Devoir sur les espaces de Banach

8 octobre 2018

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E.
On veut démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 *Soit E un espace de Banach et $T \in GL(E)$ un isomorphisme de E (c'est-à-dire une application linéaire continue bijective d'inverse continu). On a alors*

$$B_{\mathcal{L}(E)}\left(T, \frac{1}{|||T^{-1}|||}\right) \subset GL(E).$$

En particulier $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

1. Cas $T = Id$ Il s'agit de monter que

$$B_{\mathcal{L}(E)}(Id, 1) \subset GL(E).$$

Pour ce faire on considère $H \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|||H||| < 1$.

1.1 Montrer que

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} H^k$$

est une série convergente, c'est-à-dire que la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{k=0}^{N} H^k$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$.

1.2 Soit S la limite montrer alors que

$$(Id - H)\, S = Id.$$

1.3 Déduire le résultat.

2. Cas général Soit $T \in GL(E)$, pour $H \in L(E)$ vérifiant $|||H||| < |||T^{-1}|||^{-1}$ et en écrivant

$$T - H = T(Id - T^{-1}H),$$

montrer le résultat.