Chapitre 2 : espaces de Banach

13 Septembre 2018

Table des matières

Dans ce cours, on considère des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels où $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On se gardera bien de généraliser ces résultats à un corps quelconque. En particulier la complétude de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ joue un rôle fondamental dans ce qui suit. Par souci de concision, on parlera simplement d'espace vectoriel.

1 Introduction

1.1 Espaces normés

Définition 1.1 (Norme) *Soit E un espace vectoriel, on appelle norme sur E toute application $\|.\|$ de E dans $\mathbf{R}^+$ telle que pour tout $x \in E$;*

— $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$;

— $\|\lambda\, x\| \;=\; |\lambda|\, \|x\|$ *pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$;

— $\|x+y\| \;\leq\; \|x\| \;+\; \|y\|$.

Le couple $(E, \|.\|)$ est appelé un espace vectoriel normé.

On connaît plusieurs exemples d'espaces vectoriels normés comme $(\mathbf{R},\ |\cdot|)$ ou $(\mathbf{C},\ |\cdot|)$. Un autre exemple est l'espace vectoriel $\mathbf{R}^N$ ou $\mathbf{C}^N$ muni des normes $\|\cdot\|_p$ pour $1 \leq p \leq \infty$, avec $\|.\|_p$ donnée tout $x \in \mathbf{R}^N$ et pour $p \in [1, \infty[$ par,

$$\|x\|_p \;=\; \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

et pour $p = \infty$ par

$$\|x\|_\infty \;=\; \max_{1 \leq j \leq N} |x_j|.$$

Pour démontrer que ces applications sont bien des normes on a recourt aux inégalités de Hölder et de Minkowski.

On montrera en cours ou en TD que $\mathcal{C}([a, b])$ muni des normes

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$$

et

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Définition 1.2 (Équivalence de normes) *Deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si il existe deux constantes C_1 et $C_2 > 0$ telles que*

$$\forall x \in E, \quad C_1\, N_1(x) \;\leq\; N_2(x) \;\leq\; C_2\, N_1(x).$$

On a alors les propriétés suivantes

Proposition 1.3 *Deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si les distances induites sont aussi équivalentes.*

Démonstration : la preuve est un exercice classique qu'il faut savoir faire. ■

Théorème 1.4 *Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Ainsi on pourra vérifier que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1])$ ne sont pas équivalentes. Par exemple, on prend $u_n(x) = x^n$, on a $\|u_n\|_\infty = 1$ pour tout n et $\|u_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$.

1.2 Définition et propriétés des espaces de Banach

Proposition 1.5 *Soit E un espace vectoriel normé. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors F est fermé dans E.*

Définition 1.6 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance induite par la norme.*

Définition 1.7 (Séries dans un espace vectoriel normé) *Une série est convergente si la suite des sommes partielles*

$$S_N := \sum_{k=1}^{N} x_k$$

est convergente. Une série $\sum_{n\geq 1} x_n$ est absolument convergente si et seulement si la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|$ est convergente.

Théorème 1.8 *Un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration : Soit E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset E$.

($\Rightarrow$) Supposons que E est complet et que la série $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est absolument convergente. Montrons que la suite des sommes partielles $(S_N)_N$ est de Cauchy. Pour $N, p \geq 0$, on écrit

$$\|S_N - S_{N+p}\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \|x_n\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Le membre de droite est le reste d'une série convergente, on peut donc le rendre aussi petit que l'on veut pour N assez grand.

($\Leftarrow$) On suppose que toute série absolument convergente est convergente. Montrons que E est complet.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans E. On peut trouver $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leq 2^{-n}, \quad \forall n \geq 1.$$

En particulier la série de terme général $u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente et donc convergente par hypothèse. Les sommes partielles de cette série sont

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)} \ = \ u_{\varphi(N+1)} - u_{\varphi(0)}$$

et donc la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy et admet une sous-suite convergente, donc elle converge. Ainsi E est complet. ■

Remarque 1.9 *La construction de la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est un exercice en soit. On applique la définition de la suite de Cauchy en prenant des choix de ε successifs* 1*,* $1/2$*, ...,* $1/2^k$*,...*

1.3 Exemples

On rappelle $\mathbf{R}^N$ ou $\mathbf{C}^N$ pour $N \in \mathbf{N}_*$, muni d'une norme est un espace de Banach.

En outre, l'espace des suites bornées l^∞, muni de la norme $\|x\|_{l^\infty}$ donnée pour $x \in l^\infty$

$$\|x\|_{l^\infty} \ = \ \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n| < \infty.$$

On vérifie que $(l^\infty, \|.\|_{l^\infty})$ est une espace de Banach.

Plus généralement, les espaces l^p pour tout $1 \leq p < \infty$ c'est-à-dire $x \in l^p$ lorsque $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec

$$\|x\|_{l^p} \ := \ \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

On vérifie que $(l^p, \|.\|_{l^p})$ est une espace de Banach.

Puis l'exemple des fonctions bornées $B(X, E)$ d'un enxemble X sur un espace de Banach E.

Théorème 1.10 *Soient X un ensemble et $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, on considère l'ensemble des fonctions f bornées de X dans E, c'est-à-dire telles que*

$$\|f\|_{\mathcal{B}(X,E)} = \sup_{x\in X} \|f(x)\| < \infty.$$

Alors $(\mathcal{B}(X, E), \|.\|_{B(X,E)})$ est un espace de Banach.

Démonstration : c'est un excellent exercice de Master 1 (TD). ■

De plus si X est muni d'une structure d'espace métrique par une distance d, on définit $\mathcal{C}_b(X, E)$ comme étant l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{B}(X, E)$ qui sont continues. Alors $(\mathcal{C}_b(X, E), \|.\|_{\mathcal{B}(X,E)})$ est un espace de Banach [c'est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}(X, E)$].

Remarque 1.11 *L'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ avec la norme $|| \cdot ||_1$ n'est pas complet.*

2 Applications linéaires continues

2.1 L'espace $\mathcal{L}(E, F)$

Théorème 2.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et T une application linéaire de E dans F. Les trois conditions sont équivalentes :*

— *l'application T est lipschitzienne,*

— *l'application T est continue,*

— *il existe un ouvert U de E tel que T soit bornée sur U c'est-à-dire tel que*

$$\sup_{x\in U} \|T(x)\|_F < \infty.$$

Démonstration : A savoir. ■

Proposition 2.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés ; on désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. L'application définie par*

$$T \mapsto \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|T(x)\|_F$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

En outre, si $(F, \|.\|_F)$ est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}(E, F), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ l'est aussi.

Démonstration : C'est un résultat important qu'il faut savoir démontrer. La preuve sera détaillée en cours. ■

Important : $F = \mathrm{R}$, dans ce cas, on note $E' = \mathcal{L}(E, \mathrm{R})$, c'est le dual topologique de E. On remarque que E' est un espace de Banach.

Proposition 2.3 *Toute application linéaire définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue.*

Démonstration : A savoir. ■

Proposition 2.4 *Soient E F et G trois espaces vectoriels normés ; et $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}(E, f) \times \mathcal{L}(F, G$ alors $L = L_2 \circ L_1 \in \mathcal{L}(E, G)$ et*

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|L_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|L_2\|_{\mathcal{L}(F,G)}.$$

Démonstration : A savoir. ■

2.2 L'espace $GL(E)$

Lorsque $E = F$, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. L'un des résultats de base sur les éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est le suivant.

Théorème 2.5 (Lemme de Von Neumann) *Soit E un espace de Banach et $T \in GL(E)$ un isomorphisme de E, c'est-à-dire une application linéaire continue bijective d'inverse continu. On a alors*

$$B_{\mathcal{L}(E)}(T, \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)}^{-1}) \subset GL(E).$$

En particulier $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration : La démonstration de ce théorème fera l'objet d'un devoir à la maison. ■

Remarque 2.6 *Insistons sur le fait que dans un espace de Banach E, la convergence de $\sum_n \|x_n\|_E$ implique la convergence de $\sum_n x_n$ dans E.*

2.3 Applications multi-linéaires

Pour conclure cette section, nous allons donner une caractérisation des applications multi-linéaires continues.

Théorème 2.7 *Soient $(E_j, \|.\|_{E_j})_{1\leq j\leq N}$ une famille d'espaces vectoriels normés et $(F, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On considère une application N-linéaire de $E_1 \times ... \times E_N$ dans F.*

Cette application f est continue de $E = E_1 \times ... \times E_N$ si et seulement si

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x_1, ..., x_N)\|_F < \infty.$$

Démonstration : A savoir. ∎

3 Compacité

Les résultats qui suivent et leurs démonstrations sont très importants.

3.1 Cas de la dimension finie : Théorème de Riesz

Le fait que la dimension de l'espace soit finie ou non induit de grandes différences sur la topologie comme on peut le voir au travers de l'énoncé suivant.

Théorème 3.1 (Théorème de Riesz) *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$; on a alors $\overline{B}_E(0_E, 1)$ est compacte si et seulement si $\dim E < \infty$.*

Démonstration : La preuve sera détaillée en cours. Il faut la connaître par cœur. ∎

Remarque 3.2 *Ceci signifie qu'en dimension finie $\dim(E) = N$, les compacts de E sont les fermés bornés. La preuve montre bien plus que cela puisque E et $\mathbf{R}^N$ sont isomorphes.*

3.2 Cas de la dimension infinie : Théorème d'Ascoli

En dimension infinie, tout se complique. On traite le cas de l'espace des fonctions continues.

Théorème 3.3 (Théorème d'Ascoli) *Soit (X, d) un espace métrique compact et $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Une partie A de $\mathcal{C}(X, E)$ est relativement compacte dans le Banach $\mathcal{C}(X, E)$ si et seulement si*

1. *Pour tout $x \in X$, $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est une partie relativement compacte de E.*
2. *A vérifie la propriété d'équicontinuité.*

Démonstration : La preuve sera détaillée en cours. ■

4 Densité dans l'espace des fonctions continues

4.1 Le Théorème de Bernstein-Weierstrass

Théorème 4.1 *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$. Pour toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, il existe une suite de fonctions polynomiales $(f_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.*

Pour démontrer ce théorème, on définit le module de continuité : pour tout $\delta > 0$ on pose

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-y|\delta} |f(x) - f(y)|$$

D'après le théorème de Heine (voir Fiche 1), toute fonction continue f sur $[a, b]$ à valeur dand $\mathbf{R}$ est uniformément continue. Ceci implique (est équivalent !) à la propriété

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

4.2 Le Théorème de Stone-Weierstrass

Dans le cas général, on peut caractériser les sous-algèbres denses de $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$:

Théorème 4.2 *Soit (X, d) un espace métrique compact et A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ c'est-à-dire un sous-espace vectoriel stable par la multiplication. On suppose que*

1. *A sépare les points de X, c'est-à-dire pour tout $x, y \in X$, $x \neq= y$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*
2. *Pour tout $x \in X$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$.*

Alors A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$.

Le cas des fonctions à valeurs complexes est légérement différent.

Théorème 4.3 *Soient (X, d) une espace métrique compact et A une sous-algèbre de l'espace $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$. Si A contient les fonctions constantes, si A sépare les points de X et si A est stable par conjugaison, ($f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$), alors A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$.*