés.

1 Le Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 1.1 (Théorème de Banach-Steinhaus) E et F sont deux espaces vectoriels normés avec E de Banach.

Si $(T_n)_{n \in I}$ est une famille quelconque de $\mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\sup_{n \in I} \|T_n(x)\|_F < \infty, \quad \forall x \in E,$$

alors la famille (T_n) est équi-continue :

$$\sup_{n \in I} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty.$$

Autrement dit, dans ce cas, il existe une constante $C > 0$ telle que $\|T_n(x)\|_F \leq C \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, et pour tout $n \in I$.

Attention, rien ne dit dans ce théorème que la convergence de $(T_n)_n$ vers T est uniforme. Autrement dit, nous n'avons pas en général

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \rightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Une conséquence immédiate de ce résultat est qu'une limite simple d'opérateurs linéaires continus est toujours continue.

2 Le Théorème de l'application ouverte

2.1 Le théorème principal

Théorème 2.1 (Théorème de l'application ouverte) *Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective, alors l'image par T d'un ouvert de E est un ouvert de F . En particulier, si T est bijective, alors T^{-1} est continue.*

Le corollaire immédiat et essentiel de ce résultat est le suivant.

2.2 Application

Théorème 2.2 (Isomorphisme de Banach) *Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, alors T^{-1} est continue.*

3 Le Théorème du graphe fermé

Définition 3.1 *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application quelconque entre deux ensembles X et Y . Le graphe de f est le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y, \quad x \in X\}.$$

Commençons par un résultat élémentaire.

Proposition 3.2 *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors le graphe $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$.*

Le théorème fondamental de ce paragraphe est une réciproque du résultat précédent dans le cas d'applications linéaires entre espaces de Banach. C'est une conséquence du Théorème de l'application ouverte.

Théorème 3.3 (Théorème du graphe fermé) *Une application linéaire $T : E \rightarrow F$ est continue, si et seulement si, son graphe est fermé.*

Pour que ce théorème soit vrai, il faut absolument que les deux espaces soient complets.

4 Le Théorème de Hahn-Banach

4.1 Le théorème de Hahn-Banach, version analytique

Théorème 4.1 (Hahn-Banach, version analytique) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et p une fonction de E dans $\mathbf{R}$ vérifiant :

- $\forall \lambda \geq 0, \forall x \in E, p(\lambda x) = \lambda p(x),$
- $\forall (x, y) \in E^2, p(x + y) \leq p(x) + p(y).$

Soit F un s.e.v. de E et L une forme linéaire sur F telle que

$$\forall x \in F, \quad L(x) \leq p(x).$$

Alors il existe une forme linéaire $\tilde{L}$ définie sur E , qui prolonge L et telle que

$$\text{for all } x \in E, \quad L(x) \leq p(x).$$

Démonstration : La démonstration de ce théorème repose sur un résultat célèbre de la théorie des ensembles, le lemme de Zorn qui sera admis dans notre cours. ■

Avant de présenter un corollaire fondamental du théorème de Hahn-Banach, on définit le concept de semi-norme.

Définition 4.2 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On dit qu'une application $p : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ est une semi-norme lorsque

- $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in E, p(\lambda x) = |\lambda| p(x),$
- $\forall (x, y) \in E^2, p(x + y) \leq p(x) + p(y).$

Corollaire 4.3 Sous les hypothèses du théorème de Hahn-Banach, si de plus p est une semi-norme alors on peut trouver une forme linéaire $\tilde{L}$ qui prolonge L sur E et telle que $\forall x \in E,$

$$|\tilde{L}(x)| \leq p(x).$$

Corollaire 4.4 Soit F un sous-espace vectoriel de E et L une forme linéaire continue sur F . Alors on peut prolonger L en une forme linéaire $\tilde{L}$ continue sur E et de même norme que L .

Démonstration : On applique le corollaire précédent avec $p(x) = \|L\|_{F'} \|x\|_E$. ■

Corollaire 4.5 Soit E un espace vectoriel normé et $x_0 \in E$. Alors il existe $T \in E'$ telle que

$$\|T\|_{E'} = \|x_0\|_E \quad \text{et} \quad T(x_0) = \|x_0\|_E^2.$$

Corollaire 4.6 Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout $x \in E$ on a $T \in E'$ telle que

$$\|x\|_E = \sup_{\|L\|_{E'}=1} |T(x)|$$

et le sup est atteint.

4.2 Le théorème de Hahn-Banach, version géométrique

Théorème 4.7 (Hahn-Banach, version géométrique) Soit A et B deux parties convexes disjointes de E avec A fermé et B compact. Alors il existe un hyperplan fermé séparant strictement A et B . Plus précisément, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ et $L \in E'$ tels que

$$\forall x \in A, \quad L(x) < \alpha \quad \text{et} \quad \forall x \in B, \quad L(x) > \alpha.$$

Démonstration : Admis ou démonstration en TD. ■