

Chapitre 1. Espaces métriques

03 Septembre 2020

Table des matières

1	Rappels	1
1.1	Définitions	1
1.2	Boules et sphères	2
1.3	Voisinages, ensembles ouverts, ensembles fermés	3
1.4	Suites d'un espace métrique	5
1.5	Fonctions continues sur un espace métrique	6
1.6	Distances équivalentes et espaces produits	7
2	Espaces complets	8
2.1	Résultats généraux	8
2.2	Théorème de Baire	9
2.3	Applications du Théorème de Baire	10
3	Compacité	11
3.1	Résultats généraux	11
3.2	Fonctions définies sur un compact	12

1 Rappels

1.1 Définitions

On rappelle la définition d'une distance.

Définition 1.1 (Distance et espace métrique) Soit X un ensemble, on appelle distance sur X toute application d de $X \times X$ dans $\mathbf{R}^+$ telle que

- $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Le couple (X, d) est appelé un espace métrique.

On connaît plusieurs distances dans la vie courante : la distance "usuelle" (euclidienne) ; la distance à la surface de la Terre (géodésique), la distance kilométrique en suivant le réseaux routier ou ferroviaire.

On peut également fournir quelques exemples basiques d'espaces métriques.

- la distance discrète : X ensemble quelconque, $d(x, y) = 0$ si $x = y$, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$;
- la distance dans $\mathbf{R}$;
- la distance dans $\mathbf{C}$;
- la distance dans $\overline{\mathbf{R}}$: $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$.

Par la suite, on note (X, d) un espace métrique.

1.2 Boules et sphères

On définit les boules et sphères d'un espace métrique (X, d) .

Définition 1.2 (Boules ouverte, boule fermée, sphère) Soit un espace métrique (X, d) , pour tout $x \in X$ et $r > 0$, on appelle boule ouverte de centre x et de rayon r , l'ensemble donné par

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

On appelle boule fermée d'un espace métrique (X, d) l'ensemble donné par

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

On définit aussi la sphère comme $S(x, r)$,

$$S(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) = r\}.$$

Dans un espace métrique (X, d) , on peut également définir la distance d'un point à un ensemble $A \subset X$.

Définition 1.3 (distance à un ensemble) Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X et $x \in X$. On appelle distance d'un point x à un ensemble A , la quantité

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

On a

Proposition 1.4 Soient (X, d) et $A \subset X$, l'application $d_A : X \rightarrow \mathbf{R}^+$ telle que pour $x \in X$, $d_A(x) = d(x, A)$, est Lipschitzienne de rapport 1

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y).$$

On définit également le “diamètre” d’une partie $A \subset X$ comme

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

On dit qu’un ensemble A est borné si et seulement s’il est contenu dans une boule, on a alors en particulier $\text{diam}(A) < \infty$.

1.3 Voisinages, ensembles ouverts, ensembles fermés

Définition 1.5 (Voisinage) On considère (X, d) un espace métrique, un ensemble V est un voisinage de x lorsqu’il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$.

On définit alors les ensembles ouverts et fermés.

Définition 1.6 (Ouverts et fermés d’un espace métrique) On considère (X, d) un espace métrique, un ensemble U est ouvert lorsqu’il est un voisinage de chacun de ses points, c’est-à-dire pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.
Un ensemble F est fermé si et seulement si $F^c = X \setminus F$ est ouvert

Dans $\mathbf{R}$ muni de la distance euclidienne, $]0, 1[$ est voisinage de chacun de ses points, $[0, 1[$ n’est pas voisinage de 0, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ne sont voisinages d’aucun point.

Proposition 1.7 Toute boule ouverte est un ouvert et toute boule fermée est un fermé.

Démonstration : A savoir. ■

On a le premier résultat important qui permet de définir une topologie dans des espaces généraux (espace topologique) qui ne sont pas forcément des espaces métriques.

Théorème 1.8 On a alors les propriétés suivantes pour les ouverts :

- $X, \emptyset$ sont des ouverts ;
- une union quelconque d’ouverts est un ouvert ;
- une intersection finie d’ouverts est un ouvert.

On a aussi en passant au complémentaire :

- $X, \emptyset$ sont des fermés ;
- une intersection quelconque de fermés est un fermé ;
- une union finie de fermés est un fermé. .

Démonstration : A savoir. ■

Bien sûr, on insiste sur la remarque importante suivante

Remarque 1.9 Une intersection dénombrable d'ouverts n'est pas forcément un ouvert. On propose alors un exemple : on note que

$$\{0\} = \bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[,$$

qui est un fermé de $\mathbb{R}$.

L'ensemble τ de tous les ouverts de (X, d) est appelée topologie sur X associée à la distance d .

Définition 1.10 (Intérieur (« interior » en anglais)) On définit A° l'intérieur d'un ensemble A par

$$A^\circ = \bigcup_{O \text{ ouvert}, O \subset A} O.$$

On a alors les propriétés suivantes

Proposition 1.11 L'ensemble A° est un ouvert et c'est "le plus gros ouvert contenu dans A ." En outre, l'ensemble A° est caractérisé par

$$A^\circ = \{x \in A \mid A \text{ est voisinage de } x\}.$$

Démonstration : A savoir. ■

Définition 1.12 (Adhérence (« closure » en anglais)) On définit $\overline{A}$ l'adhérence d'un ensemble A par

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, A \subset F} F.$$

On a alors les propriétés suivantes

Proposition 1.13 L'ensemble $\overline{A}$ est toujours un fermé. En outre, on a

- si F est fermé et $A \subset F$ alors $\overline{A} \subset F$;
- $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé.

Démonstration : A savoir. ■

On pourra montrer que $\overline{A}$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $d(x, A) = 0$.

Proposition 1.14 Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X , on a alors

- O est un ouvert de (A, d) si et seulement si, il existe $\tilde{O}$ ouvert de X tel que $B = \tilde{O} \cap A$.
- F est un fermé de (A, d) si et seulement si, il existe $\tilde{F}$ fermé de X tel que $F = \tilde{F} \cap A$.

Démonstration : On re-démontrera ce résultat en cours de Master 1. A savoir. ■

1.4 Suites d'un espace métrique

Définition 1.15 (Suites et convergence d'une suite) Une suite est une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. On note alors $x_n = f(n)$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour la suite. En outre, on dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x ou écrit $x_n \longrightarrow x$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ si et seulement si

$$\forall V \text{ voisinage de } x, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in V.$$

Notez alors que l'on n'a pas nécessairement besoin d'un espace métrique pour définir la convergence d'une suite. Pour le cas particulier des espaces métriques on a $x_n \longrightarrow x$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, d(x_n, x) < \varepsilon$$

ou encore $d(x_n, x) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

On en déduit alors les propriétés suivantes

Proposition 1.16 On a les deux résultats suivants

- la limite d'une suite convergente est unique ;
- toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Démonstration : A savoir. ■

L'avantage de travailler avec un espace métrique est que l'on peut caractériser les ouverts et les fermés par des propriétés sur les suites. C'est très pratique !

Proposition 1.17 (Caractérisation séquentielle des ouverts, fermés) Soit (X, d) un espace métrique. On a alors,

- Un ensemble O est ouvert de (X, d) si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ telle que $x_n \rightarrow x \in O$, il existe n_0 tel que $x_n \in O$ pour tout $n \geq n_0$.
- Un ensemble F est fermé de (X, d) si et seulement si pour toute suite convergente $(x_n)_{n \geq 1} \subset F$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in F$.
- $x \in \overline{A}$ dans (X, d) si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset A$ telle que $x_n \rightarrow x$.

Démonstration : A savoir. ■

Définition 1.18 (Suite de Cauchy) Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dès que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq n_\varepsilon, \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

On a alors les propriétés suivantes

Proposition 1.19 Soit (X, d) un espace métrique, on a alors

- toute suite convergente est de Cauchy ;
- toute suite de Cauchy est bornée ;
- une suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente.

Démonstration : A savoir. ■

1.5 Fonctions continues sur un espace métrique

Définition 1.20 (Continuité) Une fonction $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in X, \quad d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Autrement dit : f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon),$$

ou encore

Proposition 1.21 Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ et $x_0 \in X$. Alors, la fonction f est continue en x_0 si et seulement si pour tout ouvert V de Y contenant $f(x_0)$, il existe un ouvert U de X contenant x_0 tel que $f(U) \subset V$.

Démonstration : On re-démontrera ce résultat en cours de Master 1. A savoir. ■

Cette dernière proposition permet de caractériser la continuité dans des espaces topologiques.

Théorème 1.22 (Caractérisation séquentielle de la continuité) *La fonction f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $x_n \rightarrow x_0$ dans X on a $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ dans Y .*

Théorème 1.23 *Soit (X, d) un espace métrique. On suppose que les fonctions $f, g : X \rightarrow \mathbf{R}$ sont continues en $x_0 \in X$. Alors $f \pm g$, λf , $|f|$, fg sont continues en x_0 . Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est bien définie sur un voisinage de x_0 et est continue en x_0 .*

Définition 1.24 *Une fonction $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ est continue (globalement) si et seulement si elle est continue en tout point de X .*

Théorème 1.25 *Soit $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- f est continue (globalement)
- Pour tout ensemble ouvert $O \subset Y$, l'ensemble $f^{-1}(O)$ est ouvert dans X .
- Pour tout ensemble fermé $F \subset Y$, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est fermé dans X .

Démonstration : C'est un résultat important que l'on redémontrera dans ce cours de Master 1. A savoir. ■

On en déduit que pour (X, d_1) , (Y, d_2) , (Z, d_3) trois espaces métriques, deux fonction $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont continues, alors la fonction $g \circ f : X \rightarrow Z$ est continue.

Définition 1.26 (Fonction lipschitzienne) *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite L -Lipschitzienne si et seulement si*

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad \delta(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2).$$

Une application $g : X \rightarrow X$ est contractante s'il existe $k < 1$ tel que pour tout $x_1, x_2 \in X$,

$$d(g(x_1), g(x_2)) \leq k \cdot d(x_1, x_2).$$

On montre très facilement qu'une application Lipschitzienne est continue.

1.6 Distances équivalentes et espaces produits

Définition 1.27 (Distances équivalentes) *Deux distances d_1 et d_2 sur un même ensemble X sont équivalentes si elles engendrent les mêmes familles d'ouverts.*

Remarque 1.28 *Si d_1 et d_2 sont équivalentes, alors une suite converge dans (X, d_1) ssi elle converge dans (X, d_2) .*

On a alors la propriété suivante

Proposition 1.29 *On suppose qu'il existe deux constantes C_1 et $C_2 > 0$ telles que*

$$\forall x, y \in X, \quad C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y).$$

Alors d_1 et d_2 sont équivalentes.

Proposition 1.30 *Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques. On définit $X = X_1 \times \dots \times X_n$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans X on définit*

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i), \\ \delta_\infty(x, y) = \max_{i=1}^n d_i(x_i, y_i), \\ \delta_2(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \dots + d_n(x_n, y_n)^2} \\ \delta_p(x, y) = (d_1(x_1, y_1)^p + \dots + d_n(x_n, y_n)^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty. \end{array} \right.$$

Alors $\delta_1, \delta_\infty, \delta_2, \delta_p$ sont des distances sur X . Elles sont toutes équivalentes.

Définition 1.31 (Espace produit) *Soit $n \in \mathbb{N}_*$. On appelle espace métrique produit des $((X_j, d_j))_{1 \leq j \leq n}$ l'espace X ci-dessus muni de l'une des distances $\delta_1, \delta_\infty, \delta_2, \delta_p$.*

Proposition 1.32 *La convergence dans l'espace produit revient à la convergence composante par composante.*

2 Espaces complets

2.1 Résultats généraux

Définition 2.1 (Espace métrique complet) *Un espace métrique est complet lorsque toute suite de Cauchy est convergente.*

Par exemple, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^N$ munis de leur distance usuelle sont complets.

Proposition 2.2 *Soit (X, d) un espace métrique, soit $E \subset X$.*

- Si (E, d) est complet, alors E est fermé dans (X, d) .
- En outre si X est complet, alors E est fermé dans (X, d) si et seulement si (E, d) est complet.

Démonstration : On re-démontrera ce résultat en cours de Master 1. A savoir. ■

Lorsqu'un espace (X, d) est complet, cela permet de démontrer l'existence de certains objets.

Théorème 2.3 (Point fixe de Banach) Soient (X, d) et $f : X \rightarrow X$, une application contractante, alors

1. f admet un unique point fixe $x \in X$, tel que $f(x) = x$.
2. pour tout $x_0 \in X$, la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers le point fixe x .

Nous allons maintenant démontrer le classique théorème de Baire qui a de nombreuses applications en analyse fonctionnelle [le théorème de Baire n'est pas au programme de l'agrégation de mathématiques].

2.2 Théorème de Baire

Théorème 2.4 (Théorème de Baire) Soient (X, d) un espace métrique complet. On a alors les propriétés suivantes

1. Pour toute famille dénombrable d'ouverts denses $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, nous avons $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est dense dans X
2. Pour toute famille dénombrable de fermés d'intérieur vide $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, nous avons $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide dans X

Démonstration : On fera la démonstration de ce résultat en cours de Master 1 mais il n'est pas forcément utile de la connaître dans un premier temps. ■

- Un espace métrique vérifiant les deux propriétés du théorème est appelé un espace de Baire.
- Il faut prendre garde à ce que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ n'est pas un ouvert en général, de même que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ n'est pas fermé.
- Par passage au complémentaire, on voit bien que les deux propriétés sont équivalentes.

2.3 Applications du Théorème de Baire

Proposition 2.5 *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels ne peut s'écrire comme intersection dénombrables d'ouverts de $\mathbb{R}$.*

Démonstration : On fera la démonstration de ce résultat en cours de Master 1, il faut savoir comment appliquer le théorème de Baire. ■

Proposition 2.6 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie dénombrable. Alors, $(E, \|\cdot\|)$ n'est pas complet.*

Démonstration : On fera la démonstration de ce résultat en cours de Master 1, il faut savoir comment appliquer le théorème de Baire. ■

On rappelle le résultat essentiel concernant les suites de fonctions continues.

Théorème 2.7 (Limite localement uniforme de suites de fonctions continues) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues d'un espace métrique (X, d) dans un autre espace métrique (Y, δ) . On suppose que $(f_n)_n$ converge localement uniformément vers une fonction $f : X \rightarrow Y$ [pour tout point $x \in X$, il existe une boule de rayon $r > 0$ centrée en x sur laquelle la convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme].*

Alors la fonction limite f est elle-même continue.

Démonstration : A savoir. ■

Que peut on dire sur la continuité des limites simples de fonctions continues ? C'est cette question qui a motivé les travaux de Baire.

Théorème 2.8 (limite simple de suite de fonctions) *Soient (X, d) , (Y, δ) deux espaces métriques et $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de X dans Y . On suppose que (X, d) est complet et que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction $f : X \rightarrow Y$. Alors, l'ensemble des points de X en lesquels f est continue est un sous-ensemble dense de X .*

Démonstration : On fera la démonstration de ce résultat en cours de Master 1, il faut savoir comment appliquer le théorème de Baire. ■

Proposition 2.9 *Si (X_1, d_1) et (X_2, d_2) sont complets, alors $X_1 \times X_2$ (muni d'une des distances définies sur l'espace produit) est complet.*

3 Compacité

3.1 Résultats généraux

Définition 3.1 (espace compact) *Un espace métrique (X, d) est compact lorsque de toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ vérifiant $X = \cup_{i \in I} U_i$ [il s'agit d'un recouvrement de X], il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $X = \cup_{i \in J} U_i$ [il s'agit d'un sous-recouvrement fini].*

On vérifie alors facilement que si (X, d) est compact, alors X est borné (Indication : $X = \cup_{n \geq 1} B(x_0, n)$).

Définition 3.2 (espace séquentiellement compact) *Un espace métrique est séquentiellement compact lorsque toute suite possède une sous-suite convergente.*

Un intervalle $[a, b] \subset \mathbf{R}$ est séquentiellement compact. Un ensemble fermé, borné dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^N$ est séquentiellement compact.

Définition 3.3 (partie relativement compact) *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que A est relativement compact lorsque l'adhérence de A dans X est compacte, c'est-à-dire $\overline{A}$ est compacte.*

Théorème 3.4 *Soit (X, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) X est compact.
- ii) X est séquentiellement compact.

Théorème 3.5 *Un espace métrique compact est complet.*

Démonstration : Cette démonstration est facile en utilisant la caractérisation séquentielle de la compacité. A savoir. ■

Proposition 3.6 *Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . On a alors*

- *A est compacte, implique que A est fermée dans (X, d) .*

En outre si (X, d) est compact, alors

- *A est compacte si et seulement si A est fermée.*

Démonstration : On fera la démonstration de ce résultat en cours de Master 1. A savoir. ■

Définition 3.7 *Un espace métrique (X, d) est séparable s'il existe une partie A de X qui soit à la fois dénombrable et dense dans X .*

Théorème 3.8 *Tout espace métrique compact est borné et séparable.*

Démonstration : On fera la démonstration de ce résultat en cours de Master 1. A savoir. ■

Dans le cas de $\mathbf{R}$, les compacts de $\mathbf{R}$ sont exactement les fermés bornés. On verra plus loin que c'est la même chose pour $\mathbf{R}^d$ muni de n'importe quelle norme.

Théorème 3.9 (Théorème de Tychonoff) *Soient $(X_j, d_j)_{1 \leq j \leq N}$ une famille d'espaces métriques compacts, alors l'espace produit (X, d) est également compact.*

Démonstration : A savoir. ■

3.2 Fonctions définies sur un compact

Théorème 3.10 *Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction continue. Si X est compact, alors $f(X)$ est compact dans Y .*

Démonstration : C'est un résultat évident à l'aide des suites et de la caractérisation séquentielle de la compacité et de la continuité... ■

Corollaire 3.11 . *Si (X, d) est un espace métrique compact et $f : X \longrightarrow Y$ est une bijection continue, alors $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ est continue.*

Théorème 3.12 *Si (X, d) est un espace métrique compact et $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration : On utilise encore les suites... ■

Définition 3.13 (Fonction uniformément continue) *Soient (X, d) , (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue (sur X) si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\forall x, y \in X, \quad \text{tels que } d(x, y) \leq \eta, \quad \text{on a } \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon,$$

autrement dit si l'image de toute boule de X de rayon η par f est contenue dans une boule de rayon ε de Y .

Remarque 3.14 *On fait bien attention à la place des quantificateurs pour caractériser la continuité uniforme...*

Théorème 3.15 (Théorème de Heine) Soient (X, d) , (Y, δ) deux espaces métriques. Si X est compact et que $f : X \rightarrow Y$ est une fonction continue, alors elle est uniformément continue.

Démonstration : Nous allons utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité et on raisonne par l'absurde : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $(x, y) \in X^2$ vérifiant

$$d(x, y) \leq \eta \quad \text{et} \quad \delta(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

On prend alors $\eta = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}_*$, il existe donc deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ tels que

$$d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon. \quad (3.1)$$

Comme X est compact, on peut extraire des sous-suites qui convergent et comme $d(x_n, y_n) \leq 1/n$, on montre que ces sous-suites convergent vers la même limite x

$$x_{\phi}(n) \rightarrow x, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Comme f est continue, on a donc

$$\delta(f(x_{\phi}(n)), f(y_{\phi(n)})) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

ce qui contredit (3.1). ■