Équation de la chaleur

Objectif
* étudier cette équation sur $\mathbb{R}$, puis sur un intervalle ouvert avec différentes conditions de bords
* implémentation numérique et étude des schémas associés

I] Modélisation

Pour connaître l'évolution de la température le long d'une barre ou d'un fil ; on fait un bilan d'énergie autour d'un point x sur une tranche de taille δx

La puissance $P(x) = J(x)\, S - J(x+\delta x)\, S$

Ainsi pour $\delta x \ll 1$; $P(x) = -\dfrac{\partial J}{\partial x} S\, \delta x$

D'autre part $\underbrace{P = c\, m \dfrac{\partial T}{\partial t}}_{\text{loi d'Ohm en thermique}}$ avec m la masse de la tranche $m = \rho\, S\, \delta x$ où ρ représente la masse volumique

On obtient alors l'équation suivante

$$\rho c\, S\, \delta x \frac{\partial T}{\partial t} = - S\, \delta x \frac{\partial J}{\partial x}$$

ou encore $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = - \dfrac{\partial J}{\partial x}$

On a une équation et deux inconnues (T, J) : il nous faut une relation de fermeture : loi de Fick ou de Fourier

$$J = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

Ainsi : on obtient l'équation de la chaleur linéaire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

c'est une equation aux dérivées partielles et une équation d'évolution puisqu'il y a une variable t = décrivant le temps $t \geq 0$.
et une variable d'espace $x \in \mathbb{R}$ ou alors $x \in]a,b[$ intervalle ouvert.

II] Solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

On considère dans cette partie l'equation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u & t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ u(t=0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'idée est de passer en Fourier en espace, l'equation étant linéaire ; on obtient

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(k) = -k^2 \hat{u}(t,k) & k \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(t=0) = \hat{f}(k) \end{cases}$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx$$

Pour chaque k fixé ; on doit resoudre une eq lineaire

$$\hat{u}(t,k) = \hat{f}(k) e^{-k^2 t}$$

On se souvient alors que le produit de deux fonctions en k ; correspond à une convolution dans la variable x

$$u(t,x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k^2 t}\right) * \check{f}\right)(x)$$

$$\check{f}(x) = \int \hat{f}(k) e^{ikx} dk$$

En outre on a

Lemme Pour $\sigma > 0$; la transformée de Fourier d'une Gaussienne est une Gaussienne

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

alors
$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}$$

Démonstration On différencie $f(x)$ par rapport à x et on obtient

$$\frac{d}{dx} f(x) = -\frac{x}{\sigma^2} f(x)$$

Puis par transformée de Fourier

$$ik\,\hat{f}(k) = \frac{1}{i\sigma^2} \frac{d}{dk}\hat{f}(k)$$

ou encore
$$\frac{\hat{f}'(k)}{\hat{f}(k)} = -\sigma^2 k$$

$$\ln(\hat{f}(k)) - \ln(\hat{f}(0)) = -\frac{\sigma^2}{2} k^2$$

Puisque $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ on a $\hat{f}(0) = 1$ donc $\hat{f}(k) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}k^2}$. $\square$

On conclut alors que

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-tk^2}) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = G(t,x)$$

et donc la solution de l'équation de la chaleur linéaire s'écrit

$$u(t,x) = G * f(x) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy$$

On observe que lorsque $t \to 0^+$; $G(t,x) \longrightarrow \delta_0$ $t \to 0^+$, ce qui permet d'obtenir que $u(0,x) = f(x)$.

Il s'agit maintenant de donner un cadre fonctionnel pour justifier les calcul ci-dessus.

On travaille donc avec l'espace de Schwartz qui est le plus approprié pour la transformée de Fourier

<u>Définition</u> L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et

$$x^\alpha \partial^\beta f(x) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } |x| \to +\infty \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$$

On définit alors l'application $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\mathbb{R}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$

Ainsi une suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ lorsque

$$\|f_k - f\|_{\alpha,\beta} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \to +\infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2.$$

<u>Exemple</u> $f(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Dans notre cas ; on aura des fonctions dépendant de la variable t et x qui ne jouent pas le même rôle et pour lesquelles nous n'aurons pas la même régularité.

On considère donc $u : \begin{array}{l} [0, +\infty[\to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ t \longrightarrow u(t) \end{array}$

<u>Définition</u> • Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ une fonction $u :]a,b[\to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dite continue en $t \in]a,b[$ lorsque

$$u(t+h) \longrightarrow u(t) \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ lorsque } h \to 0$$

autrement dit

$$\|u(t+h) - u(t)\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2.$$

• u est dite différentiable en $t \in]a,b[$ lorsqu'il existe une fonction $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} v \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On définit alors l'ensemble $\mathcal{C}(]a,b[, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ = ensemble des fonctions continues en t à valeur dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

De la même manière ; on définit $\mathcal{C}^k(]a,b[, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ $k \in \mathbb{N}$.

Remarque On peut remplacer $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par un espace vectoriel en particulier normé comme $L^2(\mathbb{R})$.

$u \in \mathcal{C}(]a,b[, L^2(\mathbb{R}))$ signifie que $\forall t \in]a,b[$

$$\| u(t+h) - u(t) \|_{L^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

On a le résultat suivant qui fait le lien entre la dérivée partielle par rapport à t et la dérivée ponctuelle donnée par la définition

Proposition Supposons que $u \in \mathcal{C}(]a,b[, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$.

$u \in \mathcal{C}^1(]a,b[, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ ssi

(1) la dérivée partielle $\partial_t u$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]a,b[$

(2) $\partial_t u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\forall t \in]a,b[$

(3) $t \longrightarrow \partial_t u \in \mathcal{C}(]a,b[, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$

Démonstration ($\Rightarrow$) La convergence de fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ implique la convergence uniforme donc si $t \longmapsto u(t,\cdot)$ est continûment différentiable alors $\partial_t u(t,x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]a,b[$ et $\partial_t u(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour tout $t \in]a,b[$. Ainsi $\partial_t u \in \mathcal{C}(]a,b[, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$

($\Leftarrow$) Supposons que $\partial_t u$ existe avec les propriétés (1), (2) et (3).

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} - \partial_t u(t,x) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [\partial_t u(s,x) - \partial_t u(t,x)]\, ds$$

Puisque la fonction à l'intérieur de l'intégrale est régulière et tend rapidement vers 0 à l'infini en x ; il vient grâce au théorème de la convergence dominée ; on peut dériver par rapport à x :

$$x^\alpha \partial_x^\beta \left[\frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} - \partial_t u(t,x) \right] = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} x^\alpha \partial_x^\beta [\partial_t u(s,x) - \partial_t u(t,x)]\, ds$$

d'où

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \partial_t u \right\|_{\alpha,\beta} \leq \max_{t \leq s \leq t+h} \| \partial_t u(s,\cdot) - \partial_t u(t,\cdot) \|_{\alpha,\beta} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Ainsi u est différentiable et $\partial_t u \in \mathcal{C}(]a,b[, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$. $\square$

On peut alors démontrer le théorème suivant

<u>Théorème</u> Supposons que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une unique solution
$u \in \mathcal{C}([0,+\infty[, \mathcal{S}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1(]0,+\infty[, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$
et u est donnée par $u(t,x) = G * f(t,x)$.

<u>Démonstration</u> Le cadre fonctionnel permet de justifier rigoureusement les calculs précédents.
Le point clef est de observer que la transformée de Fourier est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
L'application inverse est également continue. La dérivée en temps de u existe si et seulement si la dérivée en temps de $\hat{u} = \mathcal{F}u$ existe et $\mathcal{F}(\partial_t u) = \partial_t(\mathcal{F}(u))$.
De même $u \in \mathcal{C}^k(]0,+\infty[, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ si et seulement si $\hat{u} \in \mathcal{C}^k(]0,+\infty[, \mathcal{S}$
En résolvant l'équation de la chaleur dans la variable de Fourier on obtient alors le résultat.
En effet on résout

$$\begin{cases} \hat{u}'(t,k) = -k^2\,\hat{u}(t,k) & \forall k \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(0,k) = \hat{f}(k) \end{cases}$$

dont la solution s'écrit $\hat{u}(t,k) = \hat{f}(k)\, e^{-tk^2}$

et $\partial_t u(t,k) = -k^2 \hat{f}(k)\, e^{-tk^2}$

Montrons que $u \in \mathcal{C}([0,+\infty[, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$. Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2$

$$k^\alpha \partial_k^\beta \left[\hat{u}(t+h,k) - \hat{u}(t,k) \right] = \hat{a}(t,k)\left[e^{-hk^2} - 1\right] e^{-tk^2} + h \sum_{i=0}^{\beta-1} h^i\, b_i(t,k)\, e^{-(t+h)k^2}$$

En passant au sup en k ; on a lorsque $h \to 0$

$$\|\hat{u}(t+h) - \hat{u}(t)\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

En utilisant les mêmes argument on montre que
$\partial_t u \in \mathcal{C}(]0,\infty[, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$

Finalement par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ par la norme L^2 usuelle ; on montre le resultat suivant

<u>Théorème</u> Supposons que $f \in L^2(\mathbb{R})$. On definit alors u par $u = G * f$; qui est solution de

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u \\ u(t=0) = f \end{cases}$$

$u \in \mathcal{C}([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}))$ et $u \in \underbrace{\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[\times \mathbb{R})}_{\text{régularisation}}$

<u>Démonstration</u> : On raisonne par densité et grâce à l'inégalité de Young pour le produit de convolution

$$\|u\|_{L^r} \leq \|G\|_{L^p} \|f\|_{L^q} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \ \ldots \ \square$$

<u>Attention</u> si l'on n'impose pas de condition à l'infini, on n'a pas forcément unicité

$u_0 \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $u(t) \equiv 0$ est solution

mais aussi

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(t)\, x^{2n}}{(2n)!} & t > 0 \end{cases} \qquad \text{où } f(t) = e^{-1/t^2}$$

On a aussi

Théorème Soit $u_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ on pose

$$u(t,x) = G(t,\cdot) * f(x)$$

alors

(i) $u \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[\times \mathbb{R})$

(ii) $\partial_t u = \partial_{xx} u$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{t \to 0^+} u(t,x) = u_0(x)$

(iv) $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx$$

Preuve La seule difficulté provient de la continuité

$$|u(t,x) - u_0(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} G(t,x-y)\left(u_0(y) - u_0(x)\right) dy \right|$$

$$\leq \int_{|x-y| \leq \delta} G(t,x-y) \underbrace{|u_0(y) - u_0(x)|}_{\leq \varepsilon} dy + \underbrace{\int_{|x-y|>\delta} G(t,x-y)\left(|u_0(x)| + |u_0(y)|\right) dy}_{\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0}$$

(iv) est une conséquence de Fubini.

III] Problème à valeur initiale dans un domaine borné

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, & t > 0 \text{ et } x \in (0,1) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in (0,1) \\ + \text{ conditions de bord} & \end{cases}$$

1) Conditions de bord

* condition de Dirichlet

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{pour tout } t > 0$$

* condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \quad \text{pour tout } t > 0$$

2) Remarque sur l'unicité des solutions :

Supposons que l'on a 2 solutions alors

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

$$v(x,0) = u_0(x) - u_0(x) = 0$$

et v satisfait les mêmes conditions initiales

enfin, posons

$$Q(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 v(x,t)^2\, dx$$

$$Q'(t) = \int_0^1 v(x,t)\, \partial_t v(x,t)\, dx$$

$$= \int_0^1 v(x,t)\, \partial_x^2 v(x,t)\, dx$$

$$= \underbrace{\Big[v(x,t)\, \partial_x v(x,t) \Big]_0^1}_{=0} - \underbrace{\int_0^1 \left(\partial_x v(x,t)\right)^2 dx}_{\leqslant 0}$$

et donc $0 \leq Q(t) \leq Q(0) = 0 \quad \forall t > 0$

3) Existence de solutions (Dirichlet)

méthode : théorie de Fourier en remarquant que

- $e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$ est solution de

$$\partial_t u = \Delta u$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

- $(\sqrt{2} \sin(k\pi \cdot))_{k \in \mathbb{N}^*}$ base Hilbertienne sur $L^2(]0;1[)$

- si u est solution de l'EDP et que
$$\begin{cases} \partial_t u \in \mathcal{C}^0([0,1] \times]0,+\infty[) \\ \partial^2_{xx} u \in \mathcal{C}^0([0,1] \times]0,+\infty[) \end{cases}$$

alors u, $\partial_t u$ et $\partial^2_{xx} u$ sont développables sur la base Hilbertienne avec

$$u(x,t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \widehat{u(\cdot,t)}(k) \sin(k\pi x)$$

on note $\widehat{u(\cdot,t)}(k) = \hat{u}(k)(t)$

et on montre (exo) que

$$\hat{u}(k)'(t) + k^2\pi^2 \hat{u}(k)(t) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t$$

et donc $\hat{u}(k)(t) = \hat{u}(k)(0)\, e^{-k^2\pi^2 t}$

et on peut montrer que si $u_0 \in L^2(]0;1[)$ alors
$\hat{u}(k)(0) = \hat{u}_0(k)$

Thm : Soit $u_0 \in L^2(]0;1[)$ et $(\hat{u}_0(k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ sa suite de coeff de Fourier alors il existe une unique solution $u : (x,t) \in [0,1] \times]0,+\infty[\mapsto u(x,t)$ dérivable en t et 2 fois dérivable en x sur $[0,1] \times]0;+\infty[$ et $u(\cdot,t) \xrightarrow[t\to 0]{L^2} u_0$

avec $$u(x,t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{u}_0(k)\, e^{-k^2\pi^2 t} \sin(\pi k x)$$

Rq : * on a aussi que $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(]0;1[)} \leq \|u_0\|_{L^2(]0;1[)}\, e^{-\pi^2 t}$

* par comparaison, pour $u_0 \in \mathcal{C} \cap L^\infty$ et ≥ 0

on a $$0 \leq u(x,t) \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\, dy$$

* si $u_0 \in L^\infty(]0;1[)$ alors

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty} \quad \forall t>0$$

* le problème est mal posé pour $t<0$

IV] Résolution approchée par méthode des différences finies

On note N le nombre de pas de temps entre 0 et T

$t_n = n\Delta T$ pour $n \in \{0, \dots, N\}$

$x_j = j\,\Delta x$ pour $j \in \{0, \dots, J+1\}$

on a $u(x_j, t_n)$ approchée par u_j^n où

$u_0^n = u_{J+1}^n = 0 \quad \forall n \in [\![0, N]\!]$

$u_j^0 = u_0(x_j) \quad \forall j$

on approche $\partial_{xx}^2 u(x_j, t_n) \simeq \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$

et $\partial_t u(x_j, t_n) \simeq \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$ (explicite)

$\simeq \dfrac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$ (implicite)

Rq : • schéma explicite convergent sous condition de CFL
• implicite inconditionnellement convergent

1) Erreur de consistance

$$R_j(t_n, u, \Delta t, \Delta x) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

où $u_j^n = u(x_j, t_n)$ et u solution du pbm

Lemme : si $u \in \mathcal{C}_b^{4,2}([0,1] \times [0,T])$ alors il existe $C > 0$ t.q

$$\max_{n \in \{0,\dots,N-1\}} \sup_{j \in \{1,\dots,J\}} |R_j(t_n, u, \Delta t, \Delta x)| \leq C(\Delta t + \Delta x^2)$$

On note $e_j^n(u) = u_j^n - u(x_j, t_n)$ l'erreur commise avec le schéma alors on a si $\boxed{\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}}$

$$\| e^n(u) \|_\infty \leq C(\Delta t + \Delta x^2) \quad \forall n \in \{0,\dots,N\}$$

Il suffit de voir que :

$$e_j^{n+1}(u) = e_j^n(u) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(e_{j+1}^n(u) - 2e_j^n(u) + e_{j-1}^n\right) - \Delta t\, R_j(t_n, u, \Delta t, \Delta x)$$

$$= \left(1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) e_j^n(u) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} e_{j+1}^n(u) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} e_{j-1}^n(u) - \Delta t\, R_j(t_n, u, \Delta t, \Delta x)$$

et avec $0 \leq 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$

on obtient $|e_j^{n+1}(u)| \leq \|e^n(u)\|_\infty + \Delta t \, \|R(t_n, u, \Delta t, \Delta x)\|_\infty$

et donc $\|e^{n+1}(u)\|_\infty \leq CT(\Delta T + \Delta x^2)$

Remarque : pour l'équation $\partial_t u = \kappa \Delta u$

la condition de CFL devient

$$\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$