

Devoir sur l'application du Théorème de Baire

2 novembre 2018

L'objet de cet exercice est de montrer que l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ et nulle part dérivables est dense dans $C^0([0, 1], \mathbf{R})$.

On travaille dans l'espace $C^0([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme infinie. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, on considère le sous-ensemble suivant

$$U_{\varepsilon, n} = \left\{ f \in C^0([0, 1], \mathbf{R}), \quad \forall x \in [0, 1], \quad \exists y \in [0, 1], \quad \text{tel que } 0 < |x - y| < \varepsilon, \quad \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > n \right\}.$$

1. Question. On veut montrer que $U_{\varepsilon, n}$ est un ouvert de $C^0([0, 1], \mathbf{R})$. Pour ce faire, on pourra montrer que son complémentaire est fermé en utilisant les suites.

1.) - On fixe ε et n et soit $(f_k)_k$ une suite d'éléments de $U_{\varepsilon, n}^c$ qui converge uniformément vers une fonction continue f . Il s'agit de montrer que f n'est pas dans $U_{\varepsilon, n}$.

- Par définition, pour tout k , f_k n'est pas dans $U_{\varepsilon, n}$, ce qui signifie

$$\exists x_k \in [0, 1], \text{ tel que } \forall y \in [0, 1] \text{ vérifiant } 0 < |y - x_k| < \varepsilon, \text{ on a } \frac{f_k(x_k) - f_k(y)}{x_k - y} \leq n. \quad (0.1)$$

- Comme $[0, 1]$ est compact, on peut extraire de $(x_k)_k$ une sous-suite convergente. Ainsi, quitte à considérer la sous-suite correspondante de $(f_k)_k$ (ce qui ne change rien à la convergence uniforme vers f), on peut finalement supposer que la suite $(x_k)_k$ est elle-même convergente.

On note $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ la limite de cette suite.

- On fixe maintenant $y \in [0, 1]$ tel que $0 < |\bar{x} - y| < \varepsilon$ et on veut montrer que

$$\frac{f(\bar{x}) - f(y)}{\bar{x} - y} \leq n,$$

ce qui montrera bien que f n'est pas dans $U_{\varepsilon, n}$.

Pour tout k , on pose

$$y_k = \min(\max(x_k + (y - \bar{x}), 0), 1).$$

Les min et max sont là pour assurer que y_k est bien dans l'intervalle d'étude $[0, 1]$. On vérifie aisément que $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ et que $|y_k - x_k| \leq |y - \bar{x}| < \varepsilon$.

On en déduit que, pour k assez grand, on a $x_k \neq y_k$ car $(x_k - y_k)_k$ converge vers $\bar{x} - y$ qui est non nul. Ainsi, pour k assez grand, on peut appliquer à $y = y_k$ la propriété (0.1) ce qui donne

$$\frac{f_k(x_k) - f_k(y_k)}{x_k - y_k} \leq n, \quad k \geq k_0.$$

Comme $(f_k)_k$ converge uniformément vers f , nous pouvons utiliser le théorème de double limite pour obtenir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_k) = f(\bar{x}), \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(y_k) = f(y),$$

ainsi on peut passer à la limite dans l'inégalité précédente et obtenir

$$\left| \frac{f(\bar{x}) - f(y)}{\bar{x} - y} \right| \leq n,$$

ce qui conclut la preuve.

2. Question. On veut montrer que $U_{\varepsilon, n}$ est dense dans $C^0([0, 1], \mathbf{R})$.

2. 1) on utilisera le théorème de Weierstrass pour approcher une fonction continue. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbf{R})$, il s'agit de construire une fonction proche de f (au sens de la norme de la convergence uniforme) mais qui oscille fortement. On fixe $\delta > 0$ et on commence par utiliser la densité des fonctions polynômes dans $C^0([0, 1], \mathbf{R})$ (Théorème de Weierstrass). Il existe donc un polynôme P_δ tel que

$$\|f - P_\delta\|_\infty \leq \delta$$

2. 2) on montrera que pour tout δ , $P_\delta + \delta \sin(x/\alpha) \in U_{\varepsilon, n}$ où P_δ est un polynôme. On fixe maintenant ε et n et on va essayer d'approcher P_δ par une fonction de $U_{\varepsilon, n}$. On remarque que, d'après l'inégalité des accroissements finis, nous avons

$$\left| \frac{P_\delta(x) - P_\delta(y)}{x - y} \right| \leq \sup_{[0, 1]} |P'_\delta| = M, \quad \forall x \neq y \in [0, 1].$$

On pose maintenant

$$f_{\delta, \alpha} = P_\delta + \delta \sin(x/\alpha).$$

On a alors que $\|f_\delta - P_\delta\|_\infty \leq \delta$. De plus, pour x et y distincts nous avons

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{\delta, \alpha}(x) - f_{\delta, \alpha}(y)}{x - y} \right| &\geq \delta \left| \frac{\sin(x/\alpha) - \sin(y/\alpha)}{x - y} \right| - \left| \frac{P_\delta(x) - P_\delta(y)}{x - y} \right| \\ &\geq \delta \left| \frac{\sin(x/\alpha) - \sin(y/\alpha)}{x - y} \right| - M. \end{aligned}$$

En choisissant $\alpha < \varepsilon/\pi$, alors pour tout $x \in [0, 1]$, nous pouvons poser $y = x \pm \alpha\pi$ (le signe étant choisi pour que $y \in [0, 1]$), ce qui donne

$$\left| \frac{f_{\delta, \alpha}(x) - f_{\delta, \alpha}(y)}{x - y} \right| \geq \frac{2\delta}{\alpha\pi} - M.$$

Si maintenant, on choisit α suffisamment petit pour que $2\delta/(\alpha\pi) - M > n$ et $\alpha < \varepsilon/\pi$, alors nous avons bien

$$f_{\delta, \alpha} \in U_{\varepsilon, n}, \quad \text{et} \quad \|f_{\delta, \alpha} - P_\delta\|_\infty \leq \delta.$$

Au final, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|f_{\delta, \alpha} - f\|_\infty \leq \|f_{\delta, \alpha} - P_\delta\|_\infty + \|f - P_\delta\|_\infty \leq 2\delta.$$

3.Question. En déduire que l'ensemble E des fonctions continues sur $[0, 1]$ et nulle part dérivables est dense dans $C^0([0, 1], \mathbf{R})$ (Indication : appliquer les théorème de Baire).

3.) D'après le théorème de Baire, l'ensemble

$$F = \cap_{n \geq 1} U_{1/n, n},$$

est dense dans $C^0([0, 1], \mathbf{R})$. Il s'agit de montrer que les éléments de F ne sont dérivables en aucun point. Soit $f \in F$ et $x \in [0, 1]$. Par définition, pour tout $n \geq 1$, nous avons $f \in U_{1/n, n}$, ce qui signifie qu'il existe y_n tel que

$$0 \leq |y_n - x| \leq 1/n, \quad \text{et} \quad \left| \frac{f(x) - f(y_n)}{x - y_n} \right| \geq n,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x) - f(y_n)}{x - y_n} \right| = \infty$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en x .