



UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré- Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Contribution à l'analyse et la simulation numérique de
l'équation de Vlasov.

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 02 juillet 2001
pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré - Nancy I
(Spécialité Mathématiques appliquées)

par

Francis FILBET.

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	P. DEGOND,	Directeur de Recherche CNRS, Univ. P. Sabatier, Toulouse.
	F. BOUCHUT,	Chargé de Recherche CNRS, ENS, Paris.
<i>Président :</i>	P. BERTRAND,	Professeur, Univ. H. Poincaré, Nancy.
<i>Examineurs :</i>	S. BENACHOUR,	Professeur, Univ. Nancy 2, Nancy.
	PH. LAURENÇOT,	Chargé de Recherche CNRS, Univ. P. Sabatier, Toulouse.
	E. SONNENDRÜCKER,	Professeur, Univ. L. Pasteur, Strasbourg.

Institut Élie Cartan Nancy.

Je tiens à remercier tout particulièrement Eric Sonnendrücker et Saïd Benachour qui m'ont encadré durant ces trois années de thèse. J'ai pu bénéficier de leurs compétences et apprécier la liberté qu'ils m'ont accordé dans mes choix de recherche. Je leur en suis profondément reconnaissant.

Je remercie François Bouchut et Pierre Degond de s'être intéressés à mon travail et d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteur. Leurs remarques ont permis l'amélioration de ce document.

J'adresse tous mes remerciements à Pierre Bertrand pour avoir accepté de présider ce jury et pour m'avoir transmis sa passion pour la physique des plasmas. Philippe Laurençot a joué un rôle important dans la préparation cette thèse, j'ai apprécié sa patience et sa disponibilité, et ses nombreux conseils ont guidé une partie de ces travaux.

Toute ma gratitude va également à l'équipe E.D.P. de l'institut Elie Cartan au sein de laquelle cette thèse s'est déroulée dans de très bonnes conditions. La diversité de cette équipe m'a été très profitable et m'a permis de progresser. Je tiens particulièrement à remercier Genia et Christine Kazantsev, Jean-Rodolphe Roche, Bruno Pinçon, Marius Tucsnak, Olivier Coulaud, les composantes nancéenne et strasbourgeoise de l'ACI Jeunes chercheurs "Analyse mathématique et simulation numérique de particules chargées" et le LPMI de Nancy. Merci à tous pour m'avoir supporté.

J'ai apprécié les qualités scientifiques du "Landau team", plus particulièrement Lorenzo Pareschi, Stéphane Cordier, Christophe Buet et Cédric Villani. Je remercie le GdR SParCh et le TMR "Asymptotic Methods in Kinetic Theory" qui m'ont permis de participer à diverses manifestations scientifiques (CEMRACS'99, Workshops, séjours à l'Université de Ferrare). Je tiens également à saluer l'équipe de Jacques Segré au C.E.A. à Bruyères-le-Châtel pour son accueil très chaleureux et Jean-Louis Lemaire avec qui j'ai eu l'occasion de collaborer.

Cette thèse a été réalisée grâce au soutien financier de la région Lorraine, du CEA et de l'INRIA.

Last but not least, je ne saurais dire ici combien je dois à ma famille qui m'a constamment soutenu au cours de ces trois années. Merci à Céline qui m'apporte beaucoup.

Contents

1	Introduction.	5
2	Analyse d'un schéma volumes finis pour Vlasov-Poisson.	25
2.1	Introduction.	25
2.2	Régularité et discrétisation de l'équation de Vlasov-Poisson.	26
2.3	Estimations <i>a priori</i> .	31
2.3.1	Estimation sur les dérivées de E_h .	34
2.3.2	Estimation <i>BV</i> faible de f_h .	36
2.3.3	Estimation <i>BV</i> forte de f_h .	39
2.4	Démonstration du théorème 2.1.	43
2.4.1	Convergence vers la solution faible de l'équation de Vlasov.	44
2.4.2	Convergence vers la solution de l'équation de Poisson.	48
2.5	Estimations d'erreurs.	49
2.6	Conclusion.	57
3	Quelques schémas conservatifs pour l'équation de Vlasov.	61
3.1	Introduction.	61
3.2	L'équation de Vlasov.	63
3.3	La méthode de conservation des flux.	64
3.3.1	La reconstruction ENO.	67
3.3.2	La méthode Positive et à Flux Conservatif (PFC).	68
3.4	La méthode semi-lagrangienne.	73
3.4.1	L'interpolation de Lagrange.	74
3.4.2	L'interpolation d'Hermite.	76
3.5	La méthode de conservation de l'énergie.	76
3.6	Tests numériques.	79
3.6.1	L'advection linéaire.	79
3.6.2	Le système de Vlasov-Poisson.	81
3.7	Conclusion.	91
4	L'équation de Vlasov axisymétrique.	97
4.1	Introduction.	97
4.2	Recherche d'invariants.	99

4.3	Solutions stationnaires.	100
4.3.1	Fonction de distribution K-V.	100
4.3.2	Fonction distribution de Maxwell-Boltzmann.	103
4.4	Discretisation de l'équation de Vlasov axisymétrique.	104
4.5	Résultats numériques.	105
4.5.1	Faisceau semi-gaussien.	105
4.5.2	Faisceau Maxwell-Boltzmann.	106
4.6	Conclusion.	112
5	Approximation de l'équation de Landau.	115
5.1	Introduction.	115
5.2	Comparaison de schémas numériques.	117
5.2.1	Trois algorithmes rapides pour l'équation de Landau.	118
5.2.2	Tests numériques dans le cas homogène.	127
5.2.3	Une première discretisation de l'équation de Landau non homogène.	135
5.2.4	Tests numériques dans le cas non homogène $1D \times 3D$	137
5.2.5	Conclusion.	140
5.3	Discretisation de l'équation de Landau non homogène $2D \times 2D$	143
5.3.1	La méthode numérique.	143
5.3.2	Tests numériques.	150
5.3.3	Conclusion.	155
6	Existence de solutions pour Vlasov-Darwin.	163
6.1	Introduction.	163
6.2	Adimensionnement des équations de Vlasov-Darwin.	166
6.3	Estimations <i>a priori</i>	169
6.4	Étude d'un problème régularisé.	183
6.5	Preuve de la Proposition 6.4.	185
6.6	Étude de l'existence de solutions faibles.	194
6.7	Convergence de Vlasov-Darwin pour des petites vitesses.	196

Chapter 1

Introduction.

Un plasma est un gaz constitué de particules chargées, ionisées, et dont la densité satisfait simultanément deux critères. Elle doit être suffisamment élevée pour que les particules obéissent aux lois statistiques, mais assez faible pour que les interactions binaires soient négligeables comparées aux forces coulombiennes de longue portée. En fait, la caractéristique d'un plasma est la prépondérance des effets collectifs sur les interactions entre les particules.

Au-dessus d'une température de 100 000 K, la matière est dans un état ionisé. Pour cette raison, le plasma est parfois appelé le quatrième état de la matière. En effet, l'augmentation de la température provoque le passage de l'état solide à l'état liquide. De même, si la température d'un liquide est assez élevée, il se transforme en gaz. Enfin, si un gaz est porté à très haute température, les particules sont ionisées, et l'on obtient un plasma.

Pour autant, il est possible de générer un plasma sans recourir à l'augmentation de la température. Pour cela, il faut provoquer un mécanisme d'ionisation à une très faible densité. D'ailleurs, la plupart des plasmas fabriqués en laboratoires ou se situant dans la couche ionosphérique (au-dessus de l'atmosphère) suivent ce principe.

L'état de plasma dépend donc plutôt du ratio de la densité des particules sur la température. Ce n'est qu'en introduisant les échelles caractéristiques d'un plasma que nous constatons cette propriété. Tout d'abord, pour caractériser l'échelle du temps, nous introduisons la fréquence plasma : si un groupe d'électrons est brutalement déplacé, une force électrostatique de direction opposée au déplacement est créée de manière à rétablir la position d'équilibre. Ces particules oscillent autour de cette position. La fréquence plasma représente la fréquence de ces oscillations et est définie par

$$\omega_p = \left(\frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m_e} \right)^{1/2},$$

où n_0 représente la densité des électrons, q la charge, m_e la masse d'un électron et ε_0 la permittivité du vide.

Ensuite, l'échelle d'espace est caractérisée par la longueur de Debye λ_D , qui

définit le seuil au-dessus duquel l'individualité des particules disparaît, et l'ensemble des particules est perçu comme un nuage électronique. En termes de densité et de température la longueur de Debye s'exprime de la façon suivante

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_{\alpha} \frac{n_{0,\alpha} q_{\alpha}^2}{\varepsilon_0 k_B T_{\alpha}},$$

où α désigne l'espèce des particules, $n_{0,\alpha}$ la densité, T_{α} la température des particules α et k_B la constante de Boltzmann. La longueur de Debye fait clairement apparaître l'importance que joue le ratio de la densité sur la température dans la définition d'un plasma. Nous définissons ensuite la sphère de Debye, qui est la sphère de rayon λ_D et qui exprime la zone d'influence d'une particule. Ainsi, le nombre de particules contenu dans cette sphère $n_0 \lambda_D^3$ joue un rôle important en physique des plasmas. C'est pourquoi, nous introduisons le paramètre plasma g

$$g = \frac{1}{n_0 \lambda_D^3}.$$

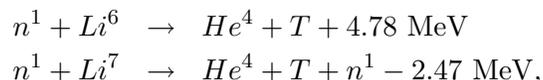
Étant donné que la fréquence de collisions entre les particules décroît avec la densité, ou lorsque la température croît, la condition “ g tend vers zéro” correspond à une décroissance de la fréquence de collisions. En effet, les forces coulombiennes exercées entre deux particules voisines, sont négligeables devant la force de Coulomb générée par l'ensemble des particules. Dans ce travail, nous nous sommes essentiellement intéressés aux plasmas “Vlasov”, c'est-à-dire pour lesquels le paramètre g est suffisamment petit pour négliger les collisions entre les particules.

Bien que les plasmas soient très peu présents sur la Terre dans leur état naturel, leurs applications sont de plus en plus diversifiées. Dans la vie de tous les jours, on trouve les plasmas dans les tubes à décharge électrique (tubes à néons), les arcs électriques... Les premiers travaux d'expériences concernant la physique des plasmas remontent aux années vingt par Langmuir, Tonks... Par exemple, les décharges électriques sont utilisées dans le traitement de matériaux et de surfaces. Les plasmas se retrouvent également dans les écrans plats. Cependant, l'application majeure de la physique des plasmas est la recherche sur la fusion thermonucléaire contrôlée qui a pour but d'obtenir une énergie propre et renouvelable utilisant la fusion à l'image de ce qui se produit dans une bombe à hydrogène ou dans le soleil.

Il existe deux moyens pour produire de l'énergie par réaction nucléaire. D'une part, la fission consiste à faire collisionner un atome d'Uranium 235 avec un neutron thermique, le noyau se brise alors en deux parties plus légères. Il est suivi de l'émission de deux ou trois neutrons qui libèrent de l'énergie et qui vont à leur tour réagir dans une réaction de fission en chaîne. Ce procédé est aujourd'hui largement exploité.

D'autre part, la fusion consiste en la formation d'un atome plus lourd à partir du contact entre deux atomes plus légers ayant vaincu la force de répulsion coulombienne. Il y a alors production d'énergie, selon la relation d'Einstein ($E = mc^2$), du fait de la différence de masse entre les réactifs et les sous-produits de la réaction de fusion.

La fusion du Deutérium avec le Tritium est la plus simple à réaliser, elle polarise donc les recherches. Le Deutérium (D) est non radioactif, c'est un atome d'hydrogène (H) qui s'est vu rajouter un neutron. Sur Terre une molécule d'eau sur 30 000 est de l'eau lourde c'est-à-dire qu'elle contient deux atomes de Deutérium. En fait, un mètre cube d'eau renferme 34 g de Deutérium qui sera équivalent, sur le plan énergétique (en termes de fusion), à 300 000 litres de pétrole. Quant au Tritium (T), d'une période radioactive de 12 ans, et donc relativement vite désintégré par rapport à de l'Uranium (U) utilisé dans la réaction de fission, il sera produit par surrégénération du Lithium (Li) représentant 0.004% de la croûte terrestre.



où He symbolise un atome d'Hélium et n^1 un neutron.

L'avantage économique majeur de la réaction de fusion est que ces éléments sont uniformément répartis sur Terre. La réaction de fusion considérée entraîne la formation d'Hélium non radioactif, ne pouvant être confiné dans l'atmosphère terrestre du fait de la vitesse de libération.



Les quantités de combustibles et de cendres produites par an et par réacteur seraient de quelques centaines de kilogrammes. De plus, de par les critères très stricts de la réaction de fusion il ne peut y avoir "emballement" comme c'est possible pour la réaction de fission qui nécessite un contrôle actif. Sans l'injection de combustible dans le réacteur, son fonctionnement ne serait que de quelques dizaines de secondes. De plus, la faible quantité de réactifs présents dans le réacteur (environ 10 grammes) limite l'importance de tout accident éventuel. Mais un réacteur à fusion devra supporter des contraintes neutroniques, thermiques, mécaniques très sévères de sorte que la réalisation industrielle d'un réacteur est un réel défi. Le réacteur sera alimenté en combustible (mélange Deutérium-Tritium). Ce mélange passera alors à l'état plasma, au sein duquel la réaction de fusion aura lieu. L'émission d'un neutron thermique, pouvant traverser la barrière magnétique, sera l'origine de la régénération du Tritium, par surrégénération du Lithium "stocké" dans la paroi. Ce Tritium sera alors mélangé avec le Deutérium et réintroduit dans la chambre. La production d'Hélium sera l'un des moyens de chauffage, de par la perte de l'énergie cinétique de ces noyaux sous forme de chaleur. L'Hélium, produit non radioactif, sera extrait du plasma. La chaleur produite sera transformée en électricité par l'intermédiaire d'un fluide caloporteur, selon des techniques bien développées dans l'exploitation de l'énergie de fission.

Pour que deux noyaux puissent fusionner, et donc fournir de l'énergie, il faut qu'ils parviennent à s'approcher à des distances très faibles pour lesquelles les forces nucléaires peuvent intervenir. Pour ce faire les noyaux doivent posséder une énergie cinétique suffisante pour vaincre la force de Coulomb, liée à la charge électrique des

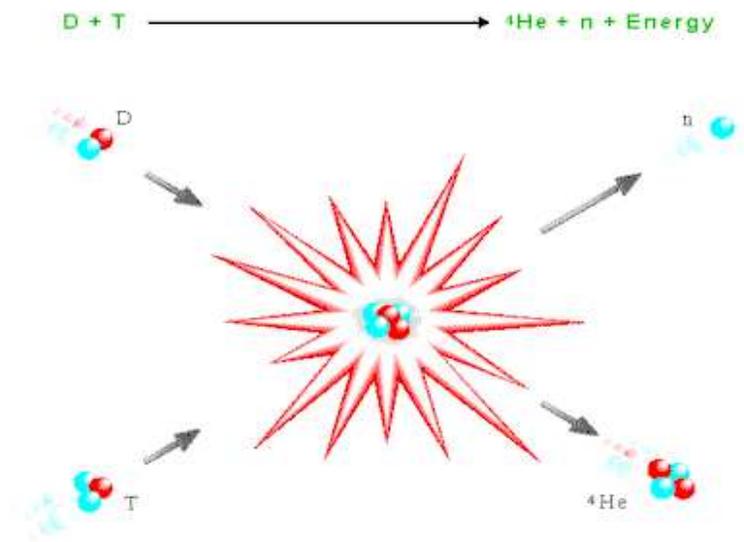


Figure 1.1: *Fusion d'un atome de Tritium et de Deutérium permettant de fournir de l'énergie.*

noyaux. Cette force de répulsion a une portée bien supérieure à celle des forces nucléaires. Cependant, il existe une distance (R_0) à partir de laquelle les forces attractives prennent le pas sur les forces répulsives. Pour les noyaux auxquels nous nous intéressons, cette distance est de l'ordre du diamètre nucléaire ($5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$).

Le processus de fusion exige de chauffer et maintenir le plasma à des régimes de température plus importants que dans le cœur du soleil. Ces contraintes dictent les recherches qui définiront le cœur des réacteurs car il faut maintenir le plasma dans des conditions favorables aux réactions et cela pendant un temps suffisamment long. Cette capacité à conserver la chaleur suffisamment longtemps est appelée confinement de l'énergie.

Alors que dans le soleil le confinement est gravitationnel, sur Terre deux voies de recherche se développent : la méthode du confinement inertiel et celle du confinement magnétique.

Le confinement inertiel est dû à la propre inertie des particules. C'est à l'intérieur d'une microcapsule de mélange réactif fortement comprimée par des lasers que la fusion se produit, d'abord au centre puis vers l'extérieur, par propagation, dans le combustible froid environnant. La réaction de fusion a lieu aussi longtemps que le combustible reste confiné par sa propre inertie.

Le confinement magnétique a été historiquement le premier et reste toujours prépondérant, même si la recherche sur le confinement inertiel a tendance à plus se développer. Pour le confinement magnétique, la pression magnétique équilibre la

pression cinétique et empêche théoriquement le contact avec les parois du fait de la création d'un véritable bouclier magnétique. De plus, dans un plasma, les particules se mouvant de façon désordonnée, l'ajout d'un champ magnétique fait qu'elles acquièrent un mouvement de giration hélicoïdale autour des lignes de champ formées dans le plasma.

Le confinement est limité par les collisions coulombiennes entre particules d'espèces différentes (électrons et ions par exemple) qui provoquent un phénomène de diffusion de ces particules à travers les surfaces magnétiques. Le plasma n'étant pas en équilibre thermodynamique, vu que la présence du champ magnétique n'apporte pas d'énergie potentielle, les collisions entre particules font évoluer le système vers l'équilibre, à n et T constant, détruisant ainsi le confinement. Le problème est que les collisions ne constituent pas le seul mécanisme qui contrôle cette évolution.

Un plasma confiné est le siège d'un grand nombre d'oscillations. La plupart d'entre elles sont stables mais certaines sont instables. La vitesse de propagation de ces dernières est telle qu'elles sont en résonance avec le mouvement d'un ensemble privilégié de particules dont elles tirent par effet Landau l'énergie nécessaire à leur amplification. Il en résulte des champs électriques turbulents qui jouent un rôle analogue à celui des collisions pour augmenter les coefficients de transport perpendiculaires. Il peut en résulter des instabilités et des pertes.

Enfin, il faut éviter la contamination du plasma par des impuretés, c'est-à-dire par les atomes qui se libèrent lorsque le plasma atteint une température extrêmement élevée et entre en contact avec la surface des matériaux constituant la chambre. Cette contamination est susceptible de refroidir le plasma et de réduire la probabilité de fusion en diluant les ions de Deutérium et de Tritium combustibles. De plus, il y aura perte par rayonnement électromagnétique. En effet, les impuretés sont des particules d'éléments "lourds" qui en traversant le plasma s'ionisent. Le problème responsable de ce rayonnement électromagnétique est que ces impuretés ne s'ionisent pas totalement et ainsi attirent les électrons. Pour les numéros atomiques élevés, l'ignition est empêchée à partir d'une concentration en impuretés de quelques pour cent. Pour les numéros atomiques faibles il y a seulement dilution. Son principe consiste à dévier des particules du plasma à l'aide de champs magnétiques vers des plaques cibles devant lesquelles le flux du plasma réduira les impuretés. De cela il résultera un plasma peu chaud et très dense qui protégera ces plaques de l'énergie incidente et réduira la production d'impuretés.

La compréhension de tous les phénomènes entrant en jeu nécessite une modélisation mathématique à la fois du transport, des collisions et des interactions des particules qui suivent les lois de la physique statistique. On représentera l'ensemble des particules d'une même espèce par une fonction de distribution $f(t, x, \xi)$ qui est positive, et dépend de sept variables, le temps t , la position x , et la vitesse v (ou l'impulsion ξ). Nous supposons que $f(t, \cdot, \cdot)$ appartient au moins à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, où d représente la dimension du problème. D'un point de vue physique $f(t, x, \xi) dx d\xi$ représente la probabilité de trouver des particules dans un élément de volume $dx d\xi$ au temps t , au point de l'espace des phases (x, ξ) . Le domaine physique, caractérisé

par la variable x , peut être un ouvert borné Ω . Il en va de même pour l'espace des vitesses (ou de l'impulsion ξ). Pour certains modèles, en utilisant la symétrie du domaine géométrique, la dimension des espaces x et ξ peut être différente. Par exemple, le problème $1D^{1/2}$ signifie que l'espace des phases est $(x, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Comme nous l'avons déjà vu, les particules sont soumises aux forces coulombiennes de longue portée générées par le mouvement de l'ensemble des particules. Ces forces sont assimilées à des champs moyens électromagnétiques, appelés champs auto-consistants. Ainsi, les équations du mouvement sont données soit par la loi de Newton dans le cas classique, soit par la relation d'Einstein dans le cas relativiste

$$\frac{dx}{dt} = v(\xi), \quad \frac{d\xi}{dt} = F(t, x, v(\xi)), \quad (1.-2)$$

où $F(t, x, v)$ représente le champ de force total et dans le cadre classique la valeur de la vitesse $v(\xi)$ est donnée par

$$v(\xi) = \xi/m,$$

tandis que dans le cadre relativiste

$$v(\xi) = \frac{\xi/m}{\sqrt{1 + |\xi|^2/m^2 c^2}}.$$

Ce système peut être reformulé à travers une équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction de distribution f , qui traduit la conservation du nombre de particules le long des trajectoires

$$0 = \frac{d}{dt} f(t, x(t), \xi(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} + v(\xi) \cdot \nabla_x f + F(t, x, v) \cdot \nabla_\xi f.$$

La fonction de distribution $f(t, x, \xi)$ qui décrit l'évolution statistique du système de particules, est constante le long des courbes caractéristiques $(x(t), \xi(t))$ données par (1.-2). Nous obtenons alors, l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(\xi) \cdot \nabla_x f + F(t, x, v) \cdot \nabla_\xi f = 0 \quad (1.-2)$$

avec une donnée initiale à $t=0$,

$$f(t=0, x, \xi) = f_0(x, \xi), \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \quad (1.-2)$$

Le champ de force $F(t, x, v)$ est la force de Lorentz donnée par

$$F(t, x, v) = \frac{q}{m} (E(t, x) + v \wedge B(t, x)), \quad (1.-2)$$

où $E(t, x)$, $B(t, x)$ désignent les champs moyens autoconsistants solutions des équations

de Maxwell

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \nabla \times B = -\frac{j}{\varepsilon_0}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \\ \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot B = 0, \end{cases} \quad (1.-1)$$

où c représente la vitesse de la lumière dans le vide, ε_0 la permittivité du vide, $\rho(t, x)$ et $j(t, x)$ sont les densités de charge et de courant calculées à partir de la fonction de distribution $f(t, x, \xi)$

$$\rho(t, x) = q \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, \xi) d\xi, \quad j(t, x) = q \int_{\mathbb{R}^d} v f(t, x, \xi) d\xi, \quad (1.-1)$$

où q est la charge d'une particule. Un modèle approché et souvent utilisé, est le système de Vlasov-Poisson, qui ne prend en compte que les effets électrostatiques ($B = 0$) et où (1.-1) est remplacé par

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ et } \nabla \times E = 0. \quad (1.-1)$$

Le problème de l'existence de solution du modèle de Vlasov-Poisson (VP) et Vlasov-Maxwell (VM) a fait l'objet de recherches actives ces dernières années. Nous rappelons ici les principaux résultats concernant les théorèmes d'existence de solutions des systèmes de Vlasov-Maxwell classique ou relativiste et Vlasov-Poisson classique.

Le premier résultat d'existence de solutions classiques pour Vlasov-Poisson est donné par S.V. Iordanskii [25]. S. Ukai et T. Okabe [30] montrent ensuite l'existence et l'unicité de solutions globales en temps pour le problème en dimension deux, et l'existence locale en temps en dimension trois. C. Bardos et P. Degond donnent un théorème d'existence de solutions pour (VP) en dimension trois pour des données initiales petites [4]. Le problème en dimension trois est complètement résolu par K. Pfaffelmoser [27]. Ce résultat a été simplifié et amélioré par différents auteurs [23, 24, 26, 29]. Cette approche consiste à considérer une solution dont la donnée initiale est à support compact et à contrôler l'accroissement du support au cours du temps. Soit

$$Q(t) = 1 + \sup \{ |v| : \exists (\tau, x) \in [0, t] \times \mathbb{R}^3, f(\tau, x, v) \neq 0 \}.$$

Dans [27], nous pouvons trouver le résultat suivant

Théorème 1. *Supposons que la donnée initiale f_0 soit une fonction positive à support compact appartenant à $C_c^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Alors, le problème de Vlasov-Poisson*

(1)-(1) sur tout l'espace $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ admet une unique solution f appartenant à $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et

$$Q(t) \leq C_p(1+t)^p, \quad p > 33/17$$

et le champ électrique autoconsistant E appartient à $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$ et est lipschitzien par rapport à x .

Notons que le taux de croissance du support de la fonction de distribution f a été amélioré dans [29], mais sa valeur optimale est toujours inconnue.

Lorsque la donnée initiale n'est pas à support compact, P.-L. Lions et B. Perthame [26] ont développé une autre approche qui consiste à rechercher des solutions fortes. L'équation de Vlasov n'est pas satisfaite au sens classique puisque la solution n'est pas suffisamment régulière, mais est vérifiée au sens des distributions. De plus, il est possible de définir les courbes caractéristiques presque partout. La démonstration est basée sur des estimations *a priori* sur le champ E et les moments d'ordre $m > 3$. Dans [26], les auteurs montrent le résultat suivant

Théorème 2. *Supposons que la donnée initiale f_0 soit une fonction positive appartenant à $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et*

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^m f_0 dx dv < +\infty, \quad m \geq m_0 > 3.$$

Alors, l'équation de Vlasov-Poisson (1)-(1) admet une solution forte f appartenant à l'espace $C(\mathbb{R}^+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ et vérifiant

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^m f(t, x, v) dx dv \leq C_T, \quad \forall T > 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv \in C(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^3)), \quad 1 \leq q < \frac{3+m_0}{3} \\ E(t, x) &\in C(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^3)), \quad 3/2 < q < 3 \frac{3+m_0}{6-m_0}. \end{aligned}$$

Enfin, sous des hypothèses minimales sur la donnée initiale

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f_0 dx dv < +\infty$$

et $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, ou bien $f_0 \log^+(f_0) \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, A.-A. Arsene'v [1], puis différents auteurs [5, 13] ont montré l'existence de solutions faibles. Dans ce cas, l'équation de Vlasov-Poisson est satisfaite au sens des distributions.

Théorème 3. Soit f_0 une fonction positive appartenant à $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et supposons que

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f_0 dx dv < +\infty.$$

Alors, il existe une solution faible à l'équation de Vlasov-Poisson (1)-(1) appartenant à l'espace $C(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) - w^*)$ vérifiant

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) dx dv + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E(t, x)|^2 dx \leq \mathcal{E}(0).$$

La démonstration est basée sur les estimations *a priori* naturelles de conservation des normes L^p pour $1 \leq p \leq +\infty$ et de l'énergie

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) \leq 0.$$

La régularité elliptique de l'équation de Poisson permet ensuite d'obtenir la convergence forte du champ électrique, ce qui donne un sens au produit $E(t, x) f(t, x, v)$.

R. Robert a montré l'unicité des solutions faibles en dimension trois lorsque celles-ci sont à support compact [28]. Nous mentionnons également les travaux de Majda et Zheng en dimension une, qui montrent l'existence de solutions lorsque la donnée initiale est une mesure.

Concernant le problème de l'existence et de l'unicité de solution classique globale pour le système de Vlasov-Maxwell, nous rappelons les travaux de R. Glassey et W. Strauss [19, 20] dans le cas relativiste, et de S. Wollman [31] pour le cas classique. Dans [19], les auteurs démontrent le théorème suivant

Théorème 4. Supposons que la donnée initiale f_0 soit une fonction positive à support compact appartenant à $C^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et les champs électromagnétiques $E_0(x)$, $B_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tels que

$$\nabla \cdot B_0 = 0, \quad \nabla \cdot E_0 = \rho_0/\varepsilon_0, \quad \rho_0 = q \int_{\mathbb{R}^3} f_0 dv.$$

En supposant une estimation *a priori* sur l'approximation ou la solution : il existe une fonction continue $\beta(t)$ telle que $f(t, x, v) = 0$, lorsque $|v| > \beta(t)$. Alors, le système de Vlasov-Maxwell (1)-(1.-1) admet une unique solution f appartenant à l'espace $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. De plus, $E(t)$, $B(t) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$.

D'autres travaux ont été poursuivis sur le système de Vlasov-Maxwell dans l'espace des phases $1D^{1/2}$ [21] et $2D^{1/2}$ [22] afin de contrôler le support de la fonction de distribution.

De leur côté, P. Degond [12] et K. Asano [2] démontrent l'existence locale en temps et

l'unicité d'une solution forte pour le système de Vlasov-Maxwell classique. Pour conclure sur les rappels de la théorie de l'équation de Vlasov non linéaire, nous énonçons le théorème de R. DiPerna et P.-L. Lions sur l'existence de solutions faibles pour Vlasov-Maxwell classique ou relativiste [14].

Théorème 5. *Soit f_0 une fonction positive appartenant à $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et vérifiant*

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0 |v|^2 dx dv + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E_0|^2 + |B_0|^2 dx < +\infty.$$

Alors, il existe une solution faible au système de Vlasov-Maxwell (1)-(1.-1) appartenant à l'espace $f \in C(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) - w^)$ et $E, B \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3) - w)$.*

Finalement, la plupart des problèmes théoriques sur l'existence de solutions pour l'équation de Vlasov non linéaire sont maintenant bien compris. Nous renvoyons au travail de synthèse [6] réalisé par F. Bouchut, F. Golse et M. Pulvirenti concernant la théorie de l'existence de solutions.

Quant à la discrétisation de l'équation de Vlasov, elle suscite beaucoup d'intérêt de la part des physiciens. En effet, les résultats numériques peuvent indiquer de nouveaux axes de recherches sur la modélisation et le comportement des solutions. Mais surtout la simulation numérique en physique des plasmas permet de compléter, de guider, et d'améliorer les tests expérimentaux souvent très coûteux dans ce domaine, par exemple, lors de la construction de lasers, de tokamaks, ou de réacteurs nucléaires.

La plupart du temps, l'approximation de l'équation de Vlasov est réalisée par des méthodes particulières [8, 10, 11]. Celles-ci sont particulièrement attractives pour les problèmes en dimensions élevées, comme c'est le cas pour l'équation de Vlasov. De plus, ce type de schémas permet d'obtenir des résultats satisfaisants avec relativement peu de "particules numériques". L'idée de ces méthodes consiste à tirer aléatoirement les positions et vitesses initiales suivant la densité de probabilité f , puis à résoudre les équations des trajectoires. Ainsi, la fonction de distribution $f(t, x, v)$ est approchée par une mesure discrète de la forme

$$f_N(t, x, v) = \sum_{i,j} \omega_i(t) \delta_{x_i(t)}(x) \otimes \delta_{v_i(t)}(v), \quad (1.-3)$$

avec

$$\delta_{x_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et les points $\omega_i(t)$ et $(x_i(t), v_i(t))$ sont solutions du système d'équations différentielles

correspondant à l'équation des courbes caractéristiques (1.-2) pour les N particules,

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = v_i(t), & i = 1, \dots, N \\ \frac{dv_i(t)}{dt} = F(t, x_i(t), v_i(t)), & i = 1, \dots, N \\ \omega_i(t) = \omega_i(0), & i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1.-3)$$

où $F(t, x_i(t), v_i(t))$ représente la force de Lorentz (1). Nous appelons $\omega_i(t)$ le poids de la particule i lequel est conservé au cours du temps pour l'équation de Vlasov et $(x_i(t), v_i(t))$ la position de la particule i dans l'espace des phases. L'intégration du système (1.-3) se fait le plus souvent par un schéma saute-mouton pour calculer la solution sur un pas de temps, par exemple nous mettons à jour la position et le poids au temps t^{n+1} à partir des valeurs au temps t^n par

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (v_i(t^{n+1}) - v_i(t^n)) = F(t^n, x_i(t^n), v_i(t^n)), \\ \frac{1}{\Delta t} (x_i(t^{n+1}) - x_i(t^n)) = v_i(t^{n+1}), \\ \omega_i(t^{n+1}) = \omega_i(t^n). \end{cases} \quad (1.-2)$$

Il est alors nécessaire de calculer la force de Lorentz $F(t^n, x_i(t^n), v_i(t^n))$ en discrétisant l'équation de Poisson ou le système de Maxwell sur un maillage de l'espace physique. Nous renvoyons, par exemple, le lecteur à la revue de F. Assous et P. Ciarlet [3] pour la discrétisation par la méthode des éléments finis pour les équations de Maxwell puis à Birdsall-Langdon pour la résolution des équations de Maxwell ou Poisson et le couplage avec Vlasov [8]. Finalement, les champs $E(t^n)$ et $B(t^n)$ sont calculés au point $x_i(t^n)$ par une formule d'interpolation.

Ces méthodes permettent d'utiliser un pas de temps relativement grand contrairement aux schémas eulériens qui discrétisent l'équation de Vlasov sur une grille de l'espace des phases (x, v) , ce qui implique une condition de stabilité du type CFL qui est très contraignante pour l'équation de Vlasov. De plus, ces méthodes sont intéressantes en dimension élevée puisque le stockage est de l'ordre de dN , où N représente le nombre total de particules et d la dimension du problème. Cependant, pour les problèmes dans l'espace des phases $2D$ ou $4D$, ces méthodes perdent de plus en plus de leur intérêt. En effet, les moyens de calculs actuels sont tels qu'il est possible d'utiliser un grand nombre de particules, mais le recours à des méthodes de Monte-Carlo introduit du bruit numérique et le taux de convergence de ces schémas est seulement de l'ordre de $O(1/\sqrt{N})$, où N est le nombre total de particules. Ainsi, les méthodes eulériennes ou semi-lagrangiennes d'ordre élevé sont de plus en plus attrayantes pour traiter ce type de problèmes à condition de faire appel aux techniques

de plus en plus développées du calcul scientifique et à des moyens de calculs importants.

Ce travail est essentiellement axé sur la mise au point de schémas numériques pour l'approximation de l'équation de Vlasov par des méthodes eulériennes ou semi-lagrangiennes, c'est-à-dire utilisant une grille de l'espace des phases (x, v) . L'une des difficultés est de s'affranchir de la condition *CFL* qui est très pénalisante pour l'équation de Vlasov

$$\Delta t \leq \Delta x / v_{max},$$

où Δt est le pas de temps, Δx la taille d'une maille de l'espace physique et v_{max} le rayon du support de l'espace des vitesses de la fonction de distribution $f(t, x, v)$. Il faut ensuite évaluer les erreurs numériques dues à la résolution de l'équation sur une grille et mettre au point des algorithmes rapides de manière à réduire le temps de calculs et être ainsi plus compétitif face aux méthodes particulières. Nous poursuivons notre étude à quelques problèmes de la physique des plasmas pour lesquels l'ordre élevé des méthodes eulériennes présente un avantage certain. Ce travail est organisé comme suit.

Chapitre 2 : Analyse d'un schéma volumes finis pour Vlasov-Poisson.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un problème classique en physique des plasmas : le système de Vlasov-Poisson avec des conditions aux limites périodiques. Nous présentons d'abord un schéma de volumes finis d'ordre un pour la discrétisation de l'équation de Vlasov en calculant le flux au bord de chaque cellule de l'espace des phases. Nous approchons ensuite le champ électrique en utilisant le noyau de Green correspondant à l'équation de Poisson. Nous démontrons ainsi le théorème de convergence du schéma volumes finis vers la solution faible de l'équation de Vlasov-Poisson [15, 16].

Nous posons $\Omega = [0, L]$, où L représente la période en x , $\Omega_T = [0, T] \times \Omega$ et de la même manière $Q = \Omega \times \mathbb{R}_v$, $Q_T = [0, T] \times Q$.

Théorème. Soit $f_0(x, v)$ une fonction positive, continue et telle que

$$\exists C > 0; \quad f_0(x, v) \leq C R(v) \text{ pour } (x, v) \in Q, \quad (1.-2)$$

où

$$R(v) = \frac{1}{(1 + |v|)^\lambda} \quad \text{avec } \lambda > 2.$$

Soit $(\mathcal{M}_h)_{h>0}$ une suite de maillages cartésiens de l'espace des phases et Δt le pas de temps vérifiant la condition de stabilité suivante,

$$\exists \xi \in]0, 1[; \quad \frac{\Delta t}{\Delta x_i \Delta v_j} (\Delta v_j |v_j| + \Delta x_i |E_i^n|) \leq 1 - \xi, \quad \forall i, j, n, \quad (1.-2)$$

où E_i^n est une approximation du champ électrique au temps t^n au point x_i . Nous considérons l'approximation numérique de la fonction de distribution donnée par le schéma volumes finis, notée par $f_h(t, x, v)$ et le champ électrique autoconsistant discret $E_h(t, x)$. Alors,

$$\begin{aligned} f_h(t, x, v) &\rightharpoonup f(t, x, v) \text{ dans } L^\infty(Q_T) \text{ faible} - \star, \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0, \\ E_h(t, x) &\rightarrow E(t, x) \text{ dans } C(\overline{\Omega}_T), \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où (f, E) désigne l'unique solution de l'équation de Vlasov-Poisson. De plus, si f_0 appartient à $BV(Q)$ et sous la condition de stabilité (plus restrictive que la précédente)

$$\exists \xi \in (0, 1); \quad \frac{\Delta t}{\alpha h} (|v_j| + |E_i^n|) \leq 1 - \xi, \quad \forall i, j, n. \quad (1.4)$$

Alors, la convergence devient forte,

$$f_h \rightarrow f \text{ fortement dans } C^0([0, T]; L_{loc}^1(Q)).$$

La démonstration consiste d'abord à établir des estimations sur la fonction de distribution f_h , sur le champ électrique discret ainsi que sur ses dérivées de manière à montrer la convergence forte de E_h . Ceci nous permettra de traiter le terme non linéaire $E_h f_h$. La convergence vers la solution de l'équation de Vlasov s'obtient ensuite à partir d'une estimation BV faible. Nous montrons également que si la donnée initiale est bornée dans l'espace des variations bornées BV , alors la fonction de distribution $f_h(t)$ reste bornée dans cet espace. Cette dernière estimation est utile pour montrer la convergence forte de la fonction de distribution.

Nous montrons ensuite le théorème suivant qui donne une estimation d'erreurs sur l'approximation numérique. Pour cette démonstration nous supposons que la solution de l'équation de Vlasov est à support compact.

Théorème. Soit $f_0(x, v)$ appartenant à $W_c^{1, \infty}(Q)$. Soit $(\mathcal{M}_h)_{h>0}$ une suite de maillages de l'espace des phases et Δt le pas de temps satisfaisant la condition de stabilité (1) : il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{\Delta t}{\Delta x_i \Delta v_j} (\Delta v_j |v_j| + \Delta x_i |E_i^n|) \leq 1 - \xi, \quad \forall i, j, n.$$

Nous considérons l'approximation numérique obtenue à partir du schéma volumes finis, puis notons $f_h(t, x, v)$ la fonction de distribution discrète, $E_h(t, x)$ le champ électrique discret. Alors,

$$\int_{Q_T} e^{-\alpha t} |f(t, x, v) - f_h(t, x, v)|^2 dt dx dv \leq C_{1,T} (h^{1/2} + \Delta t^{1/2}) + C_1 \|f_0 - f_h(0)\|_{L^2}.$$

Chapitre 3 : Quelques schémas conservatifs pour l'équation de Vlasov.

Nous revoyons d'abord quelques méthodes eulériennes et semi-lagrangiennes pour la résolution d'une équation de transport et plus particulièrement l'équation de Vlasov couplée avec l'équation de Poisson. La plupart de ces méthodes ne donnent pas de bonnes propriétés sur la fonction de distribution discrète, comme la préservation de la positivité, la conservation du nombre total de particules, des normes L^P et de l'énergie. L'objectif de ce chapitre est de proposer de nouveaux schémas numériques, les méthodes PFC (Positive and Flux Conservative), permettant d'obtenir une approximation précise de la fonction de distribution dans l'espace des phases, la conservation de la masse globale (nous parlerons plutôt de conservation du nombre de particules) et la préservation de la positivité. De plus, la méthode de reconstruction est locale [17].

Proposition. *L'approximation numérique définie par le schéma PFC satisfait*

- *la conservation locale de la masse : pour tout $i \in I$, $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f_h(x) dx = \Delta x f_i$.*
- *le principe du maximum : pour tout $x \in [x_{min}, x_{max}]$, $0 \leq f_h(x) \leq f_\infty$.*

De plus, si nous supposons que la variation totale de la fonction de distribution $f(x)$ est bornée, alors l'estimation globale suivante a lieu

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} |f_h(x) - \bar{f}_h(x)| dx \leq \Delta x \sum_i (1 - \epsilon_i) |f_{i+1} - f_i| \leq TV(f) \Delta x,$$

où \bar{f}_h est une approximation d'ordre trois de la fonction de distribution et ϵ_i est un correcteur de pente assurant la conservation de la positivité.

Ensuite, nous présentons différents types d'interpolations locales pour la méthode semi-lagrangienne. Ces méthodes doivent donner une description aussi précise que la reconstruction par spline cubique tout en conservant l'aspect local de l'interpolation.

Enfin, nous introduisons un nouveau schéma aux différences finies issu de la dynamique des fluides (équation d'Euler incompressible en dimension deux) qui conserve quelques invariants de l'équation de Vlasov (masse, impulsion, énergie, norme L^2). Nous le stabilisons par l'ajout d'un terme de collisions.

Chapitre 4 : L'équation de Vlasov axisymétrique.

Ce chapitre est consacré à l'étude numérique de l'équation de Vlasov axisymétrique. Nous supposons que la fonction de distribution initiale est invariante par rotation. Ainsi, la solution de l'équation de Vlasov reste invariante par rotation et vérifie l'équation en coordonnées cylindriques

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{q}{m} E_s(t, r) + \frac{q}{m} E_a(t, r) + \frac{v_\theta^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_\theta v_r}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\theta} = 0, \quad (1.5)$$

où le champ $E_s(t, r)$ est donné par l'équation de Poisson et $E_a(t, r)$ représente le champ appliqué que l'on supposera la plupart du temps linéaire.

L'objectif est de développer un code en coordonnées cylindriques pour traiter les faisceaux de particules et construire des solutions de références pour la mise au point des codes cartésiens dans l'espace des phases complet. Ce travail a été réalisé en partenariat avec le Département de Physique Théorique et Appliquée (DPTA) du Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA).

Dans une première partie, nous donnons une nouvelle formulation de l'équation de Vlasov en coordonnées cylindriques par la recherche d'invariants supplémentaires. Ceci permettra l'implantation directe des calculs parallèles. Nous présentons ensuite la construction de solutions stationnaires pour le système de Vlasov-Poisson avec champ appliqué, comme les fonctions de distributions K-V ou de Maxwell-Boltzmann. La fonction de distribution K-V servira de base pour la focalisation de faisceaux quelconques. Après un bref rappel de la méthode numérique employée, nous donnons différents résultats numériques nouveaux dans ce domaine.

Chapitre 5 : Approximation de l'équation de Landau.

Dans ce chapitre, nous traitons le cas d'un plasma collisionnel modélisé par l'équation de Landau. Il décrit donc les collisions binaires entre des particules chargées avec des interactions longue portée,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f), \quad (1-4)$$

où $Q(f, f)$ est l'opérateur de collisions :

$$Q(f, f) = \nabla_v \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(v - v^*) \left[(\nabla_v f(t, v)) f(t, v^*) - (\nabla_{v^*} f(t, v^*)) f(t, v) \right] dv^*, \quad (1-3)$$

avec

$$\Phi(v) = |v|^{\gamma+2} S(v), \quad \text{et} \quad S(v) = Id - \frac{v \otimes v}{|v|^2}, \quad (1-3)$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$, mais le cas le plus intéressant d'un point de vue mathématique et physique est $\gamma = -3$, lequel modélise les interactions coulombiennes.

Dans un premier temps nous présentons plusieurs schémas pour approcher l'équation de Landau par des méthodes déterministes [9].

D'autre part, il n'existe pas de résultats numériques dans l'espace des phases complet, c'est-à-dire lorsque la fonction de distribution dépend de la variable d'espace et de vitesse (x, v) . Pourtant, le couplage avec la partie transport est nécessaire pour traiter des problèmes appliqués à la physique des plasmas ou à la dynamique des gaz. De plus, l'ajout de la partie transport peut engendrer des oscillations ou des discontinuités dans l'espace des vitesses et le traitement de l'opérateur de collisions par ces algorithmes rapides pourrait entraîner des problèmes de précision. L'objectif de ce chapitre est de donner un algorithme efficace basé sur la décomposition des opérateurs de collisions

et transports pour traiter l'équation de Landau non homogène. L'équation de transport sera résolue en utilisant le schéma PFC d'ordre trois permettant de conserver la masse, l'impulsion, l'énergie et la positivité [18].

Chapitre 6 : Existence de solutions pour Vlasov-Darwin relativiste.

Dans un premier temps, nous précisons l'adimensionnement du système de Vlasov-Darwin en vue du résultat de convergence de Vlasov-Darwin vers Vlasov-Poisson lorsque la vitesse caractéristique des particules est négligeable devant la vitesse de la lumière. Nous montrons ensuite un résultat d'existence de solutions faibles [7]. Nous introduisons un petit paramètre ε qui désigne le ratio de la vitesse caractéristique des particules sur la vitesse de la lumière.

Théorème. *Soit f_0 une fonction positive, appartenant à $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_\xi^3)$ et vérifiant*

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\gamma(\xi) - 1}{\varepsilon^2} f_0 dx d\xi < +\infty,$$

avec $\gamma(\xi) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\xi|^2}$. De plus, nous posons

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_2 + \varepsilon \mathcal{A}_1^{2/3} \mathcal{A}_2^{1/3},$$

où \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont donnés par

$$\mathcal{A}_1 = \|f_0\|_{L^1} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2 = \sqrt{2} \|f_0\|_{L^\infty}^{1/2} (\|f_0\|_{L^1} + \varepsilon^2 \mathcal{E}(0))^{1/2},$$

avec

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\gamma(\xi) - 1}{\varepsilon^2} f dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E_L(t)|^2 + |B(t)|^2 dx.$$

Supposons qu'il existe une constante $\sigma > 0$, indépendante de f_0 , $E_L(0)$ et $B(0)$, telle que

$$\sigma \varepsilon^{1/2} \mathcal{A}_0 < 1,$$

Alors, le système de Vlasov-Darwin (6.-7)-(6.-6) admet une solution faible.

La démonstration est basée sur des estimations *a priori* naturelles sur le champ longitudinal E_L et le champ magnétique B dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}_t^+, L^2(\mathbb{R}_x^3))$, puis sur les moments de f . Cependant, les estimations *a priori* habituelles ne donnent pas de bornes sur la composante transverse du champ électrique E_T . De plus, E_T est solution de l'équation

$$-\Delta E_T = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 E_L}{\partial t^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial j}{\partial t},$$

où très peu d'information est disponible sur le terme source $\frac{\partial j}{\partial t}$, que l'on calcule à partir de l'équation de Vlasov.

Ainsi, par une méthode de dualité nous établissons l'existence d'une borne sur le champ électrique transverse E_T dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3_x)$ sous une condition de petitesse sur l'énergie et la taille de la donnée initiale. Puis, nous présentons l'étude d'un problème régularisé et le passage à la limite qui permet de conclure à l'existence de solutions faibles pour Vlasov-Darwin. Dans la dernière partie, nous montrons que lorsque le ratio de la vitesse des particules sur la vitesse de la lumière tend vers zéro, la solution du système de Vlasov-Darwin converge vers la solution du modèle simplifié de Vlasov-Poisson.

Théorème. *Soit f_0 une fonction positive qui vérifie les hypothèses du théorème précédent. Nous supposons de plus, qu'il existe $C_0 > 0$, telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0 |\xi|^2 dx d\xi + \int_{\mathbb{R}^3} |E_L(0)|^2 + |B(0)|^2 dx < C_0.$$

Alors, le système de Vlasov-Darwin relativiste admet une solution faible qui converge vers la solution faible du système de Vlasov-Poisson non relativiste, lorsque ε tend vers zéro. De plus, pour ε suffisamment petit, la condition de petitesse sur f_0 disparaît.

Bibliography

- [1] A.A. Arsen'ev, Global Existence of a Weak solution of Vlasov's System of Equation. *Zh. vychisl. Mat. i. Mat. Fiz.* **15** (1975), 136–147.
- [2] K. Asano, On local solutions of the initial value problem for the Vlasov-Maxwell equation. *Comm. Math. Phys.* **106** (1986), 551–568.
- [3] F. Assous et P. Ciarlet, Modèles et méthodes pour les équations de Maxwell. *Rapport de recherche 347 ENSTA* (2001).
- [4] C. Bardos et P. Degond, Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 space variables with small initial data. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire* **2** (1985), 101–118.
- [5] F. Bouchut, Global weak solution of the Vlasov-Poisson system for small electrons mass. *Comm. Partial Diff. Equations* **16** (1991), 1337–1365.
- [6] F. Bouchut, F. Golse et M. Pulvirenti, Kinetic equations and asymptotic theory. *Gauthier-Villars, series in Applied Mathematics* (2000).
- [7] S. Benachour, F. Filbet, Ph. Laurençot et E. Sonnendrücker, Global existence for Vlasov-Darwin system in \mathbb{R}^3 for small initial data. *En préparation*.
- [8] C.K. Birdsall et A.B. Langdon, Plasma Physics via Computer Simulation. *Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia*. (1991).
- [9] C. Buet, S. Cordier et F. Filbet, Comparison of numerical schemes for Fokker-Planck-Landau equation. *ESAIM Proceedings* **10** (2001) 161–181.
- [10] G.-H. Cottet et P.-A. Raviart, Particle Methods for the One Dimensional Vlasov-Poisson Equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **21** (1984), 52–76.
- [11] G.-H. Cottet et P. Koumoutsakos, Vortex Methods - Theory and Practice. *Cambridge - University press* (2000).
- [12] P. Degond, Local existence of solutions of the Vlasov-Maxwell equations and convergence to the Vlasov-Poisson equations for infinite light velocity. *Math. Methods Appl. Sci.* **8** (1986), 533–558.
- [13] R.J. DiPerna et P.-L. Lions, Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307** (1988), 306–329.
- [14] R.J. DiPerna et P.-L. Lions, Global existence of weak solution for the Vlasov-Maxwell system. *Comm. Pure. Applied Math.* **42** (1989), 729–757.

- [15] F. Filbet, Convergence d'un schéma de type volumes finis pour la résolution numérique du système de Vlasov-Poisson en dimension un. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), 979–984.
- [16] F. Filbet, Convergence of a finite volume scheme for the one dimensional Vlasov-Poisson system. *SIAM J. Num. Anal.* **39** (2001), 1146–1169.
- [17] F. Filbet, E. Sonnendrücker et P. Bertrand, Conservative numerical schemes for the Vlasov equation. *Accepté pour publication dans J. Comp. Phys.*
- [18] F. Filbet et L. Pareschi, A numerical method for the accurate solution of the fokker-Planck-Landau equation in the non homogeneous case. *Soumis à J. Comp. Phys.*
- [19] R. Glassey et W. Strauss, Singularity formation in a collisionless plasma could occur only at high velocities. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **92** (1986), 59–90.
- [20] R. Glassey et W. Strauss, Large velocities in the relativistic Vlasov-Maxwell equations. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **36** (1989), 615–627.
- [21] R. Glassey et J. Schaeffer, On the “one and one-half dimensional” relativistic Vlasov-Maxwell system. *Math. Methods Appl. Sci.* **13** (1990), 169–179.
- [22] R. Glassey et J. Schaeffer, The “Two and one-half dimensional” relativistic Vlasov Maxwell system. *Comm. Math. Phys.* **185** (1997), 257–284.
- [23] E. Horst, On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation. *Math. Methods Appl. Sci.* **3** (1981), 229–248.
- [24] E. Horst, On the asymptotic growth of the solutions of the Vlasov-Poisson system. *Math. Methods Appl. Sci.* **16** (1993), 75–85.
- [25] S.V. Iordanskii, The Cauchy Problem for the Kinetic Equation of Plasma. *Amer. Math. Soc. Transl* **35** (1964), 351–363.
- [26] P.-L. Lions et B. Perthame, Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system. *Invent. Math.* **105** (1991), 415–430.
- [27] K. Pfaffelmoser, Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data. *J. Differ. Equations* **95** (1992), 281–303.
- [28] R. Robert, Unicité de la solution faible à support compact de l'équation de Vlasov-Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** (1997), 873–877.
- [29] J. Schaeffer, Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions. *Comm. Partial Differential Equations* **16** (1991), 1313–1335.
- [30] S. Ukai et T. Okabe, On classical solutions in the large in time of two-dimensional Vlasov's equation. *J. Osaka J. Math* **15** (1978), 245–261.
- [31] S. Wollman, Local existence and uniqueness theory of the Vlasov-Maxwell system. *J. Math. Anal. Appl.* **127** (1987), 103–121.

Chapter 2

Analyse d'un schéma volumes finis pour Vlasov-Poisson.

2.1 Introduction.

Le système de Vlasov-Poisson modélise un plasma non collisionnel composé de particules chargées. Il décrit l'évolution de la fonction de distribution (solution de l'équation de Vlasov) sous l'effet du transport libre et des champs autoconsistants (donnés par l'équation de Poisson). Nous nous intéressons ici aux méthodes numériques pour la discrétisation du système de Vlasov-Poisson dans l'espace des phases (x, v) . La plupart des méthodes considérées utilisent les courbes caractéristiques données par l'équation de Vlasov, comme par exemple les méthodes PIC (Particle In Cell) ou les méthodes semi-lagrangiennes. Une autre approche possible est d'utiliser les méthodes volumes finis, qui sont connues pour leur robustesse et leur coût de calcul abordable pour la discrétisation des lois de conservation (voir R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin [9] et les références correspondantes). Des schémas volumes finis ont déjà été implantés pour l'approximation numérique des équations de Vlasov-Poisson [3, 12, 15] ou de Vlasov-Maxwell [8]. Dans ce chapitre, nous étudions la convergence d'un schéma volumes finis pour un problème simplifié de la physique des plasmas, c'est-à-dire le système de Vlasov-Poisson en dimension une avec des conditions aux limites périodiques en la variable d'espace x .

Avant de décrire précisément le problème considéré, nous mentionnons quelques travaux où le problème de la convergence d'un schéma numérique pour le système de Vlasov-Poisson est étudié. P.-A. Raviart et G.-H. Cottet ont présenté une analyse mathématique d'une méthode particulière pour la résolution du système de Vlasov-Poisson en dimension une [5]. S. Wollman a poursuivi cette étude pour le problème en dimension une [19], puis en dimension trois [20]. D'autre part, J. Schaeffer a prouvé la convergence d'un schéma différences finies pour le système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck [13], mais la partie transport est discrétisée par une méthode semi-lagrangienne et la donnée initiale est supposée être trois fois différentiable. En fait, d'après nos

connaissances, il n'existe pas de résultat de convergence pour la discrétisation de l'équation de Vlasov par un schéma eulérien.

Nous rappelons maintenant le système de Vlasov-Poisson : soit $\Omega =]0, L[$ et $\Omega_T = [0, T[\times]0, L[$. Nous notons par $f(t, x, v)$ la fonction de distribution des électrons dans l'espace des phases (avec la masse normalisée à un et la charge d'un électron à plus un) et par $E(t, x)$ le champ électrique autoconsistant. Le système de Vlasov-Poisson s'écrit alors de la façon suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + E(t, x) \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (t, x, v) \in [0, T[\times]0, L[\times \mathbb{R}, \quad (2.0)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv - 1, \quad (t, x) \in [0, T[\times]0, L[, \quad (2.0)$$

avec une donnée initiale positive

$$f(0, x, v) = f_0(x, v), \quad (x, v) \in]0, L[\times \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Nous imposons des conditions aux limites périodiques en x :

$$f(t, 0, v) = f(t, L, v) \quad (t, v) \in [0, T[\times \mathbb{R} \quad (2.2)$$

et une condition de compatibilité signifiant la "neutralité globale" du plasma

$$\frac{1}{L} \int_0^L \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv dx = 1 \quad t \in [0, T[. \quad (2.3)$$

Pour déterminer de façon unique le champ électrique $E(t, x)$, nous ajoutons une condition de moyenne nulle

$$\int_0^L E(t, x) dx = 0 \quad t \in [0, T[, \quad (2.4)$$

ce qui revient à supposer que le potentiel électrique est périodique.

Nous présentons d'abord un schéma de type volumes finis pour la discrétisation de l'équation de Vlasov en calculant le flux au bord de chaque cellule de l'espace des phases et approchons le champ électrique en utilisant le noyau de Green correspondant à l'équation de Poisson. Nous donnons ensuite quelques estimations *a priori* sur f et E , puis une estimation *BV* faible. Ceci permettra de prouver la convergence vers la solution faible du système de Vlasov-Poisson lorsque la discrétisation de l'espace des phases devient de plus en plus fine. Enfin, nous proposons des estimations d'erreurs lorsque la solution est supposée plus régulière.

2.2 Régularité et discrétisation de l'équation de Vlasov-Poisson.

Nous avons à notre disposition une littérature importante concernant l'existence de solution de l'équation de Vlasov-Poisson. Nous considérons ici le résultat obtenu par

J. Cooper et A. Klimas [6] qui prouvent l'existence globale et l'unicité d'une solution continue $f(t, x, v)$, avec un champ électrique $E(t, x)$ ayant sa dérivée en espace $\frac{\partial E}{\partial x}$ bornée, si la donnée initiale $f_0(x, v)$ est continue et possède son premier moment borné. En d'autres termes, il existe une fonction positive $R(v)$ vérifiant la propriété de décroissance à l'infini

$$f_0(x, v) \leq C R(v) \text{ et } \int_0^L \int_{\mathbb{R}} |v| R(v) dv dx < +\infty.$$

Dans ce chapitre, nous supposons que la donnée initiale est continue et appartient à $L^\infty(Q) \cap L^1(Q)$, où $Q =]0, L[\times \mathbb{R}$ et $Q_T = [0, T[\times Q$. Puis, pour simplifier, nous choisissons

$$R(v) = \frac{1}{(1 + |v|)^\lambda}, \quad \text{avec } \lambda > 2.$$

Ainsi, en appliquant le résultat de Cooper et Klimas, le système (2.1)-(2.4) possède une unique solution : le couple de fonctions (f, E) vérifie $f(t, x, v) \in C^0(Q_T)$, $E(t, x) \in W^{1,\infty}(\Omega_T)$ et pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(Q_T)$, périodique en x et à support compact en (t, v) , nous avons

$$\int_{Q_T} f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dx dv dt + \int_Q f_0 \varphi(0, x, v) dx dv = 0,$$

où le champ électrique $E(t, x)$ est donné par l'équation de Poisson

$$\frac{\partial E}{\partial x}(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv - 1.$$

Dans le but de calculer une approximation de l'équation de Vlasov-Poisson par un schéma volumes finis, nous définissons \mathcal{M}_h un maillage cartésien de l'espace des phases. \mathcal{M}_h sera constitué de cellules, notées $C_{i,j}$, $i \in I = \{0, \dots, n_x - 1\}$ où n_x désigne le nombre d'intervalles de discrétisation de $[0, L]$ et $j \in \mathbb{Z}$.

\mathcal{M}_h est donné par deux suites strictement croissantes $(x_{i-1/2})_{i \in \{0, \dots, n_x\}}$ de l'intervalle $[0, L]$ et $(v_{j-1/2})_{j \in \mathbb{Z}}$ de \mathbb{R} .

Nous désignons par $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ le pas de l'espace physique et par $\Delta v_j = v_{j+1/2} - v_{j-1/2}$ le pas de l'espace des vitesses. Enfin le paramètre h indique l'ordre de grandeur de la grille

$$h = \max_{i,j} \{\Delta x_i, \Delta v_j\}.$$

Nous supposons que le maillage est admissible, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel que

$$\forall h > 0, \forall (i, j) \in I \times \mathbb{Z}, \quad \alpha h \leq \Delta x_i \leq h \quad \text{et} \quad \alpha h \leq \Delta v_j \leq h. \quad (2.2)$$

Finalement, nous obtenons un maillage cartésien composé de volumes de contrôle

$$C_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[\times [v_{j-1/2}, v_{j+1/2}[, \quad \text{pour } i \in I \text{ et } j \in \mathbb{Z}.$$

Nous appelons Δt le pas de temps et $t^n = n \Delta t$.

La donnée initiale est projetée sur le maillage par

$$f_{i,j}^0 = \frac{1}{|C_{i,j}|} \int_{C_{i,j}} f_0(x,v) dx dv \text{ ou bien } f_{i,j}^0 = f_0(x_i, v_j),$$

où x_i et v_j représentent les centres des intervalles de discrétisation $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ et $[v_{j-1/2}, v_{j+1/2}]$.

La méthode volumes finis consiste à intégrer l'équation de Vlasov sur chaque volume de contrôle. Ensuite en appliquant le théorème de Gauss, nous approchons les flux sur les bords de la cellule. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|C_{i,j}|} \int_{C_{i,j}} f(t^{n+1}, x, v) dx dv &= \frac{1}{|C_{i,j}|} \int_{C_{i,j}} f(t^n, x, v) dx dv \\ &- \frac{1}{|C_{i,j}|} (\phi_{i+1/2,j}^n - \phi_{i-1/2,j}^n + \psi_{i,j+1/2}^n - \psi_{i,j-1/2}^n), \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $\phi_{i+1/2,j}^n$ et $\psi_{i,j+1/2}^n$ représentent les flux correspondant au volume de contrôle $C_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \phi_{i+1/2,j}^n &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} v f(t, x_{i+1/2}, v) dv dt, \\ \psi_{i,j+1/2}^n &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} E(t, x) f(t, x, v_{j+1/2}) dx dt. \end{aligned}$$

Ces flux $\phi_{i+1/2,j}^n$ et $\psi_{i,j+1/2}^n$ sont discrétisés par $\bar{\phi}_{i+1/2,j}^n$ et $\bar{\psi}_{i,j+1/2}^n$ en utilisant une formule de quadrature, par exemple à l'aide d'un schéma décentré amont, nous obtenons

$$\bar{\phi}_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} \Delta t \Delta v_j v_j f_{i,j}^n & \text{si } v_j \geq 0 \\ \Delta t \Delta v_j v_j f_{i+1,j}^n & \text{si } v_j < 0 \end{cases}$$

et

$$\bar{\psi}_{i,j+1/2}^n = \begin{cases} \Delta t \Delta x_i E_i^n f_{i,j}^n & \text{si } E_i^n \geq 0 \\ \Delta t \Delta x_i E_i^n f_{i,j+1}^n & \text{si } E_i^n < 0, \end{cases}$$

où E_i^n est une approximation du champ électrique sur l'intervalle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ définie plus loin en approchant la solution de l'équation de Poisson. La valeur $f_{i,j}^n$ représente une approximation de la moyenne de la solution de l'équation de Vlasov sur le volume de contrôle $C_{i,j}$ au temps t^n .

Ainsi, nous établissons la version discrète de la conservation des flux (2.3) :

$$f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^n - \frac{1}{|C_{i,j}|} (\bar{\phi}_{i+1/2,j}^n - \bar{\phi}_{i-1/2,j}^n + \bar{\psi}_{i,j+1/2}^n - \bar{\psi}_{i,j-1/2}^n). \quad (2.2)$$

Pour compléter le schéma, nous imposons des conditions aux limites périodiques en la variable x , les valeurs $f_{-1,j}^n$ et $f_{n_x,j}^n$ représentent une approximation de la fonction de distribution sur des cellules imaginaires qui prolongent l'intervalle $[0, L]$

$$\begin{aligned} f_{n_x,j}^n &= f_{0,j}^n & \text{si } v_j \geq 0, \\ f_{-1,j}^n &= f_{n_x-1,j}^n & \text{si } v_j < 0. \end{aligned}$$

Pour travailler dans un domaine borné en vitesse, la fonction de distribution f_h est tronquée lorsque $|v| > v_h$, où v_h est un réel positif suffisamment grand, qui tend vers l'infini lorsque h tend vers zéro. Nous définissons alors $J = \{j \in \mathbb{Z}; |v_{j+1/2}| \leq v_h\}$ et imposons

$$\bar{\psi}_{i,j+1/2}^n = 0 \quad \forall (i,j) \in I \times \mathbb{Z} \setminus J.$$

Ainsi, nous construisons une approximation de la fonction de distribution dans le domaine $Q_T = \Omega_T \times \mathbb{R}$ donnée par

$$f_h(t, x, v) = \begin{cases} f_{i,j}^n & \text{lorsque } (t, x, v) \in [t^n, t^{n+1}] \times C_{i,j} \text{ et } (i, j) \in I \times J. \\ 0 & \text{lorsque } |v| > v_h. \end{cases}$$

Nous calculons ensuite une première approximation de la densité de charge $\rho_h(t, x)$ et de courant $j_h(t, x)$ en intégrant la fonction de distribution en v , pour $(t, x) \in [t^n, t^{n+1}] \times [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$

$$\rho_h(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f_h(t, x, v) dv = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta v_j f_{i,j}^n = \rho_i^n, \quad (2.-5)$$

$$j_h(t, x) = \int_{\mathbb{R}} v f_h(t, x, v) dv = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta v_j v_j f_{i,j}^n = j_i^n. \quad (2.-4)$$

Pour construire une approximation du champ électrique qui soit continue en temps, nous posons

$$\bar{\rho}_h(t, x) = \left(1 - \frac{t - t^n}{\Delta t}\right) \rho_h(t^n, x) + \frac{t - t^n}{\Delta t} \rho_h(t^{n+1}, x).$$

Nous pouvons maintenant résoudre explicitement l'équation de Poisson en utilisant le noyau de Green associé

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{L} - 1 & \text{si } x \leq y \leq L, \\ \frac{y}{L} & \text{si } 0 \leq y \leq x. \end{cases}$$

Le champ électrique discret E_h est alors continu en (t, x) et linéaire par morceaux par rapport aux variables t et x ,

$$E_h(t, x) = \int_0^L K(x, y) (\bar{\rho}_h(t, y) - 1) dy. \quad (2.-5)$$

Finalemment sur l'intervalle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, le champ électrique est approché en utilisant la formule des rectangles

$$\begin{aligned} E_i^n &= E_h(t^n, x_i) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} E_h(t^n, x) dx, \\ &= \int_0^L K(x_i, y) (\rho_h(t^n, y) - 1) dy. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème de convergence de l'approximation définie par le schéma volumes finis vers la solution de l'équation de Vlasov-Poisson.

Théorème 2.1 *Soit $f_0(x, v)$ une fonction positive, continue et telle que*

$$\exists C > 0; \quad f_0(x, v) \leq C R(v) \text{ pour } (x, v) \in Q, \quad (2.5)$$

où

$$R(v) = \frac{1}{(1 + |v|)^\lambda} \quad \text{avec } \lambda > 2.$$

Soit $(\mathcal{M}_h)_{h>0}$ une suite de maillages cartésiens de l'espace des phases et Δt le pas de temps vérifiant la condition de stabilité suivante,

$$\exists \xi \in]0, 1[; \quad \frac{\Delta t}{\Delta x_i \Delta v_j} (\Delta v_j |v_j| + \Delta x_i |E_i^n|) \leq 1 - \xi, \quad \forall (i, j) \in I \times J, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Nous considérons l'approximation numérique de la fonction de distribution $f_h(t, x, v)$ donnée par le schéma volumes finis (2.2) et le champ électrique autoconsistant discret $E_h(t, x)$ donné par (2.2). Alors,

$$\begin{aligned} f_h(t, x, v) &\rightharpoonup f(t, x, v) \text{ dans } L^\infty(Q_T) \text{ faible-} \star, \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0, \\ E_h(t, x) &\rightarrow E(t, x) \text{ dans } C(\overline{\Omega}_T), \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où (f, E) désigne l'unique solution de l'équation de Vlasov-Poisson (2.1)-(2.4).

De plus, si f_0 appartient à $BV(Q)$ et sous la condition de stabilité (plus restrictive que la précédente)

$$\exists \xi \in]0, 1[; \quad \frac{\Delta t}{\alpha h} (|v_j| + |E_i^n|) \leq 1 - \xi, \quad \forall (i, j) \in I \times J, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Alors, la convergence devient forte,

$$f_h \rightarrow f \text{ fortement dans } C^0([0, T]; L^1_{loc}(Q)).$$

La démonstration consiste d'abord à établir des estimations sur la fonction de distribution f_h , sur le champ électrique discret ainsi que sur ses dérivées de manière à montrer la convergence forte du champ électrique E_h . Ce qui nous permettra de traiter le terme non linéaire $E_h f_h$ grâce à un résultat de compacité forte sur E_h . La convergence de f_h vers la solution de l'équation de Vlasov s'obtient ensuite à partir d'une estimation BV faible. Nous montrons également que si la donnée initiale est bornée dans l'espace des fonctions à variations bornées BV , alors, la fonction de distribution $f_h(t)$ reste bornée dans cet espace. Cette dernière estimation est utile pour montrer la convergence forte de f_h vers f .

2.3 Estimations a priori.

Dans cette partie, nous décrivons les propriétés satisfaites aussi bien par l'approximation numérique que par la solution de l'équation de Vlasov-Poisson. Ces estimations permettent de démontrer la convergence vers la solution.

Dans un premier temps, nous vérifions la conservation des deux premiers moments de f_h par le schéma numérique, lorsque le pas d'espace des vitesses Δv_j est constant

$$\int_0^L \int_{\mathbb{R}} f_h(t^n, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} dx dv = \int_0^L \int_{\mathbb{R}} f_h(0, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} dx dv, \quad \forall n \geq 0.$$

Nous montrons ensuite pour toute fonction $\phi \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ convexe, une propriété de décroissance en temps de la fonction

$$\int_Q \phi(f_h(t, x, v)) dx dv.$$

Cette première estimation sur la fonction de distribution permet d'établir un principe du maximum sur $f_h(t)$. Nous donnons dans le même temps une estimation L^∞ du champ électrique discret $E_h(t)$. Par la Proposition 2.2, nous montrons l'existence d'une borne uniforme sur f_h , par rapport à la variable d'espace x . Une estimation L^∞ sur le premier moment en vitesse de f_h en découle. Enfin, l'équation de Poisson et la conservation de la charge nous donnent une estimation du champ électrique dans l'espace $W^{1,\infty}(\Omega_T)$.

Proposition 2.1 *Nous supposons qu'il existe une fonction convexe ϕ , telle que*

$$\int_0^L \int_{\mathbb{R}} \phi(f_0(x, v)) dx dv < +\infty.$$

Alors, dès que le pas de temps Δt satisfait (2.1), l'approximation numérique est bien définie et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \tau > 0, \quad \int_0^L \int_{\mathbb{R}} \phi(f_h(t + \tau, x, v)) dx dv \leq \int_0^L \int_{\mathbb{R}} \phi(f_h(t, x, v)) dx dv.$$

De plus,

$$|E_h(t, x)| \leq \frac{3}{2} L, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times]0, L[.$$

Preuve : soit $(i, j) \in I \times \mathbb{Z}$. La solution numérique au temps t^{n+1} sur la cellule de l'espace des phases $C_{i,j}$ s'écrit à l'aide du schéma volumes finis (2.2)

$$\begin{aligned} f_{i,j}^{n+1} &= \left(1 - \Delta t \left(\frac{|v_j|}{\Delta x_i} + \frac{|E_i^n|}{\Delta v_j} \right) \right) f_{i,j}^n + \Delta t \frac{v_j^+}{\Delta x_i} f_{i-1,j}^n + \Delta t \frac{v_j^-}{\Delta x_i} f_{i+1,j}^n \\ &+ \Delta t \frac{E_i^{n+}}{\Delta v_j} f_{i,j-1}^n + \Delta t \frac{E_i^{n-}}{\Delta v_j} f_{i,j+1}^n, \end{aligned} \quad (2.-7)$$

avec $r^+ = \max(r, 0)$ et $r^- = \max(-r, 0)$.

Sous la condition de stabilité de type CFL (2.1), la valeur de la fonction de distribution $f_{i,j}^{n+1}$ est donnée par une combinaison convexe de $f_{i,j}^n$, $f_{i-1,j}^n$, $f_{i+1,j}^n$, $f_{i,j-1}^n$, $f_{i,j+1}^n$. Ainsi, en considérant une fonction convexe arbitraire ϕ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \phi\left(f_{i,j}^{n+1}\right) &\leq \left(1 - \Delta t \left(\frac{|v_j|}{\Delta x_i} + \frac{|E_i^n|}{\Delta v_j}\right)\right) \phi\left(f_{i,j}^n\right) + \Delta t \frac{v_j^+}{\Delta x_i} \phi\left(f_{i-1,j}^n\right) \\ &+ \Delta t \frac{v_j^-}{\Delta x_i} \phi\left(f_{i+1,j}^n\right) + \Delta t \frac{E_i^{n+}}{\Delta v_j} \phi\left(f_{i,j-1}^n\right) + \Delta t \frac{E_i^{n-}}{\Delta v_j} \phi\left(f_{i,j+1}^n\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Finalement, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{\mathbb{R}} \phi(f_h(t^{n+1}, x, v)) dx dv &= \sum_{i,j} \Delta x_i \Delta v_j \phi(f_{i,j}^{n+1}) \leq \sum_{i,j} \Delta x_i \Delta v_j \phi(f_{i,j}^n) \\ &\leq \int_0^L \int_{\mathbb{R}} \phi(f_h(t^n, x, v)) dx dv. \end{aligned}$$

Il reste maintenant à montrer que le champ électrique discret est uniformément borné. La justification est similaire à celle réalisée dans le cas continu, pour tout (t, x) appartenant à Ω_T ,

$$\begin{aligned} |E_h(t, x)| &= \left| \int_0^L K(x, y) (\bar{\rho}_h(t, y) - 1) dy \right| \\ &\leq \left| \int_0^L K(x, y) \bar{\rho}_h(t, y) dy \right| + \left| \int_0^L K(x, y) dy \right| \\ &\leq \|K\|_{L^\infty} \int_0^L \bar{\rho}_h(t, y) dy + \frac{L}{2} \leq L + \frac{L}{2} = \frac{3}{2} L. \end{aligned}$$

Le champ électrique est donc bien uniformément borné par rapport au pas h . De plus, la borne est uniforme par rapport au temps. \square

Remarque 2.1 *La Proposition 2.1 permet de montrer plusieurs propriétés sur la fonction de distribution. D'abord en considérant $\phi(r) = r^-$ (respectivement $\phi(r) = (r - \|f_0\|_{L^\infty})^+$) et en supposant que la donnée initiale est positive (respectivement bornée), alors, l'approximation numérique f_h est positive (respectivement bornée) au cours du temps.*

Nous savons que dans le cas continu toutes les normes L^p de la solution de l'équation de Vlasov-Poisson sont conservées au cours du temps, mais dans le cas discret la propriété est plus faible. En effet, en prenant $\phi(r) = |r|^p$, nous établissons que les normes L^p de l'approximation numérique sont décroissantes par rapport au temps. Ceci est dû à la dissipation du schéma numérique.

Pour établir une autre estimation sur le champ électrique, il reste à évaluer les moments ρ_h et j_h .

Proposition 2.2 *Nous supposons que la donnée initiale f_0 est positive et*

$$0 \leq f_0(x, v) \leq C R(v) = \frac{C}{(1 + |v|)^\lambda},$$

pour $\lambda > 2$. Alors, il existe une constante C_T dépendant uniquement de T , L et f_0 telle que

$$0 \leq f_h(t, x, v) \leq C_T R_h(v), \quad (t, x, v) \in [0, T[\times]0, L[\times \mathbb{R},$$

où $R_h(v) = \frac{1}{(1 + |v_j|)^\lambda}$, pour $v \in [v_{j-1/2}, v_{j+1/2}[$, $j \in \mathbb{Z}$.

De plus, pour h suffisamment petit, il existe une constante $C_T > 0$, telle que

$$0 \leq \rho_h(t, x) \leq C_T, \quad |j_h(t, x)| \leq C_T, \quad (t, x) \in \Omega_T. \quad (2.-12)$$

Preuve : notons d'abord que pour tout $h \leq L$, il existe une constante $c_0 = c_0(\alpha, \lambda) > 0$, telle que

$$\frac{R_h(v_{j+\beta})}{R_h(v_j)} \leq 1 + c_0 \Delta v_j, \quad \text{pour } \beta = -1 \text{ ou } 1.$$

Alors, en posant $A = (1 + \frac{3}{2}L c_0 \Delta t)$ et en choisissant une approximation de la donnée initiale telle que

$$f_{i,j}^0 = \frac{1}{|C_{i,j}|} \int_{C_{i,j}} f_0(x, v) dx dv \quad \text{ou} \quad f_{i,j}^0 = f_0(x_i, v_j),$$

nous obtenons $f_h(0, x, v) \leq A^0 C R_h(v)$, puisque $A^0 = 1$.

Raisonnons ensuite par récurrence, supposons que $f_h(t^n, x, v) \leq A^n C R_h(v)$, alors, en utilisant le schéma numérique (2.-6)

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j}^{n+1}}{C R_h(v_j)} &= \left(1 - \Delta t \frac{\Delta v_j |v_j| + \Delta x_i |E_i^n|}{\Delta x_i \Delta v_j}\right) \frac{f_{i,j}^n}{C R_h(v_j)} + \Delta t \frac{v_j^+}{\Delta x_i} \frac{f_{i-1,j}^n}{C R_h(v_j)} \\ &+ \Delta t \frac{v_j^-}{\Delta x_i} \frac{f_{i+1,j}^n}{C R_h(v_j)} + \Delta t \frac{E_i^{n+}}{\Delta v_j} \frac{f_{i,j-1}^n}{C R_h(v_{j-1})} \frac{R_h(v_{j-1})}{R_h(v_j)} + \Delta t \frac{E_i^{n-}}{\Delta v_j} \frac{f_{i,j+1}^n}{C R_h(v_{j+1})} \frac{R_h(v_{j+1})}{R_h(v_j)} \end{aligned}$$

et à l'aide de la condition de stabilité (2.1) sur Δt , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j}^{n+1}}{C R_h(v_j)} &\leq \left(1 - \Delta t \left(\frac{|v_j|}{\Delta x_i} + \frac{|E_i^n|}{\Delta v_j}\right)\right) A^n + \Delta t \frac{|v_j|}{\Delta x_i} A^n + \Delta t \frac{|E_i^n|}{\Delta v_j} A^n (1 + c_0 \Delta v_j) \\ &\leq A^n \left(1 + \frac{3}{2}L c_0 \Delta t\right) = A^{n+1}. \end{aligned}$$

Finalement, il vient

$$\forall (i, j) \in I \times \mathbb{Z}, \quad \frac{f_{i,j}^{n+1}}{C R_h(v_j)} \leq A^{n+1}.$$

Ainsi, puisque pour tout $T < +\infty$ et pour tout $n \in \{0, \dots, T/\Delta t\}$, la quantité A^{n+1} est bornée par $e^{c_0 T}$, nous obtenons une majoration uniforme sur le comportement en v de la fonction de distribution discrète f_h

$$f_h(t, x, v) \leq C_T R_h(v) \quad \text{pour } (t, x, v) \in Q_T.$$

Il existe évidemment une estimation analogue dans le cas continu. Maintenant, dans le but de montrer l'inégalité (2.2) sur les moments ρ_h et j_h , nous observons que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} R_h(v) dv &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\Delta v_j}{(1 + |v_j|)^\lambda} \leq 2 \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{h}{(1 + \alpha j h)^\lambda} \\ &\leq h + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{(1 + |v|)^\lambda} < +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que pour h suffisamment petit, il existe une constante C_T ne dépendant que de f_0 , α , T et L , telle que

$$\rho_h(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f_h(t, x, v) dv \leq C_T \left(h + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{(1 + |v|)^\lambda} \right) < +\infty,$$

et

$$|j_h(t, x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |v| f_h(t, x, v) dv \leq C_T \left(h + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{(1 + |v|)^{\lambda-1}} \right) < +\infty.$$

Les densités de charge et de courant sont donc uniformément bornées par rapport à h . \square

2.3.1 Estimation sur les dérivées de E_h .

Dans la Proposition 2.1, nous avons déjà montré que E_h est uniformément borné par rapport à h dans l'espace $L^\infty(\Omega_T)$. Calculons maintenant une estimation sur les dérivées en (t, x) de E_h .

Proposition 2.3 *En reprenant les hypothèses formulées dans la Proposition 2.1 et pour h suffisamment petit, il existe une constante C_T , ne dépendant que de la donnée initiale et du domaine Ω_T , telle que*

$$\left| \frac{\partial E_h}{\partial x}(t, x) \right| + \left| \frac{\partial E_h}{\partial t}(t, x) \right| \leq C_T, \quad (t, x) \in \Omega_T.$$

Preuve : étudions d'abord l'estimation sur la dérivée en x , qui est explicitement donnée par l'équation de Poisson : soit $(t, x) \in \Omega_T$, nous pouvons alors trouver $n \in \{0, \dots, T/\Delta t\}$ tel que $t \in [t^n, t^{n+1}[$, d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial E_h}{\partial x}(t, x) \right| &= \left| \bar{\rho}_h(t, x) - 1 \right| \leq \left| \bar{\rho}_h(t, x) \right| + 1 \\ &\leq \left(1 - \frac{t - t^n}{\Delta t}\right) \rho_h(t^n, x) + \frac{t - t^n}{\Delta t} \rho_h(t^{n+1}, x) + 1. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la Proposition 2.2 qui donne une borne uniforme sur $\rho_h(t, x)$, il vient l'estimation sur le gradient du champ électrique :

$$\left| \frac{\partial E_h}{\partial x}(t, x) \right| \leq C_T, \quad \forall (t, x) \in \Omega_T.$$

Afin d'évaluer $\frac{\partial E_h}{\partial t}$, nous introduisons une nouvelle approximation du courant j , notée par $\bar{j}_h(t, x)$, pour $(t, x) \in [t^n, t^{n+1}[\times [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$

$$\bar{j}_h(t, x) = \bar{j}_i^n + (x - x_{i-1/2}) \frac{\bar{j}_{i+1}^n - \bar{j}_i^n}{\Delta x_i},$$

avec

$$\bar{j}_i^n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta v_j (v_j^+ f_{i,j}^n - v_j^- f_{i+1,j}^n)$$

et $\bar{j}_h \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$. Nous rappelons également que l'approximation de la densité de charge $\bar{\rho}_h$ précédemment définie appartient à $W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega))$. Ainsi, en intégrant le schéma (2.-6) par rapport à la variable en vitesse v , nous obtenons comme dans le cas continu la conservation de la charge discrète

$$\forall (t, x) \in \Omega_T, \quad \frac{\partial \bar{\rho}_h}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \bar{j}_h}{\partial x}(t, x) = 0.$$

À l'aide du noyau de Green, une nouvelle formulation de $\frac{\partial E_h}{\partial t}$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_h}{\partial t}(t, x) &= \int_0^L K(x, y) \frac{\partial \bar{\rho}_h}{\partial t}(t, y) dy = \int_0^L -K(x, y) \frac{\partial \bar{j}_h}{\partial x}(t, y) dy \\ &= -\bar{j}_h(t, x) + \frac{1}{L} \int_0^L \bar{j}_h(t, y) dy \end{aligned}$$

et en observant que $|\bar{j}_i^n| \leq |j_i^n| + |j_{i+1}^n|$, la Proposition 2.2 permet de déduire l'estimation sur $\frac{\partial E_h}{\partial t}$ puisque la densité de courant est bornée uniformément par rapport à h . Ce qui achève la démonstration. \square

2.3.2 Estimation BV faible de f_h .

Le lemme suivant sera utile pour montrer la convergence de (E_h, f_h) vers la solution de l'équation de Vlasov-Poisson.

Lemme 2.1 *Nous supposons que le pas de temps Δt satisfait la condition de stabilité (2.1) et que le maillage cartésien de l'espace des phases est admissible, c'est-à-dire qu'il vérifie (2.2). De plus, la donnée initiale appartient à l'espace $L^1(Q) \cap L^\infty(Q)$. Soient $R > 0$ et $T > 0$ avec $h < R$ et $\Delta t < T$. Soient $j_0, j_1 \in \mathbb{Z}$ et $N_T \in \mathbb{N}$ tels que $-R \in [v_{j_0-1/2}, v_{j_0+1/2}[$, $R \in [v_{j_1-1/2}, v_{j_1+1/2}[$ et $T \in [(N_T - 1)\Delta t, N_T \Delta t[$. Pour une fonction lipschitzienne $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, posons*

$$EF_{1h}(\phi) = \Delta t \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{i \in I} \sum_{j=j_0}^{j_1} \Delta x_i \Delta v_j \left[v_j^+ |\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i-1,j}^n)| \right. \\ \left. + v_j^- |\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i+1,j}^n)| + E_i^{n+} |\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i,j-1}^n)| + E_i^{n-} |\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i,j+1}^n)| \right] \quad (2-22)$$

et

$$EF_{2h}(\phi) = \Delta t \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{i \in I} \sum_{j=j_0}^{j_1} \Delta x_i \Delta v_j |\phi(f_{i,j}^{n+1}) - \phi(f_{i,j}^n)|. \quad (2-22)$$

Alors, il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de T, R, f_0, α, ξ , telle que

$$EF_{1h}(\phi) \leq C h^{1/2} \quad \text{et} \quad EF_{2h}(\phi) \leq C \Delta t^{1/2}. \quad (2-21)$$

Preuve : faisons d'abord la preuve pour $\phi(r) = r$. En multipliant le schéma (2-6) par $\Delta x_i \Delta v_j f_{i,j}^n$ et en sommant sur $i \in \{0, \dots, n_x - 1\}$, $j \in \{j_0, \dots, j_1\}$, et $n \in \{0, \dots, N_T\}$, il vient :

$$B_1 + B_2 = 0,$$

où

$$B_1 = \sum_{n,i,j} \Delta x_i \Delta v_j [f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n] f_{i,j}^n,$$

et

$$B_2 = \Delta t \sum_{n,i,j} \left[\Delta v_j v_j^+ [f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n] f_{i,j}^n \right. \\ + \Delta v_j v_j^- [f_{i,j}^n - f_{i+1,j}^n] f_{i,j}^n + \Delta x_i E_i^{n+} [f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n] f_{i,j}^n \\ \left. + \Delta x_i E_i^{n-} [f_{i,j}^n - f_{i,j+1}^n] f_{i,j}^n \right].$$

Notons que

$$[f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n] f_{i,j}^n = -\frac{1}{2}[f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n]^2 - \frac{1}{2}(f_{i,j}^n)^2 + \frac{1}{2}(f_{i,j}^{n+1})^2,$$

ainsi, B_1 peut s'écrire

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2} \sum_{n,i,j} \Delta x_i \Delta v_j [f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Delta x_i \Delta v_j (f_{i,j}^0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Delta x_i \Delta v_j (f_{i,j}^{N_T+1})^2. \end{aligned}$$

À partir du schéma numérique (2.-6), nous établissons l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \sum_{n,i,j} \Delta x_i \Delta v_j [f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n]^2 &= \\ \sum_{n,i,j} \frac{\Delta t^2}{\Delta x_i \Delta v_j} &\left[\Delta v_j v_j^+ [f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n] + \Delta v_j v_j^- [f_{i,j}^n - f_{i+1,j}^n] \right. \\ &\left. + \Delta x_i E_i^{n+} [f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n] + \Delta x_i E_i^{n-} [f_{i,j}^n - f_{i,j+1}^n] \right]^2. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition de stabilité sur le pas de temps (2.1), nous avons

$$\begin{aligned} B_1 &\geq -\frac{1}{2} \Delta t (1 - \xi) \sum_{n,i,j} \left[\Delta v_j v_j^+ [f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n]^2 \right. \\ &\quad + \Delta v_j v_j^- [f_{i,j}^n - f_{i+1,j}^n]^2 + \Delta x_i E_i^{n+} [f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n]^2 \\ &\quad \left. + \Delta x_i E_i^{n-} [f_{i,j}^n - f_{i,j+1}^n]^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Delta x_i \Delta v_j (f_{i,j}^0)^2. \end{aligned}$$

Il reste maintenant à traiter le second terme B_2 qui peut être reformulé de la manière suivante

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{2} \Delta t \sum_{n,i,j} \left[\Delta v_j v_j^+ [f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n]^2 + \Delta v_j v_j^- [f_{i,j}^n - f_{i+1,j}^n]^2 \right. \\
&\quad \left. + \Delta x_i E_i^{n+} [f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n]^2 + \Delta x_i E_i^{n-} [f_{i,j}^n - f_{i,j+1}^n]^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{n,i} \left[\Delta x_i E_i^{n+} [(f_{i,j_1}^n)^2 - (f_{i,j_0-1}^n)^2] \right. \\
&\quad \left. + \Delta x_i E_i^{n-} [(f_{i,j_0}^n)^2 - (f_{i,j_1+1}^n)^2] \right].
\end{aligned}$$

Alors, puisque $B_1 + B_2 = 0$ l'inégalité suivante est vérifiée

$$\begin{aligned}
&\Delta t \sum_{n,i,j} \left[\Delta v_j v_j^+ [f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n]^2 + \Delta v_j v_j^- [f_{i,j}^n - f_{i+1,j}^n]^2 \right. \\
&\quad \left. + \Delta x_i E_i^{n+} [f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n]^2 + \Delta x_i E_i^{n-} [f_{i,j}^n - f_{i,j+1}^n]^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{\xi} \sum_{i,j} \Delta x_i \Delta v_j (f_{i,j}^0)^2 + \frac{\Delta t}{\xi} \sum_{n,i} \Delta x_i |E_i^n| [(f_{i,j_0-1}^n)^2 + (f_{i,j_1+1}^n)^2] \\
&\leq \frac{1}{\xi} \int_{Q_T} |f_h(0)|^2 dx dv + \frac{2}{\xi} \|f_0\|_{L^\infty}^2 \|E_h\|_{L^1(\Omega_T)} = \frac{K}{\xi}.
\end{aligned}$$

Nous remarquons que K ne dépend pas de h , en effet

$$\|E_h\|_{L^1(\Omega_T)} \leq T \|f_0\|_{L^1(Q)} \text{ et } \left(\int_{Q_T} |f_h(0)|^2 dx dv \right)^{1/2} \leq T \|f_0\|_{L^2(Q)}.$$

On en déduit alors compte tenu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
EF_{1h}(Id) &\leq \left[\Delta t \sum_{n,i,j} \Delta v_j v_j^+ [f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n]^2 + \Delta v_j v_j^- [f_{i,j}^n - f_{i+1,j}^n]^2 \right. \\
&\quad \left. + \Delta x_i E_i^{n+} [f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n]^2 + \Delta x_i E_i^{n-} [f_{i,j}^n - f_{i,j+1}^n]^2 \right]^{1/2} \\
&\quad \times \left[\Delta t \sum_{n,i,j} \Delta x_i^2 (\Delta v_j |v_j| + \Delta x_i |E_i^n|) \right]^{1/2} \\
&\leq h^{1/2} \left(\frac{K}{\xi} \right)^{1/2} \left[2TLR \left(R + \frac{3}{2}L \right) \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Maintenant, il reste à estimer le second terme $EF_{2h}(Id)$ donné par (2.-22) : en utilisant le schéma volumes finis (2.-6), on a

$$\begin{aligned} EF_{2h}(Id) &= \Delta t \sum_{n,i,j} \Delta x_i \Delta v_j |f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n| \\ &\leq \Delta t^2 \sum_{n,i,j} \left[\Delta v_j v_j^+ |f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n| + \Delta v_j v_j^- |f_{i,j}^n - f_{i+1,j}^n| \right. \\ &\quad \left. + \Delta x_i E_i^{n+} |f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n| + \Delta x_i E_i^{n-} |f_{i,j}^n - f_{i,j+1}^n| \right]. \end{aligned}$$

Comme précédemment, nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la condition de stabilité sur le pas de temps (2.1) et la borne uniforme sur le champ électrique discret dans $L^\infty(\Omega_T)$, pour établir une borne sur le terme $EF_{2h}(Id)$

$$EF_{2h}(Id) \leq \Delta t^{1/2} K^{1/2} \left[2T L R \frac{1-\xi}{\xi} \right]^{1/2}.$$

Donc, le Lemme 2.1 est prouvé pour $\phi(r) = r$. Ces inégalités obtenues sur $EF_{1h}(Id)$ et $EF_{2h}(Id)$ se généralisent pour toute fonction ϕ lipschitzienne, puisque

$$\forall r_1, r_2 \in [0, \|f_0\|_{L^\infty}], \quad |\phi(r_1) - \phi(r_2)| \leq Lip(\phi) |r_1 - r_2|.$$

Alors

$$EF_{1h}(\phi) \leq Lip(\phi) EF_{1h}(Id), \quad EF_{2h}(\phi) \leq Lip(\phi) EF_{2h}(Id).$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. \square

2.3.3 Estimation BV forte de f_h .

Dans cette partie, nous supposons que la donnée initiale $f_0(x, v)$ appartient à $BV(Q)$. Dans le but d'obtenir la convergence forte dans $L^1_{loc}(Q)$, nous devons montrer que la variation totale de la solution numérique reste uniformément bornée.

Rappel : rappelons d'abord la définition de la variation totale pour une fonction à plusieurs variables (voir par exemple R. LeVêque [11]). Pour simplifier, nous nous limitons à une fonction à deux variables (x, y) .

Définition 2.1 Soit $g(x, y)$ une fonction définie sur \mathbb{R}^2 . La variation totale de g est donnée par la limite suivante

$$\begin{aligned} TV_{xy}(g) &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int |g(x + \varepsilon, y) - g(x, y)| dx dy \\ &\quad + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int |g(x, y + \varepsilon) - g(x, y)| dx dy. \end{aligned}$$

Nous pouvons définir la variation totale d'une fonction g , constante par morceaux :

$$TV_{xy}(g) = \sum_{i,j} |y_{j+1} - y_j| |g(x_{i+1}, y_j) - g(x_i, y_j)| \\ + |x_{i+1} - x_i| |g(x_i, y_{j+1}) - g(x_i, y_j)|.$$

Proposition 2.4 (*Estimation de la variation totale de f_h*)

Nous supposons que la condition de stabilité sur le pas de temps (2.1) est satisfaite et que la donnée initiale f_0 appartient à $BV(Q)$. Alors, il existe une constante C_T , ne dépendant que de f_0 , L et T , telle que

$$\forall n \in \{0, \dots, T/\Delta t\}, \quad TV_{xv}(f_h(t^n)) \leq C_T TV_{xv}(f_0),$$

où f_h est donnée par (2.-6).

Remarque 2.2 *La fonction de distribution n'est pas à variation totale décroissante. L'estimation BV n'est pas très naturelle pour l'équation de Vlasov, puisque l'équation de Vlasov est une équation de transport. Ainsi, cette estimation se rapproche d'avantage d'une majoration du gradient discret de f_h dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.*

Preuve : il suffit d'exprimer la fonction de distribution discrète au temps t^{n+1} en utilisant le schéma (2.-6) sur deux cellules voisines i et $i+1$ et de faire la différence $f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1}$. Alors, en utilisant la décomposition du champ électrique

$$E_{i+1}^{n+} = E_{i+1}^{n+} - E_i^{n+} + E_i^{n+}, \\ E_{i+1}^{n-} = E_{i+1}^{n-} - E_i^{n-} + E_i^{n-},$$

il vient

$$f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1} = \left(1 - \Delta t \left(\frac{v_j^+}{\Delta x_{i+1}} + \frac{v_j^-}{\Delta x_i} + \frac{|E_i^n|}{\Delta v_j} \right) \right) (f_{i+1,j}^n - f_{i,j}^n) \\ + \Delta t \frac{v_j^+}{\Delta x_i} (f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n) + \Delta t \frac{v_j^-}{\Delta x_{i+1}} (f_{i+2,j}^n - f_{i+1,j}^n) \\ + \Delta t \frac{E_i^{n+}}{\Delta v_j} (f_{i+1,j-1}^n - f_{i,j-1}^n) + \Delta t \frac{E_i^{n-}}{\Delta v_j} (f_{i+1,j+1}^n - f_{i,j+1}^n) \\ + \Delta t \frac{E_{i+1}^{n+} - E_i^{n+}}{\Delta v_j} (f_{i+1,j}^n - f_{i+1,j-1}^n) + \Delta t \frac{E_{i+1}^{n-} - E_i^{n-}}{\Delta v_j} (f_{i+1,j+1}^n - f_{i+1,j}^n).$$

Nous multiplions ensuite cette égalité par Δv_j et sommons sur $i \in \{0, \dots, n_x - 1\}$ et $j \in \mathbb{Z}$. En utilisant la condition de stabilité (2.1) sur le pas de temps, nous montrons que le terme $\left(1 - \Delta t \left(\frac{v_j^+}{\Delta x_{i+1}} + \frac{v_j^-}{\Delta x_i} + \frac{|E_i^n|}{\Delta v_j} \right) \right)$ est positif, ce qui permet

d'établir l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \Delta v_j |f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1}| \\ & \leq \sum_{i,j} \Delta v_j \left(1 - \Delta t \left(\frac{v_j^+}{\Delta x_{i+1}} + \frac{v_j^-}{\Delta x_i} + \frac{|E_i^n|}{\Delta v_j} \right) \right) |f_{i+1,j}^n - f_{i,j}^n| \end{aligned} \quad (2.-59)$$

$$+ \Delta t \sum_{i,j} \Delta v_j \frac{v_j^+}{\Delta x_i} |f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n| + \Delta t \sum_{i,j} \Delta v_j \frac{v_j^-}{\Delta x_{i+1}} |f_{i+2,j}^n - f_{i+1,j}^n| \quad (2.-58)$$

$$+ \Delta t \sum_{i,j} E_i^{n+} |f_{i+1,j-1}^n - f_{i,j-1}^n| + \Delta t \sum_{i,j} E_i^{n-} |f_{i+1,j+1}^n - f_{i,j+1}^n| \quad (2.-57)$$

$$\begin{aligned} & + \Delta t \sum_{i,j} |E_{i+1}^{n+} - E_i^{n+}| |f_{i+1,j}^n - f_{i+1,j-1}^n| \\ & + \Delta t \sum_{i,j} |E_{i+1}^{n-} - E_i^{n-}| |f_{i+1,j+1}^n - f_{i+1,j}^n|. \end{aligned}$$

Nous utilisons la périodicité de f_h et la condition de stabilité (2.1) pour traiter les termes de bords en x (2.-59)-(2.-57). Nous obtenons alors

$$\sum_{i,j} \Delta v_j |f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1}| \leq \sum_{i,j} \Delta v_j |f_{i+1,j}^n - f_{i,j}^n| \quad (2.-58)$$

$$+ \Delta t \sum_{i,j} |E_{i+1}^{n+} - E_i^{n+}| |f_{i+1,j}^n - f_{i+1,j-1}^n| \quad (2.-57)$$

$$+ \Delta t \sum_{i,j} |E_{i+1}^{n-} - E_i^{n-}| |f_{i+1,j+1}^n - f_{i+1,j}^n|. \quad (2.-56)$$

Il reste maintenant à traiter les termes (2.-57)-(2.-56) qui représentent la variation totale de f_h au temps t^n par rapport à la variable des vitesses v . Nous rappelons que le champ électrique discret est lipschitzien par rapport à x

$$\exists c_{1,T} > 0, \quad |E_{i+1}^n - E_i^n| \leq c_{1,T} \Delta x_i,$$

où la constante $c_{1,T}$ ne dépend que de Ω_T , de la donnée initiale et du temps final T . Comme la fonction $x \mapsto \max(x, 0)$ est lipschitzienne de norme égale à un, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \Delta v_j |f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1}| & \leq \sum_{i,j} \Delta v_j |f_{i+1,j}^n - f_{i,j}^n| \\ & + \Delta t \sum_{i,j} |E_{i+1}^n - E_i^n| (|f_{i+1,j}^n - f_{i+1,j-1}^n|) \\ & \leq \sum_{i,j} \Delta v_j |f_{i+1,j}^n - f_{i,j}^n| + \Delta t \sum_{i,j} c_{1,T} \Delta x_i |f_{i,j+1}^n - f_{i,j}^n|. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement une estimation de la variation totale en x de la fonction de distribution au temps t^{n+1} en fonction de la variation totale en x et v de la fonction

de distribution au temps t^n .

Notons par TV_x , la variation totale en x , ainsi

$$\begin{aligned} TV_x(f_h(t^{n+1})) &= \sum_{i,j} \Delta v_j |f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1}| \\ &\leq TV_x(f_h(t^n)) + c_{1,T} \Delta t TV_v(f_h(t^n)). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Montrons également que la variation totale en v reste bornée uniformément par rapport à h . La démonstration est similaire à celle présentée pour l'estimation de la variation totale en x . Nous utilisons la propriété d'admissibilité du maillage (2.2), pour contrôler le taux de variation $v_{j+1} - v_j$:

$$v_{j+1} - v_j \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}\right) \Delta v_j.$$

Nous estimons alors la variation totale en v de f_h au temps t^{n+1}

$$\exists c_{2,T} > 0, \quad TV_v(f_h(t^{n+1})) \leq TV_v(f_h(t^n)) + c_{2,T} \Delta t TV_x(f_h(t^n)). \quad (2.59)$$

Ainsi, à partir des deux inégalités (2.59) et (2.3.3), puis en posant $c_{3,T} = c_{1,T} + c_{2,T}$, la variation totale de la fonction de distribution f_h au temps t^{n+1} s'exprime en fonction de la variation totale de f_h au temps t^n

$$TV_{xv}(f_h(t^{n+1})) \leq TV_{xv}(f_h(t^n)) + c_{3,T} \Delta t TV_{xv}(f_h(t^n)). \quad (2.59)$$

En utilisant le lemme de Gronwall, nous déduisons la majoration suivante

$$TV_{xv}(f_h(t^n)) \leq \exp(c_{3,T}T) TV_{xv}(f_h(0)).$$

Pour conclure la preuve de la proposition, nous utilisons le fait que lorsque f_0 appartient à $BV(Q)$, alors, f_0 vérifie l'inégalité suivante

$$\sum_{i,j} \Delta v_j |f_{i+1,j}^0 - f_{i,j}^0| + \Delta x_i |f_{i,j+1}^0 - f_{i,j}^0| \leq TV_{xv}(f_0).$$

Donc, il existe une constante C_T , qui ne dépend que de f_0 , T , L , telle que

$$TV_{xv}(f_h(t^n)) \leq \exp(C_T) TV_{xv}(f(0)).$$

□

2.4 Démonstration du théorème 2.1.

Nous considérons une suite de maillages de l'espace des phases $(\mathcal{M}_h)_{h>0}$. Cette suite vérifie la condition d'admissibilité (2.2) et le pas de temps Δt est calculé de manière à ce que la condition de stabilité (2.1) soit satisfaite.

Pour un maillage donné, nous pouvons construire une approximation (f_h, E_h) en utilisant le schéma de type volumes finis (2.-5)-(2.-6). Nous posons alors

$$A = \left\{ E_h \in W^{1,\infty}(\Omega_T); \quad E_h \text{ donné par (2.-5) pour un maillage } \mathcal{M}_h \right\}.$$

D'une part, la Proposition 2.3 implique l'existence d'une constante C_T strictement positive, ne dépendant que de f_0, T, L , telle que

$$\forall E_h \in A, \quad \|E_h\|_{L^\infty} + \left\| \frac{\partial E_h}{\partial t} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{\partial E_h}{\partial x} \right\|_{L^\infty} \leq C_T.$$

D'autre part, étant donné que l'injection de $W^{1,\infty}(\Omega_T)$ dans $C^0(\overline{\Omega}_T)$ est compacte, il existe au moins une sous-suite de $(E_h)_{h>0}$ et une fonction E appartenant à $W^{1,\infty}(\Omega_T)$ telles que

$$E_h(t, x) \rightharpoonup E(t, x) \quad \text{dans } W^{1,\infty}(\Omega_T) \text{ faible-}\star, \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0,$$

$$E_h(t, x) \rightarrow E(t, x) \quad \text{dans } C^0(\overline{\Omega}_T) \text{ forte,} \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0.$$

De plus, la Proposition 2.1 donne une estimation uniforme de la norme L^∞ de f_h . Ainsi, il existe au moins une sous-suite de $(f_h)_h$ et une fonction $f \in L^\infty(Q_T)$ telles que

$$f_h(t, x, v) \rightharpoonup f(t, x, v) \quad \text{dans } L^\infty(Q_T) \text{ faible-}\star, \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0.$$

En outre, comme la charge discrète ρ_h est également bornée dans $L^\infty(\Omega_T)$, il existe une autre sous-suite de $(f_h)_h$ vérifiant

$$\rho_h(t, x) \rightharpoonup \rho(t, x) \quad \text{dans } L^\infty(\Omega_T) \text{ faible-}\star, \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0.$$

Nous prouvons facilement que la limite $\rho(t, x)$ correspond à $\int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv$. En effet, considérons $\psi(t, x) \in L^1(\Omega_T)$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \left(\rho_h - \int_{\mathbb{R}} f dv \right) \psi(t, x) dx dt &= \int_0^T \int_0^L \int_{|v| \leq r} (f_h - f) \psi(t, x) dv dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L \int_{|v| > r} (f_h - f) \psi(t, x) dv dx dt. \end{aligned}$$

Puisque $f_h \rightharpoonup f$ dans $L^\infty(Q_T)$ faible- \star , le premier terme de droite tend vers zéro pour r fixé, lorsque h tend vers zéro. De plus, à partir de la seconde estimation de la Proposition 2.1 qui est satisfaite aussi bien par f que par f_h , nous obtenons

$$\int_{|v| > r} |f_h - f| dv \leq \int_{|v| > r} (|f_h| + |f|) dv \leq 2C_T \left(h + \int_{|v| > r} \frac{dv}{(1 + |v|)^\lambda} \right).$$

Le dernier terme de ces inégalités devient petit, dès que l'on choisit r suffisamment grand. Ainsi, ρ_h converge vers $\int_{\mathbb{R}} f dv$ dans $L^\infty(\Omega_T)$ faible- \star .

Remarquons à présent que si la donnée initiale appartient à $BV(Q)$, nous pouvons construire une nouvelle approximation de la fonction de distribution, \bar{f}_h , continue en temps. Il est facile de vérifier que f_h et \bar{f}_h vont converger vers la même limite. Nous posons alors,

$$B = \left\{ \bar{f}_h \in C(0, T; L^1_{loc}(Q)); \quad \bar{f}_h \text{ donnée par (2.-6) pour un maillage } \mathcal{M}_h \right\}$$

et

$$B(t) = \left\{ \bar{f}_h(t) \in L^1_{loc}(Q); \quad \bar{f}_h \in B \right\}.$$

Une conséquence du théorème de compacité d'Helly (voir par exemple [14, Théorème 5.1.1] ou [9, 11]) et l'estimation de la variation totale de la fonction de distribution f_h montre que l'injection de l'espace $B(t)$ dans $L^1_{loc}(Q)$ est relativement compacte. Enfin, en utilisant le schéma numérique pour la construction de \bar{f}_h et à l'aide de l'estimation de la variation totale de $\bar{f}_h(t)$, nous montrons que B est uniformément équicontinue au sens suivant : pour tout R strictement positif et tel que la boule $B(0, R)$ soit incluse dans Q , pour tout ε strictement positif, il existe η strictement positif tel que

$$\|f_h(t_1) - f_h(t_2)\|_{L^1(B(0, R))} \leq \varepsilon, \quad \forall f_h \in B, \quad 0 \leq t_2 \leq t_1 \leq T, |t_1 - t_2| \leq \eta.$$

En appliquant le théorème d'Ascoli, nous prouvons que la fonction de distribution discrète \bar{f}_h converge fortement vers f dans $C^0(0, T; L^1_{loc})$.

2.4.1 Convergence vers la solution faible de l'équation de Vlasov.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(Q_T)$, $R > 0$ et $j_0, j_1 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\text{supp}\left(\varphi(t, x, \cdot)\right) \subset [-R, R],$$

avec

$$-R \in (v_{j_0-1/2}, v_{j_0+1/2}) \quad \text{et} \quad R \in (v_{j_1-1/2}, v_{j_1+1/2}).$$

Multiplions le schéma volumes finis (2.-6) par

$$\frac{1}{\Delta t \Delta x_i \Delta v_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \varphi(t, x, v) dx dv dt,$$

puis, sommons sur $i \in \{0, \dots, n_x - 1\}$, $j \in \{j_0, \dots, j_1\}$ et $n \in \{0, \dots, N_T = \frac{T}{\Delta t}\}$, il vient

$$E_1 + E_2 = 0$$

avec

$$E_1 = \sum_{n,i,j} (f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n) \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \varphi(t, x, v) dx dv dt$$

et

$$E_2 = \sum_{n,i,j} \left[\Delta v_j v_j^+ (f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n) + \Delta v_j v_j^- (f_{i,j}^n - f_{i+1,j}^n) + \Delta x_i E_i^{n+} (f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n) \right. \\ \left. + \Delta x_i E_i^{n-} (f_{i,j}^n - f_{i,j+1}^n) \right] \frac{1}{\Delta x_i \Delta v_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \varphi(t, x, v) dx dv dt.$$

Dans la suite nous notons

$$E_{1,0} = \int_{Q_T} f_h(t, x, v) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x, v) dt dx dv + \int_Q f_0(x, v) \varphi(0, x, v) dx dv$$

et

$$E_{2,0} = \int_{Q_T} f_h(t, x, v) \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x, v) + E_h(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(t, x, v) \right) dx dv dt.$$

Nous allons comparer les termes E_1 et $E_{1,0}$, puis les termes E_2 et $E_{2,0}$ de manière à établir que $E_{1,0} + E_{2,0}$ converge vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$.

Comparaison entre E_1 et $E_{1,0}$.

Nous remarquons d'abord que $E_{1,0}$ peut être écrit de la manière suivante en décomposant l'intégrale sur chaque cellule $C_{i,j}$:

$$E_{1,0} = \sum_{n,i,j} f_{i,j}^n \int_{C_{i,j}} \left(\varphi(t^{n+1}, x, v) - \varphi(t^n, x, v) \right) dx dv + \int_Q f_0(x, v) \varphi(0, x, v) dx dv.$$

En utilisant une intégration par partie discrète, il suit

$$E_{1,0} = - \sum_{n,i,j} \left(f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n \right) \int_{C_{i,j}} \varphi(t^{n+1}, x, v) dx dv \\ - \int_Q \left(f_h(0, x, v) - f_0(x, v) \right) \varphi(0, x, v) dx dv.$$

Ainsi,

$$|E_1 + E_{1,0}| \leq \sum_{n,i,j} |f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x, v) \right| dt dx dv \\ + \int_Q |f_h(0, x, v) - f_0(x, v)| |\varphi(0, x, v)| dx dv.$$

En supposant par exemple que la donnée initiale est discrétisée de la manière suivante

$$f_h(0, x, v) = \frac{1}{|C_{i,j}|} \int_{C_{i,j}} f_0(x, v) dx dv, \quad \forall (x, v) \in C_{i,j}$$

et en utilisant le fait que la donnée initiale $f_0 \in L^1(Q) \cap L^\infty(Q)$, nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_Q |f_h(0, x, v) - f_0(x, v)| |\varphi(0, x, v)| dx dv = 0.$$

De plus, à partir de l'inégalité obtenue sur le terme EF_{2h} défini par (2.-22) et en prenant $\phi(r) = r$, il vient

$$\sum_{n,i,j} |f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x, v) \right| dt dx dv \leq C \|\varphi_t\|_{L^\infty} \Delta t^{1/2}.$$

Alors,

$$|E_1 + E_{1,0}| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0.$$

Comparaison entre E_2 et $E_{2,0}$.

Introduisons la notation

$$\begin{aligned} E_{2,1} = & \sum_{n,i,j} \left[v_j^+ (f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} \varphi(t, x_{i-1/2}, v) dv dt \right. \\ & + v_j^- (f_{i,j}^n - f_{i+1,j}^n) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} \varphi(t, x_{i+1/2}, v) dv dt \\ & + E_i^{n+} (f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(t, x, v_{j-1/2}) dx dt \\ & \left. + E_i^{n-} (f_{i,j}^n - f_{i,j+1}^n) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(t, x, v_{j+1/2}) dx dt \right] \end{aligned}$$

et comparons E_2 et $E_{2,1}$, il vient

$$\begin{aligned} |E_2 - E_{2,1}| &= \left| \sum_{n,i,j} \left[v_j^+ (f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n) \left[\frac{1}{\Delta x_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \varphi(t, x, v) - \varphi(t, x_{i-1/2}, v) dv dt \right] \right. \right. \\ &+ v_j^- (f_{i,j}^n - f_{i+1,j}^n) \left[\frac{1}{\Delta x_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \varphi(t, x, v) - \varphi(t, x_{i+1/2}, v) dv dt \right] \\ &+ E_i^{n+} (f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n) \left[\frac{1}{\Delta v_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v_{j-1/2}) dx dt \right] \\ &\left. \left. + E_i^{n-} (f_{i,j}^n - f_{i,j+1}^n) \left[\frac{1}{\Delta v_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v_{j+1/2}) dx dt \right] \right] \right|. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité sur le terme EF_{1h} défini par (2.-22) en prenant $\phi(r) = r$, il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de T, R, L, f_0, α et ξ telle que

$$|E_2 - E_{2,1}| \leq c \|\nabla \varphi\|_{L^\infty} h^{1/2}.$$

Estimons ensuite $|E_{2,0} + E_{2,1}|$ en écrivant le terme $E_{2,1}$ comme suit (nous rappelons que φ est à support compact)

$$\begin{aligned} E_{2,1} &= - \sum_{n,i,j} f_{i,j}^n \left[v_j \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} \varphi(t, x_{i+1/2}, v) - \varphi(t, x_{i-1/2}, v) dv dt \right. \\ &\quad \left. + E_i^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(t, x, v_{j+1/2}) - \varphi(t, x, v_{j-1/2}) dx dt \right]. \end{aligned}$$

De la même manière

$$\begin{aligned} E_{2,0} &= \sum_{n,i,j} f_{i,j}^n \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} v (\varphi(t, x_{i+1/2}, v) - \varphi(t, x_{i-1/2}, v)) dv dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} E_h(t, x) (\varphi(t, x, v_{j+1/2}) - \varphi(t, x, v_{j-1/2})) dx dt \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de T, R, L, f_0, α et ξ satisfaisant

$$\begin{aligned} &|E_{2,0} + E_{2,1}| \\ &\leq \sum_{n,i,j} f_{i,j}^n \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} |v - v_j| |\varphi(t, x_{i+1/2}, v) - \varphi(t, x_{i-1/2}, v)| dv dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} |E_h(t, x) - E_i^n| |\varphi(t, x, v_{j+1/2}) - \varphi(t, x, v_{j-1/2})| dx dt \right] \\ &\leq c \|\nabla \varphi\|_{L^\infty} \sum_{n,i,j} \Delta t \Delta x_i \Delta v_j f_{i,j}^n \left[\Delta v_j + \sup |E_h(t, x) - E_i^n| \right] \\ &\leq cT \|\nabla \varphi\|_{L^\infty} \|f_0\|_{L^1} h. \end{aligned}$$

Finalement, nous rappelons que $E_1 + E_2 = 0$ et obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \epsilon(\Delta t, h) &= \int_{Q_T} f_h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_h(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dt dx dv + \int_Q f_0(x, v) \varphi(0, x, v) dx dv \\ &= E_{1,0} + E_{2,0} \\ &= E_{1,0} + E_1 + E_{2,0} + E_{2,1} - E_{2,1} + E_2. \end{aligned}$$

Les estimations précédentes impliquent l'existence d'une constante C ne dépendant que de $\varphi, f_0, L, T, \alpha$ et ξ , telle que

$$\begin{aligned} |E_{1,0} + E_1| &\leq C (\|f_0 - f_h(0)\|_{L^1} + \Delta t^{1/2}), \\ |E_{2,0} + E_{2,1}| &\leq C h, \\ |E_{2,1} - E_2| &\leq C h^{1/2}. \end{aligned}$$

Alors, le terme $\epsilon(\Delta t, h)$ converge vers zéro lorsque le paramètre h tend vers zéro.

Comme nous l'avons vu

$$f_h(t, x, v) \rightharpoonup f(t, x, v) \text{ faiblement dans } L^\infty(Q_T)\text{-}\star$$

et

$$E_h(t, x) \rightarrow E(t, x) \text{ fortement dans } C^0(\overline{\Omega}_T).$$

Nous avons de plus montré que le couple limite (f, E) d'une sous-suite de $(f_h, E_h)_{h>0}$ est une solution de l'équation de Vlasov (2.1). Pour achever la démonstration du théorème de convergence, il faut maintenant montrer que ce couple limite satisfait l'équation de Poisson.

Remarque 2.3 *Pour le calcul numérique, nous utilisons un support en vitesse suffisamment grand mais fini. Dans cette démonstration, nous avons supposé que lorsque $h \rightarrow 0$, le support de la fonction de distribution $f_h(t, x, \cdot)$ tend vers l'infini, ainsi la condition de stabilité sur le pas de temps (2.1) nous impose que*

$$\exists \varepsilon \in]0, 1[, \quad v_h \simeq \frac{1}{h^\varepsilon} \text{ et } \Delta t \simeq \frac{h^2}{h^{1-\varepsilon} + h} \simeq h^{1+\varepsilon}.$$

2.4.2 Convergence vers la solution de l'équation de Poisson.

Nous rappelons que le champ électrique discret défini précédemment est continu par rapport à (t, x) . Cependant, pour simplifier l'analyse nous allons considérer une nouvelle approximation constante sur chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}[$ du champ électrique

$$\overline{E}_h(t, x) = \int_0^L K(x, y) (\rho_h(t, y) - 1) dy,$$

où ρ_h est donnée par (2.-5). Étant donné que $\frac{\partial E_h}{\partial t}$ est uniformément bornée, il est facile de prouver que \overline{E}_h et E_h vont converger vers la même limite lorsque h tend vers zéro. Ainsi, \overline{E}_h converge presque partout vers E .

Montrons à présent que $E(t, x)$ est solution de l'équation de Poisson : soit $\psi(t, x)$ appartenant à $L^1(\Omega_T)$,

$$\int_{\Omega_T} \overline{E}_h(t, x) \psi(t, x) dt dx = \int_{\Omega_T} \left[\int_0^L K(x, y) (\rho_h(t, y) - 1) dy \right] \psi(t, x) dt dx.$$

Nous savons que la densité de charge discrète ρ_h converge vers $\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv$ dans $L^\infty(\Omega_T)$ faible- \star , où f représente la solution de l'équation de Vlasov. Posons $g(t, y) = \int_0^L K(x, y) \psi(t, x) dx$, on a $g \in L^1(\Omega_T)$. En appliquant le théorème de Fubini, nous montrons

$$\int_{\Omega_T} \rho_h(t, y) g(t, y) dt dy \rightarrow \int_{\Omega_T} \rho(t, y) g(t, y) dt dy, \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0$$

et nous avons

$$E(t, x) = \int_0^L K(x, y) (\rho(t, y) - 1) dy \quad \text{et} \quad \rho(t, y) = \int_{\mathbb{R}} f(t, y, v) dv.$$

Ce qui prouve que le couple (f, E) est une solution de l'équation de Vlasov-Poisson.

La formulation faible implique que la solution du système de Vlasov-Poisson appartient à $C^0([0, T[; \mathcal{D}')$. Cependant, la régularité $W^{1, \infty}(\Omega_T)$ du champ électrique E et la continuité de la donnée initiale en (x, v) permettent de conclure que la fonction de distribution f est aussi continue en (t, x, v) . Nous rappelons que dans le cadre de notre étude la solution de l'équation de Vlasov-Poisson est unique, c'est donc toute la suite $(f_h, E_h)_{h>0}$ qui converge vers la même limite solution de l'équation.

2.5 Estimations d'erreurs.

Cette partie est consacrée à l'obtention d'estimations d'erreurs sur l'approximation (f_h, E_h) . Nous supposons que la donnée initiale est à support compact par rapport à la variable de vitesse, ainsi il est facile de vérifier, en utilisant la théorie des caractéristiques, que la solution de l'équation de Vlasov reste à support compact en vitesse.

Pour réaliser ces estimations d'erreurs, nous adaptions les estimations réalisées par J.-P. Vila et P. Villedieu [18] à l'équation de Vlasov.

Notons par $\mathcal{M}(Q_T)$ l'ensemble des mesures positives sur Q_T , c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires positives et continues sur $C(Q_T)$. Puis par $W_c^{1, \infty}(Q_T)$, l'ensemble des fonctions appartenant à $W^{1, \infty}(Q_T)$, périodiques en x et à support compact en (t, v) .

Proposition 2.5 *Nous supposons que la condition de stabilité sur le pas de temps (2.1) est satisfaite et que le maillage est admissible (2.2). Nous supposons également que la donnée initiale appartient à $L^1(Q) \cap L^\infty(Q)$ et est bornée par la fonction $R(v)$ définie par (2.1). Alors, il existe deux mesures $\nu_{h, \Delta t}^1$ et $\nu_{h, \Delta t}^2 \in \mathcal{M}(Q_T)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in W_c^{1, \infty}(Q_T)$, $\varphi \geq 0$, on ait*

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} f_h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_h(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dt dx dv + \int_Q f_0(x, v) \varphi(0, x, v) dx dv \\ \leq \int_Q \varphi(0) d\nu_h^1 + \int_{Q_T} (|\varphi_t| + |\nabla_{x, v} \varphi|) d\nu_{h, \Delta t}^1, \end{aligned} \quad (2.-99)$$

et

$$\begin{aligned} - \int_{Q_T} f_h^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_h(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dt dx dv - \int_Q f_0^2(x, v) \varphi(0, x, v) dx dv \\ \leq \int_Q \varphi(0) d\nu_h^2 + \int_{Q_T} (|\varphi_t| + |\nabla_{x, v} \varphi|) d\nu_{h, \Delta t}^2. \end{aligned} \quad (2.-99)$$

De plus, ces mesures satisfont : pour tout $T > 0$ et tout $R > 0$, il existe une constante C ne dépendant que de T, R, L, f_0, α et ξ , telle que

$$\begin{aligned} \nu_{h,\Delta t}^1\left([0, T[\times]0, L[\times]B(0, R)\right) &\leq C(\Delta t^{1/2} + h^{1/2} + \|f_0 - f_h(0)\|_{L^1}). \\ \nu_{h,\Delta t}^2\left([0, T[\times]0, L[\times]B(0, R)\right) &\leq C(\Delta t^{1/2} + h^{1/2} + \|f_0 - f_h(0)\|_{L^2}). \end{aligned}$$

Preuve : l'idée de la preuve est similaire à celle présentée pour montrer la convergence du schéma volumes finis vers la solution faible de l'équation de Vlasov. Nous utilisons le Lemme 2.1 pour les fonctions convexes et localement lipschitziennes $\phi(r) = r$ (respectivement $\phi(r) = r^2$) pour établir la majoration de la mesure $\nu_{h,\Delta t}^1$ (respectivement $\nu_{h,\Delta t}^2$).

Considérons ϕ une fonction convexe et localement lipschitzienne de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ . Soit $\varphi \in C_c^\infty(Q_T)$, $\varphi \geq 0$, soient $R > 0$, $j_0, j_1 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\text{supp}\left(\varphi(t, x, \cdot)\right) \subset [-R, R]$$

avec

$$-R \in (v_{j_0-1/2}, v_{j_0+1/2}) \quad \text{et} \quad R \in (v_{j_1-1/2}, v_{j_1+1/2}).$$

Nous multiplions l'inégalité (2.-7) par la quantité

$$\frac{1}{\Delta t \Delta x_i \Delta v_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \varphi(t, x, v) dx dv dt,$$

qui est positive. Puis, nous sommes sur $i \in \{0, \dots, n_x - 1\}$, $j \in \{j_0, \dots, j_1\}$ et $n \in \{0, \dots, N_T = \frac{T}{\Delta t}\}$, il vient

$$E_1 + E_2 \leq 0$$

avec

$$E_1 = \sum_{n,i,j} \left(\phi(f_{i,j}^{n+1}) - \phi(f_{i,j}^n) \right) \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \varphi(t, x, v) dx dv dt$$

et

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{n,i,j} \left[\Delta v_j v_j^+ (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i-1,j}^n)) + \Delta v_j v_j^- (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i+1,j}^n)) \right. \\ &\quad \left. + \Delta x_i E_i^{n+} (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i,j-1}^n)) + \Delta x_i E_i^{n-} (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i,j+1}^n)) \right] \\ &\quad \times \frac{1}{\Delta x_i \Delta v_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \varphi(t, x, v) dx dv dt. \end{aligned}$$

Dans la suite nous noterons par

$$E_{1,0} = - \int_{Q_T} \phi(f_h(t, x, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x, v) dt dx dv - \int_Q \phi(f_0(x, v)) \varphi(0, x, v) dx dv$$

et

$$E_{2,0} = - \int_{Q_T} \phi(f_h(t, x, v)) \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x, v) + E_h(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(t, x, v) \right) dx dv dt.$$

Nous remarquons d'abord que $E_{1,0}$ peut être écrit de la manière suivante

$$E_{1,0} = - \sum_{n,i,j} \phi(f_{i,j}^n) \int_{C_{i,j}} \left(\varphi(t^{n+1}, x, v) - \varphi(t^n, x, v) \right) dx dv \\ - \int_Q \phi(f_0(x, v)) \varphi(0, x, v) dx dv.$$

En utilisant une intégration par partie discrète, il suit

$$E_{1,0} = \sum_{n,i,j} \left(\phi(f_{i,j}^{n+1}) - \phi(f_{i,j}^n) \right) \int_{C_{i,j}} \varphi(t^{n+1}, x, v) dx dv \\ + \int_Q \left(\phi(f_h(0, x, v)) - \phi(f_0(x, v)) \right) \varphi(0, x, v) dx dv.$$

Nous avons,

$$|E_{1,0} - E_1| \\ \leq \sum_{n,i,j} |\phi(f_{i,j}^{n+1}) - \phi(f_{i,j}^n)| \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} |\varphi(t^{n+1}, x, v) - \varphi(t, x, v)| dt dx dv \\ + \int_Q |\phi(f_h(0, x, v)) - \phi(f_0(x, v))| |\varphi(0, x, v)| dx dv, \\ \leq \sum_{n,i,j} |\phi(f_{i,j}^{n+1}) - \phi(f_{i,j}^n)| \times \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \left| \int_0^1 (t - t^{n+1}) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t^{n+1} + (t - t^{n+1})\theta, x, v) d\theta \right| dt dx dv, \\ + \int_Q |\phi(f_h(0, x, v)) - \phi(f_0(x, v))| |\varphi(0, x, v)| dx dv.$$

Nous posons alors,

$$\langle \nu_{h,\Delta t}^{\phi,1}, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \rangle \\ = \sum_{n,i,j} |\phi(f_{i,j}^{n+1}) - \phi(f_{i,j}^n)| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \int_0^1 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t^{n+1} + (t - t^{n+1})\theta, x, v) \right| d\theta dt dx dv.$$

et

$$\langle \nu_h^\phi, \varphi(0) \rangle = \int_Q |\phi(f_h(0, x, v)) - \phi(f_0(x, v))| \varphi(0, x, v) dx dv.$$

Il vient alors,

$$|E_{1,0} - E_1| \leq \langle \nu_{h,\Delta t}^{\phi,1}, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \rangle + \langle \nu_h^\phi, \varphi(0) \rangle. \quad (2.117)$$

Ainsi, à partir de l'inégalité sur le terme EF_{2h} défini par (2.-22) dans le Lemme 2.1 et puisque la fonction ϕ est lipschitzienne, on a

$$\nu_{h,\Delta t}^{\phi,1} \left([0, T[\times]0, L[\times]B(0, R)) \right) \leq C \Delta t^{1/2}.$$

Puis, comme f_0 est suffisamment régulière, nous avons

$$\nu_h^\phi \left([0, T[\times]0, L[\times]B(0, R)) \right) \leq C h.$$

Pour étudier E_2 , introduisons la notation

$$\begin{aligned} E_{2,1} = & \sum_{n,i,j} \left[v_j^+ (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i-1,j}^n)) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} \varphi(t, x_{i-1/2}, v) dv dt \right. \\ & + v_j^- (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i+1,j}^n)) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} \varphi(t, x_{i+1/2}, v) dv dt \\ & + E_i^{n+} (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i,j-1}^n)) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(t, x, v_{j-1/2}) dx dt \\ & \left. + E_i^{n-} (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i,j+1}^n)) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(t, x, v_{j+1/2}) dx dt \right] \end{aligned}$$

et comparons E_2 et $E_{2,1}$,

$$\begin{aligned} & |E_{2,1} - E_2| \\ & = \left| \sum_{n,i,j} \left[v_j^+ (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i-1,j}^n)) \left[\frac{1}{\Delta x_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} (\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x_{i-1/2}, v)) dv dt \right] \right. \right. \\ & + v_j^- (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i+1,j}^n)) \left[\frac{1}{\Delta x_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} (\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x_{i+1/2}, v)) dv dt \right] \\ & + E_i^{n+} (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i,j-1}^n)) \left[\frac{1}{\Delta v_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} (\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v_{j-1/2})) dx dt \right] \\ & \left. \left. + E_i^{n-} (\phi(f_{i,j}^n) - \phi(f_{i,j+1}^n)) \left[\frac{1}{\Delta v_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} (\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v_{j+1/2})) dx dt \right] \right] \right|. \end{aligned}$$

Nous montrons comme précédemment l'existence d'une mesure $\nu_{h,\Delta t}^{\phi,2}$ satisfaisant

$$|E_{2,1} - E_2| \leq \left\langle \nu_{h,\Delta t}^{\phi,2}, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| \right\rangle \quad (2.-126)$$

et en utilisant l'inégalité sur le terme EF_{1h} défini par (2.-22) dans le Lemme 2.1 et puisque la fonction ϕ est lipschitzienne, il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de T, R, L, f_0, α et ξ telle que

$$\nu_{h,\Delta t}^{\phi,2} \left([0, T[\times]0, L[\times B(0, R) \right) \leq c h^{1/2}.$$

Pour estimer ensuite $|E_{2,0} - E_{2,1}|$, nous écrivons le terme $E_{2,1}$ comme suit (nous rappelons que φ est à support compact)

$$\begin{aligned} E_{2,1} = & - \sum_{n,i,j} \phi(f_{i,j}^n) \left[v_j \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} \varphi(t, x_{i+1/2}, v) - \varphi(t, x_{i-1/2}, v) dv dt \right. \\ & \left. + E_i^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(t, x, v_{j+1/2}) - \varphi(t, x, v_{j-1/2}) dx dt \right]. \end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned} E_{2,0} = & - \sum_{n,i,j} \phi(f_{i,j}^n) \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} v (\varphi(t, x_{i+1/2}, v) - \varphi(t, x_{i-1/2}, v)) dv dt \right. \\ & \left. + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} E_h(t, x) (\varphi(t, x, v_{j+1/2}) - \varphi(t, x, v_{j-1/2})) dx dt \right]. \end{aligned}$$

En procédant toujours de la même manière

$$\begin{aligned} |E_{2,0} - E_{2,1}| & \leq \sum_{n,i,j} \phi(f_{i,j}^n) \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} |v - v_j| |\varphi(t, x_{i+1/2}, v) - \varphi(t, x_{i-1/2}, v)| dv dt \right. \\ & \left. + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} |E_h(t, x) - E_i^n| |\varphi(t, x, v_{j+1/2}) - \varphi(t, x, v_{j-1/2})| dx dt \right]. \end{aligned}$$

En utilisant la régularité de E_h , il existe une mesure $\nu_{h,\Delta t}^{\phi,3}$ telle que

$$|E_{2,0} - E_{2,1}| \leq \left\langle \nu_{h,\Delta t}^{\phi,3}, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| \right\rangle \quad (2.-132)$$

et une constante c qui ne dépend que de f_0, T, R, L , telle que

$$\nu_{h,\Delta t}^{\phi,3} \left([0, T[\times]0, L[\times B(0, R) \right) \leq cT \|\phi(f_0)\|_{L^1} h.$$

Lorsque $\phi(r) = r$, l'inégalité (2.-7) correspond au schéma numérique (2.-6). Ainsi, $E_1 + E_2 = 0$ et

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} f_h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_h(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dt dx dv + \int_Q f_0(x, v) \varphi(0, x, v) dx dv \\ &= -E_{1,0} - E_{2,0} \\ &= -E_{1,0} + E_1 - E_{2,0} + E_{2,1} - E_{2,1} + E_2, \\ &\leq |E_{1,0} - E_1| + |E_{2,0} - E_{2,1}| + |E_{2,1} - E_2|. \end{aligned}$$

En posant $\nu_{h,\Delta t}^1 = \nu_h^\phi + \nu_{h,\Delta t}^{\phi,1} + \nu_{h,\Delta t}^{\phi,2} + \nu_{h,\Delta t}^{\phi,3}$ pour $\phi(r) = r$, et puisque $\nu_{h,\Delta t}^{\phi,1}, \nu_{h,\Delta t}^{\phi,2}, \nu_{h,\Delta t}^{\phi,3}$ vérifient les inégalités (2.-117), (2.5), (2.-132), la première inégalité de la Proposition 2.5 suit. Nous remarquons qu'en appliquant la même technique nous pouvons montrer que la formulation faible discrète (2.-99) sur f_h est encadrée par deux mesures bornées.

Finalement, pour une fonction ϕ convexe quelconque compte tenu de l'inégalité (2.-7) et $E_1 + E_2 \leq 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \phi(f_h) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_h(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dt dx dv - \int_Q \phi(f_0(x, v)) \varphi(0, x, v) dx dv \\ &= E_{1,0} + E_{2,0} \\ &\leq E_{1,0} - E_1 + E_{2,0} - E_{2,1} + E_{2,1} - E_2, \\ &\leq |E_{1,0} - E_1| + |E_{2,0} - E_{2,1}| + |E_{2,1} - E_2|. \end{aligned}$$

En prenant la fonction $\phi(r) = r^2$, localement lipschitzienne, nous pouvons appliquer les inégalités du Lemme 2.1 : en posant $\nu_{h,\Delta t}^2 = \nu_h^\phi + \nu_{h,\Delta t}^{\phi,1} + \nu_{h,\Delta t}^{\phi,2} + \nu_{h,\Delta t}^{\phi,3}$ et les estimations (2.-117), (2.5), (2.-132), nous obtenons le résultat. \square

À partir de cette proposition, nous obtenons le théorème suivant qui donne une estimation d'erreurs sur l'approximation numérique. Afin de simplifier l'étude, nous supposons que la solution de l'équation de Vlasov est à support compact par rapport à la variable de vitesse.

Théorème 2.2 *Soient $f_0(x, v)$ appartenant à $W_c^{1,\infty}(Q)$ et $(\mathcal{M}_h)_{h>0}$ une suite de maillages de l'espace des phases, Δt le pas de temps satisfaisant la condition de stabilité (2.1) : il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x_i \Delta v_j} (\Delta v_j |v_j| + \Delta x_i |E_i^n|) \leq 1 - \xi, \quad \forall (i, j) \in I \times J, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considérons l'approximation numérique obtenue à partir du schéma volumes finis (2.-6), puis notons $f_h(t, x, v)$ la fonction de distribution discrète et $E_h(t, x)$ le champ électrique discret donné par (2.2). Alors,

$$\int_{Q_T} e^{-\alpha t} |f(t, x, v) - f_h(t, x, v)|^2 dt dx dv \leq C_{1,T} (h^{1/2} + \Delta t^{1/2}) + C_1 \|f_0 - f_h(0)\|_{L^2}.$$

Preuve : puisque la donnée initiale est supposée être à support compact, pour un temps $T < +\infty$, il existe $\bar{R} > 0$, tel que

$$\forall (t, x) \in [0, T[\times]0, L[, \quad \text{supp}\left(f(t, x, \cdot)\right) \subset B(0, \bar{R}).$$

De plus, en utilisant la régularité de la donnée initiale, la solution de l'équation de Vlasov-Poisson (E, f) est unique et f appartient à $W^{1,\infty}(Q_T)$. Pour toute fonction $\varphi \in W_c^{1,\infty}(Q_T)$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} f^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_h(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dt dx dv + \int_Q f_0^2(x, v) \varphi(0, x, v) dx dv \\ = -2 \int_{Q_T} f(E_h - E) \varphi(t, x, v) \frac{\partial f}{\partial v} dt dx dv. \end{aligned}$$

Compte tenu de la première inégalité de la Proposition 2.5 avec $\varphi \in W_c^{1,\infty}(Q_T)$, alors la fonction de distribution $f \varphi$ appartient à l'espace $W_c^{1,\infty}(Q_T)$. Nous pouvons donc l'utiliser comme fonction test :

$$\begin{aligned} -2 \int_{Q_T} f_h f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_h(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dt dx dv - 2 \int_Q f_0^2(x, v) \varphi(0, x, v) dx dv \\ \geq -2 \langle \nu_{h,\Delta t}^1, |\nabla_{t,x,v}(f \varphi)| \rangle - 2 \int_{Q_T} f_h (E - E_h) \varphi(t, x, v) \frac{\partial f}{\partial v} dt dx dv. \end{aligned}$$

Ensuite, à l'aide de la deuxième inégalité de la Proposition 2.5, nous déduisons que f_h^2 vérifie

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} f_h^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_h(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dt dx dv + \int_Q f_0^2(x, v) \varphi(0, x, v) dx dv \\ \geq - \langle \nu_{h,\Delta t}^2, |\nabla_{t,x,v} \varphi| \rangle. \end{aligned}$$

Finalement, il vient en additionnant membre à membre les deux inégalités ci-dessus

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |f - f_h|^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_h(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dt dx dv \\ \geq -2 \int_{Q_T} (f_h - f) (E_h - E) \varphi \frac{\partial f}{\partial v} dt dx dv \\ -2 |f|_{1,\infty} \langle \nu_{h,\Delta t}^1, |\nabla_{t,x,v} \varphi| \rangle - \langle \nu_{h,\Delta t}^2, |\nabla_{t,x,v} \varphi| \rangle. \end{aligned} \quad (2.-149)$$

Posons alors $\alpha = 5 \|\frac{\partial f}{\partial v}\|_{L^\infty} L \bar{R}$ et $\omega = \max(2\bar{R}; \frac{3}{2}L)$ et considérons une fonction $k \in C^1(\mathbb{R}^+; [0, 1])$ telle que

$$k(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in [0, \bar{R} + \omega T), \\ 0 & \text{si } r \in [\bar{R} + \omega T + 1, +\infty[\end{cases}$$

et $k'(r) \leq 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$. Nous construisons alors

$$\varphi(t, x, v) = \begin{cases} k(|(x, v)| + \omega t)e^{-\alpha t} & \text{si } (t, x, v) \in Q_T, \\ 0 & \text{si } t \geq T. \end{cases}$$

La fonction φ n'est pas dans l'espace $W_c^{1,\infty}(Q_T)$, mais une technique de régularisation habituelle montre qu'une telle fonction peut être considérée [18]. En utilisant cette fonction φ comme fonction test, nous calculons chaque terme de l'inégalité (2.-149). D'abord, puisque le champ électrique discret est calculé à partir du noyau de Green, l'inégalité suivante a lieu

$$\begin{aligned} |E(t, x) - E_h(t, x)| &= \left| \int_Q K(x, y)[f(t, y, v) - f_h(t, y, v)]dydv \right|, \\ &\leq \int_Q |f(t, y, v) - f_h(t, y, v)|dydv. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} &\left| 2 \int_{Q_T} (f_h - f)(E_h - E)\varphi \frac{\partial f}{\partial v} dt dx dv \right| \\ &\leq 2 \left\| \frac{\partial f}{\partial v} \right\|_{L^\infty} \left(\int_{Q_T} |f_h - f|^2 \varphi dt dx dv \right)^{1/2} \left(\int_{Q_T} (E_h - E)^2 \varphi dt dx dv \right)^{1/2} \\ &\leq 2(2L\bar{R})^{1/2} \left\| \frac{\partial f}{\partial v} \right\|_{L^\infty} \left(\int_{Q_T} |f_h - f|^2 \varphi dt dx dv \right)^{1/2} \\ &\quad \left(\int_{Q_T \times Q} |f_h(t, y, w) - f(t, y, w)|^2 \varphi(t, x, v) dt dx dv dy dw \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Puisque $k(\cdot) = 1$ lorsque $(t, x, v) \in [0, T[\times]0, L[\times B(0, \bar{R})$, il vient

$$\begin{aligned} &\left| 2 \int_{Q_T} (f_h - f)(E_h - E)\varphi \frac{\partial f}{\partial v} dt dx dv \right| \\ &\leq 4L\bar{R} \left\| \frac{\partial f}{\partial v} \right\|_{L^\infty} \left(\int_{Q_T} |f_h - f|^2 \varphi dt dx dv \right)^{1/2} \\ &\quad \left(\int_{Q_T} e^{-\alpha t} |f_h(t, y, w) - f(t, y, w)|^2 dt dy dw \right)^{1/2}, \\ &\leq 4L\bar{R} \left\| \frac{\partial f}{\partial v} \right\|_{L^\infty} \int_{Q_T} |f - f_h|^2 \varphi dt dx dv. \end{aligned}$$

Ensuite, nous calculons les dérivées

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x, v) &= \omega k'(|(x, v)| + \omega t) e^{-\alpha t} - \alpha k(|(x, v)| + \omega t) e^{-\alpha t}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x, v) &= \frac{x}{|(x, v)|} k'(|(x, v)| + \omega t) e^{-\alpha t}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(t, x, v) &= \frac{v}{|(x, v)|} k'(|(x, v)| + \omega t) e^{-\alpha t}.\end{aligned}$$

En remplaçant les dérivées par leur expression, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}& \int_{Q_T} |f - f_h|^2 k'(|(x, v)| + \omega t) e^{-\alpha t} \left(\omega + \frac{v x + E_h(t, x) v}{|(x, v)|} \right) dt dx dv \\ & - \alpha \int_{Q_T} |f - f_h|^2 k(|(x, v)| + \omega t) e^{-\alpha t} dt dx dv \\ & \geq -4 \left\| \frac{\partial f}{\partial v} \right\|_{L^\infty} L \bar{R} \int_{Q_T} |f - f_h|^2 k(|(x, v)| + \omega t) e^{-\alpha t} dt dx dv \\ & - 2 |f|_{1, \infty} \nu_{h, \Delta t}^1 \left([0, T[\times]0, L[\times B(0, \bar{R}) \right) - \nu_{h, \Delta t}^2 \left([0, T[\times]0, L[\times B(0, \bar{R}) \right).\end{aligned}$$

Mais comme $k' \leq 0$ et $\omega = \max(2\bar{R}; \frac{3}{2}L)$, le terme suivant est positif :

$$\omega + \frac{v x + E_h(t, x) v}{|(x, v)|} \geq 0,$$

Or, $k(|(x, v)| + \omega t) = 1$ lorsque $(t, x, v) \in Q_T$ et $\alpha = 5 \left\| \frac{\partial f}{\partial v} \right\|_{L^\infty} L \bar{R}$, ce qui permet d'établir le résultat :

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} e^{-\alpha t} |f - f_h|^2 dt dx dv &\leq C_{1, T} \left[\nu_{h, \Delta t}^1 \left([0, T[\times]0, L[\times B(0, \bar{R}) \right) \right. \\ & \left. + \nu_{h, \Delta t}^2 \left([0, T[\times]0, L[\times B(0, \bar{R}) \right) \right].\end{aligned}$$

À l'aide des majorations sur $\nu_{h, \Delta t}^2$ et $\nu_{h, \Delta t}^1$ établies par la Proposition 2.5, nous complétons la preuve. \square

2.6 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons proposé un schéma de type volumes finis pour la résolution numérique de l'équation de Vlasov-Poisson dans l'espace des phases (x, v) . La simplicité de ce schéma permet de montrer la convergence vers la solution du système. L'utilisation de la formulation faible du problème nécessite seulement une

estimation de la fonction de distribution dans l'espace $L^1 \cap L^\infty$; ce qui permet de traiter la plupart des applications physiques (voir par exemple les problèmes de faisceaux de particules). Nous avons choisi d'étudier, par souci de clarté, le problème de Vlasov-Poisson avec des conditions aux limites périodiques en la variable x . Cependant, la démonstration s'adapte au problème de Cauchy sur tout l'espace et pour des solutions faibles moins régulières puisque nous n'utilisons pas les courbes caractéristiques [7] (mais dans ce cas, il n'y a pas, en général, unicité de la solution). La démonstration des estimations d'erreurs convient bien à l'équation de Vlasov puisque la formulation faible est satisfaite pour toute fonction $\phi(f_h)$ avec ϕ convexe et localement lipschitzienne, ce qui suffit à démontrer le résultat. Nous évitons ainsi de faire appel à l'arsenal utilisé pour les équations hyperboliques non linéaires, c'est-à-dire des formulations faibles, entropiques et discrètes.

La méthode de convergence s'applique relativement facilement aux problèmes en dimension supérieure et pour des maillages non cartésiens, pourvu que le maillage de l'espace physique soit le même pour le calcul de la fonction de distribution et des champs, de manière à éviter des formules d'interpolations entre les maillages. Les difficultés se situent plutôt dans l'obtention d'estimations *a priori* sur les champs électromagnétiques autoconsistants ou sur les quantités de la forme $\int_{\mathbb{R}^d} f \psi(v) dv$ pour traiter la non linéarité particulière de l'équation de Vlasov couplée avec les équations de Poisson ou de Maxwell.

Dans le cas du système de Vlasov-Poisson, il est possible de montrer une estimation sur le gradient du champ électrique puisque le caractère elliptique de l'équation de Poisson permet de gagner de la régularité à condition d'avoir une estimation sur la densité de charge ρ , obtenue à partir de la conservation de l'énergie du système. Pour montrer la convergence, il faudrait ensuite établir une majoration sur $\frac{\partial E}{\partial t}$ à l'aide de la version discrète de l'équation de continuité

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0.$$

Une estimation de $\frac{\partial E_h}{\partial t}$ n'est pas évidente à établir pour des maillages non structurés. Pour le système de Vlasov-Maxwell, il n'est pas possible de montrer la convergence forte des champs électromagnétiques puisque les équations de Maxwell ne permettent pas de gagner en régularité. L'espoir est donc de donner une version discrète des lemmes de moyenne pour établir la convergence forte du terme $\int_{\mathbb{R}^d} f \psi(v) dv$.

Concernant les résultats numériques, le schéma présenté dans ce chapitre est seulement d'ordre un et l'évolution de la fonction de distribution n'est pas suffisamment précise. De plus, la condition de stabilité sur le pas de temps peut devenir très restrictive si le support de la fonction de distribution en vitesse est grand. Au chapitre suivant, nous proposons une méthode de conservation des flux directement inspirée de ce schéma : nous discrétisons les flux sur le bord de chaque cellule par un schéma d'ordre élevé, puis pour éviter une condition *CFL*, nous utilisons les courbes caractéristiques.

Bibliography

- [1] J. Batt, The nonlinear Vlasov-Poisson system of partial differential equations in stellar dynamics. *Publications de CNER Mathématiques Pures et Appliquées* **5** (1983), 1–30.
- [2] C.K. Birdsall et A.B. Langdon, Plasma Physics Via Computer Simulation. *McGraw-Hill* (1985).
- [3] J.P. Boris et D.L. Book, Solution of Continuity Equations by the Method of Flux-Corrected Transport. *J. Comput. Phys.* **20** (1976), 397–431.
- [4] Cheng et G. Knorr, The integration of the Vlasov equation in configuration space. *J. Comput. Phys.* **22** (1976), 330–351.
- [5] G.-H. Cottet et P.-A. Raviart, Particle Methods for the One Dimensional Vlasov-Poisson Equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **21** (1984), 52–76.
- [6] J. Cooper et A. Klimas, Boundary value problems for the Vlasov-Maxwell equation in one dimension. *J. Math. Anal. Appl.* **75** (1980), 306–329.
- [7] R.J. DiPerna et P.-L. Lions, Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307** (1988), 306–329.
- [8] E. Fijalkow, A numerical solution to the Vlasov equation. *Comput. Phys. Communications* **116** (1999), 319–328.
- [9] R. Eymard, T. Gallouet et R. Herbin, Finite Volume Methods. *Prépublication n° 97-19 du LATP, UMR 6632 Marseille* (1995).
- [10] A.J. Klimas et W.M. Farrell, A Splitting Algorithm for Vlasov Simulation with Filamentation Filtration. *J. Comput. Phys.* **110** (1994), 150–163.
- [11] R.J. LeVêque, Numerical Methods for Conservation Laws. *Birkhäuser* (1992).
- [12] P. Mineau, Simulation en Physique des Plasmas. *Thèse de l'Université d'Orléans* (1997).
- [13] J. Schaeffer, Convergence of a Difference Scheme for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck System in One Dimension. *SIAM J. Numer. Anal.* **35** (1997), 1149–1175.
- [14] D. Serre, Systèmes de lois de conservation I. *Diderot éditeur, arts et sciences* (1996).
- [15] M. Shoucri et G. Knorr, Numerical integration of the Vlasov equation. *J. Comput. Phys.* **14** (1974), 84–92.
- [16] E. Sonnendrücker, J.-R. Roche, P. Bertrand et A. Ghizzo, The Semi-Lagrangian Method for the Numerical Resolution of Vlasov Equations. *J. Comput. Phys.* **149** (1999), 201–220.

- [17] M.-H. Vignal, Convergence of a finite volume scheme for an elliptic-hyperbolic system. *RAIRO, Modélisation Math. Anal. Numer.* **30** (1996), 841–872.
- [18] J.-P. Vila et Ph. Villedieu, Convergence de la méthode des volumes finis pour les systèmes de Friedrichs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **325** (1997), 671–676.
- [19] S. Wollman et E. Ozizmir, Numerical approximation of the one-dimensional Vlasov-Poisson system with periodic boundary conditions. *SIAM J. Numer. Anal.* **33** (1996), 1377–1409.
- [20] S. Wollman, On the approximation of the Vlasov-Poisson system by particle methods. *SIAM J. Numer. Anal.* **37** (2000), 1369–1398.
- [21] Y. Zheng et A. Majda, Existence of Global Weak solutions to One Component Vlasov-Poisson and Fokker-Planck-Poisson Systems in One Space Dimension with Measures as Initial Data. *Comm. Pure Appl. Math.* **47** (1994), 1365–1401.

Chapter 3

Quelques schémas conservatifs pour l'équation de Vlasov.

3.1 Introduction.

L'équation de Vlasov décrit l'évolution d'un système de particules soumises aux champs électromagnétiques extérieurs et autoconsistants générés par le déplacement des particules. L'inconnue $f(t, x, v)$, dépendant du temps t , de la position x et de la vitesse v , représente la fonction de distribution des particules (électrons, ions,...) dans l'espace des phases. Ce modèle est couramment utilisé pour l'étude de la propagation des faisceaux de particules ou en physique des plasmas.

La résolution numérique de l'équation de Vlasov s'effectue le plus souvent à l'aide de méthodes particulaires (Particle In Cell) qui consistent à approcher le plasma ou l'ensemble des particules formant le faisceau par un nombre fini de macro particules. Les trajectoires de ces particules sont calculées à partir des courbes caractéristiques données par l'équation de Vlasov, tandis que les champs extérieurs et autoconsistants sont approchés sur un maillage de l'espace physique. Pour une description plus détaillée, le lecteur est renvoyé au livre de Birdsall et Langdon [2]. Ces méthodes permettent la plupart du temps d'obtenir des résultats très satisfaisants avec un nombre relativement peu élevé de macro particules. Cependant, il est bien connu que le bruit numérique généré par ce type de méthodes est trop important pour décrire précisément la fonction de distribution dans l'espace des phases. De plus, ce bruit numérique décroît seulement en $1/\sqrt{N}$ lorsque le nombre de particules N croît. Pour remédier à ce genre de problème, des méthodes discrétisant l'équation de Vlasov sur un maillage de l'espace des phases ont été proposées. Parmi celles-ci, la méthode de transformation de Fourier en (x, v) est basée sur l'utilisation de "Transformés de Fourier Rapides" (Fast Fourier Transform) de la fonction de distribution dans l'espace des phases, mais est seulement valide pour des conditions de bords périodiques [12, 13]. En effet, pour les problèmes non périodiques, des oscillations de Gibbs se forment sur le bord et se propagent à l'intérieur du domaine. Une méthode de type éléments finis a

aussi été proposée [21, 22]. Celle-ci est particulièrement adaptée pour le traitement de problèmes dans des géométries complexes rencontrés dans la plupart des applications, mais nécessite la résolution numérique d'un système matriciel à chaque itération ce qui est un inconvénient pour la résolution de l'équation de Vlasov en dimension élevée. La méthode semi-lagrangienne, qui consiste à calculer la fonction de distribution sur les noeuds d'une grille de l'espace des phases en suivant les courbes caractéristiques, est également utilisée. Pour connaître la valeur de f à l'origine de la caractéristique, une méthode d'interpolation d'ordre élevé est nécessaire. E. Sonnendrücker *et al.* [18, 19] ont proposé la reconstruction à l'aide de splines cubiques, ce qui permet d'obtenir de très bons résultats en terme de précision. Cependant l'utilisation de ce type d'interpolation détruit le caractère local de la reconstruction. Nakamura et Yabe ont pour leur part présenté la méthode CIP (Cubic Interpolated Propagation), qui est basée sur l'approximation des gradients de la fonction de distribution dans le but d'utiliser une interpolation de type Hermite [20]. Cette méthode est très coûteuse en place mémoire puisqu'elle nécessite le stockage de f , $\nabla_x f$ et $\nabla_v f$. Un autre schéma pour l'approximation de l'équation de Vlasov est la méthode FCT (Flux Corrected Transport) proposée dans [5, 6] ou plus récemment la méthode FBM (Flux Balance Method) [9] : l'idée de base de ces méthodes est de calculer la moyenne de la solution de l'équation de Vlasov par un schéma conservatif sur chaque cellule de la grille discrétisant l'espace des phases.

L'inconvénient commun à l'ensemble de ces méthodes est la non préservation de la positivité, ce qui représente un désavantage pour des simulations en temps longs puisque des oscillations numériques peuvent se développer. Dans un premier temps, l'objectif de ce chapitre est de proposer de nouveaux schémas numériques, les méthodes PFC (Positive and Flux Conservative), permettant d'obtenir une approximation précise de la fonction de distribution dans l'espace des phases, la conservation de la masse globale (nous parlerons plutôt de conservation du nombre de particules), la préservation de la positivité. De plus, nous proposerons des méthodes d'interpolations locales, ce qui permettra une parallélisation plus directe. Ensuite, nous présentons différents types d'interpolations locales pour la méthode semi-lagrangienne. Ces méthodes doivent donner une description aussi précise que la reconstruction par spline cubique tout en conservant l'aspect local de l'interpolation. Enfin, nous introduisons un nouveau schéma aux différences finies issu de la dynamique des fluides (équation d'Euler incompressible en dimension deux) qui conserve les propriétés de l'équation de Vlasov et que nous stabilisons par l'ajout d'un terme de collisions.

Ce chapitre s'organise de la manière suivante : dans une première partie, nous décrivons brièvement l'équation de Vlasov en rappelant quelques propriétés de la solution comme la conservation de l'entropie cinétique, les normes L^p de f et l'énergie. Ensuite, nous présentons différentes méthodes conservatives pour la discrétisation d'une équation de transport et plus particulièrement de l'équation de Vlasov-Poisson, en utilisant les courbes caractéristiques. Nous donnons différentes techniques de reconstruction qui permettent de contrôler les oscillations numériques. Dans la dernière partie, nous présentons des résultats numériques en dimension deux et quatre, dans

l'espace des phases pour comparer les schémas en terme de précision et de temps de calcul.

3.2 L'équation de Vlasov.

L'évolution de la densité d'une seule espèce de particules $f(t, x, v)dx dv$ dans l'espace des phases $(x, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $d = 1, \dots, 3$, est donnée par l'équation de Vlasov,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F(t, x, v) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (3.0)$$

où le champ de force $F(t, x, v)$ est couplé avec la fonction de distribution f , ce qui donne un système non linéaire. Nous mentionnons les modèles de Vlasov-Poisson (VP) et Vlasov-Maxwell (VM) décrivant l'évolution de particules sous l'effet des champs électromagnétiques autoconsistants : nous définissons d'abord la densité de charge $\rho(t, x)$ et la densité de courant $j(t, x)$ par

$$\rho(t, x) = q \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv, \quad j(t, x) = q \int_{\mathbb{R}^d} v f(t, x, v) dv, \quad (3.0)$$

où q est la charge d'une particule. Le champ de force est donné pour l'équation de Vlasov-Poisson par

$$F(t, x, v) = \frac{q}{m} E(t, x), \quad E(t, x) = -\nabla_x \phi(t, x), \quad -\Delta_x \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.0)$$

où m représente la masse d'une seule particule. Pour l'équation de Vlasov-Maxwell, nous avons

$$F(t, x, v) = \frac{q}{m} (E(t, x) + v \wedge B(t, x)) \quad (3.0)$$

et E, B sont solutions des équations de Maxwell

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \nabla \times B = -\frac{j}{\varepsilon_0}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \\ \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot B = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec la condition de compatibilité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0, \quad (3.1)$$

qui est automatiquement vérifiée par la solution de l'équation de Vlasov.

Nous rappelons maintenant quelques estimations classiques sur les équations de (VP) et (VM). D'abord en supposant que la donnée initiale $f_0(x, v)$ est positive,

la solution $f(t, x, v)$ reste positive au cours du temps. Ensuite, en observant que $\operatorname{div}_{x,v}(v, F(t, x, v)) = 0$, nous déduisons immédiatement que pour toute fonction $\beta \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \beta(f(t, x, v)) dx dv = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

En particulier toutes les normes L^p de f , pour $1 \leq p \leq +\infty$, sont préservées. De plus, en prenant $\beta(r) = r \ln(r)$, nous obtenons la conservation de l'entropie cinétique

$$\frac{d}{dt} H(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) \ln(f(t, x, v)) dx dv = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Ensuite, en multipliant l'équation de Vlasov par $|v|^2$ et en intégrant par parties, nous démontrons la conservation de l'énergie pour l'équation (VP)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) |v|^2 dx dv + \varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^d} |E(t, x)|^2 dx = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Finalement, nous remarquons que l'équation de Vlasov, couplée avec l'équation de Poisson, conserve également la masse globale et l'impulsion,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} dx dv = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

3.3 La méthode de conservation des flux.

Nous introduisons un nouveau schéma conservatif pour la discrétisation d'une équation de transport. Nous proposons ensuite plusieurs techniques de reconstruction. Contrairement aux méthodes eulériennes classiques de type différences finies ou volumes finis explicites en temps, la méthode que nous proposons n'est pas contrainte par une condition CFL sur le pas de temps puisque nous utilisons les courbes caractéristiques. Le couplage de l'équation de Vlasov avec les équations de Poisson ou de Maxwell provoque la "filamentation" de la fonction de distribution dans l'espace des phases, ceci constitue la principale des difficultés dans la construction d'un schéma numérique pour l'équation de Vlasov. En effet, la fonction de distribution $f(t, x, v)$ est constante le long des courbes caractéristiques qui deviennent si proches les unes des autres que les régions de l'espace des phases où $f(t, x, v)$ prend des valeurs différentes se rapprochent et de forts gradients sont ainsi générés. À partir d'un certain temps, la grille de l'espace des phases devient trop grossière pour suivre ces filaments devenus trop fins. Les différentes méthodes présentées brièvement dans l'introduction ne possèdent pas de mécanismes pour distinguer les oscillations numériques de ces filaments. L'algorithme devrait effectivement être d'ordre élevé lorsque le concept d'ordre est relié à celui de la précision et devrait contrôler les oscillations lorsque les gradients deviennent trop forts ou lorsque la fonction de distribution tend vers zéro. La méthode conservative mise au point est basée sur ces principes.

Le point de départ de notre méthode est la méthode FBM (Flux Balanced Method) [9], qui discrétise l'équation de Vlasov sous sa forme conservative : nous observons d'abord qu'en utilisant un schéma à pas fractionnaire en temps, nous pouvons nous restreindre, sans perte de généralités, à une équation de transport en dimension une

$$\partial_t f + \partial_x (u(t, x) f) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [x_{min}, x_{max}]. \quad (3.1)$$

Nous supposons que le champ de vitesse $u(t, x)$ est suffisamment régulier, par exemple $u(t, x)$ est continue en (t, x) et localement lipschitzienne en x . Ainsi, nous pouvons définir, au sens classique, les courbes caractéristiques correspondant à l'équation de transport et solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds}(s) = u(s, X(s)), \\ X(t) = x. \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous notons par $X(s, t, x)$ la solution de (3.3) et considérons le jacobien $J(s, t, x) = \partial_x X(s, t, x)$. Dans [4], les auteurs montrent que le jacobien $J(s, t, x)$ est strictement positif pour tout $(s, t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et la solution de l'équation de transport (3.3) s'écrit

$$f(t, x) = f(s, X(s, t, x)) J(s, t, x), \quad (3.1)$$

ce qui exprime la conservation du nombre de particules le long des courbes caractéristiques

$$\forall K \subset \mathbb{R}, \quad \int_K f(t, x) dx = \int_{X(s, t, K)} f(s, y) dy, \quad (3.1)$$

où

$$X(s, t, K) = \{y \in \mathbb{R} : \exists z \in K \quad y = X(s, t, z)\}.$$

Cette propriété reste vraie en dimension supérieure, $d \geq 1$. Maintenant, nous introduisons une suite de points $(x_{i+1/2})_{i \in I}$ du domaine de calcul $[x_{min}, x_{max}]$ et nous posons $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ et $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Supposons que les valeurs de la fonction de distribution soient connues au temps $t^n = n \Delta t$, nous trouvons les nouvelles valeurs au temps t^{n+1} en intégrant l'équation de Vlasov sur chaque intervalle discret. Ainsi, en utilisant la propriété de conservation des particules (3.3) et en rappelant que le jacobien $x \mapsto J(t^n, t^{n+1}, x)$ est strictement positif, nous obtenons sur chaque intervalle

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t^{n+1}, x) dx = \int_{X(t^n, t^{n+1}, x_{i-1/2})}^{X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2})} f(t^n, x) dx.$$

Alors, en posant

$$\Phi_{i+1/2}(t^n) = \int_{X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2})}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x) dx,$$

nous décrivons la conservation de la masse :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t^{n+1}, x) dx = \Phi_{i-1/2}(t^n) + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x) dx - \Phi_{i+1/2}(t^n). \quad (3.1)$$

L'évaluation de la moyenne de la solution sur $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ permet d'ignorer les détails de la solution exacte qui peuvent être très coûteux à estimer.

En général, nous ne pouvons pas donner une expression explicite des courbes caractéristiques, il est donc nécessaire d'introduire une discrétisation en temps du système d'équation différentielle ordinaire (3.3). En utilisant un schéma saute-mouton d'ordre deux, nous aboutissons à la résolution d'un problème de point fixe, dans lequel nous cherchons $x^n = X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2})$ tel que

$$\begin{cases} x_{i+1/2} - x^n = \Delta t u(t^{n+1/2}, x^{n+1/2}), \\ t^{n+1/2} = t^n + \frac{\Delta t}{2}, \quad x^{n+1/2} = \frac{x_{i+1/2} + x^n}{2}. \end{cases}$$

Ce problème peut être résolu de manière itérative en utilisant un point fixe de Newton. Nous remarquons que la plupart du temps, pour les équations de transport en cinétique, le schéma en temps à pas fractionnaire permet d'éviter cette situation puisque les courbes caractéristiques sont des droites ou peuvent être calculées explicitement.

La principale étape consiste maintenant à choisir une méthode efficace pour reconstruire une approximation de la fonction de distribution à partir des valeurs moyennes sur chaque intervalle C_i . Dans [9], E. Fijalkow utilise seulement une interpolation linéaire, mais cette méthode ne conserve pas la positivité et ne permet pas de contrôler les oscillations numériques. La méthode proposée par J. P. Boris et D. L. Book [5], faisant appel aux limiteurs de pentes classiques comme "minmod" et "superbee", est trop dissipative pour obtenir une description précise de la fonction de distribution ou au contraire les méthodes non-dissipatives pour les équations de transport [8] deviennent instables. Ici, nous utiliserons une reconstruction via primitive : soit $F(t^n, \cdot)$ une primitive de la fonction de distribution $f(t^n, \cdot)$, nous noterons par

$$f_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x) dx,$$

ainsi, $F(t^n, x_{i+1/2}) - F(t^n, x_{i-1/2}) = \Delta x f_i^n$, et

$$F(t^n, x_{i+1/2}) = \Delta x \sum_{k=0}^i f_k^n = w_i^n.$$

Dans la suite, la variable en temps t^n agit comme un simple paramètre, elle sera donc abandonnée. Nous présentons deux méthodes de reconstructions différentes.

3.3.1 La reconstruction ENO.

La méthode ENO (Essentiellement Non Oscillante) a été introduite par Harten *et al.* dans [11]. Elle est couramment utilisée pour la discrétisation des équations hyperboliques et permet de contrôler les oscillations numériques lors de l'apparition de discontinuités. Contrairement aux équations hyperboliques classiques, l'équation de Vlasov ne développe pas de chocs, mais de forts gradients peuvent apparaître dans l'espace des phases. La reconstruction de type ENO paraît bien adaptée pour traiter ce type de problème. Nous rappelons d'abord les formules de différences divisées qui jouent un rôle important pour la mise au point de l'algorithme

$$F[x_{i+1/2}, x_{i+3/2}, \dots, x_{i+p+1/2}] = \frac{F[x_{i+3/2}, \dots, x_{i+p+1/2}] - F[x_{i+1/2}, \dots, x_{i+p-1/2}]}{x_{i+p+1/2} - x_{i+1/2}},$$

$$F[x_{i+1/2}] = F(x_{i+1/2}) = w_i. \tag{3.0}$$

Pour une fonction F satisfaisant les propriétés pour $p \geq 1$,

- Si $F(x) \in C^p([x_{i+1/2}, x_{i+p+1/2}])$, alors

$$\exists \zeta \in [x_{i+1/2}, x_{i+p+1/2}], \quad F[x_{i+1/2}, x_{i+3/2}, \dots, x_{i+p+1/2}] = \frac{1}{p!} \frac{d^p F}{dx^p}(\zeta).$$

- Si la k -ème dérivée de $F(x)$ est discontinue pour $0 \leq k \leq p$ sur l'intervalle $[x_{i+1/2}, x_{i+p+1/2}]$, alors

$$F[x_{i+1/2}, x_{i+3/2}, \dots, x_{i+p+1/2}] = O(\Delta x^{k-p}) [\omega^{(k)}],$$

où $[\omega^{(k)}]$ représente le saut de la k -ème dérivée. La reconstruction de type ENO consiste alors à choisir le "stencil" (points d'interpolation) pour lequel l'approximation est la plus régulière, c'est-à-dire pour laquelle la différence divisée est la plus petite en valeur absolue sur l'intervalle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Nous définissons d'abord $q_1(x)$, le polynôme de degré un, interpolant la fonction $F(x)$ en $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$,

$$q_1(x) = w_{i-1} + (x - x_{i-1/2}) \frac{w_i - w_{i-1}}{\Delta x},$$

et posons $d_1(i) = i$. Nous raisonnons maintenant par récurrence, supposons que le polynôme de degré k interpolant la fonction $F(x)$ aux points

$$x_{d_k(i)-1/2}, \dots, x_{d_k(i)+k-1/2}$$

soit connu. Pour déterminer le polynôme $q_{k+1}(x)$, nous considérons les $k+2$ points obtenus en ajoutant aux précédents le premier point à gauche ou le premier point à droite et choisissons le point d'interpolation pour lequel la différence divisée est la plus petite en valeur absolue

$$d_{k+1}(i) = \begin{cases} d_k(i) - 1 & \text{si } |F[x_{d_k(i)-3/2}, \dots, x_{d_k(i)+k-1/2}]| \leq |F[x_{d_k(i)-1/2}, \dots, x_{d_k(i)+k+1/2}]|, \\ d_k(i) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous continuons l'algorithme jusqu'à atteindre l'ordre souhaité. À partir de cette reconstruction, nous établissons la propriété démontrée par A. Harten *et al.* [11],

Proposition 3.1 *Nous supposons que la fonction $F(x)$ est $r+1$ continuellement dérivable et définissons $F_h(x)$, son approximation polynomiale par morceaux telle que*

$$\forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], \quad F_h(x) = q_r(x),$$

où $q_r(x)$ est le polynôme de degré r construit en suivant l'algorithme précédent.

Alors,

- $\frac{d^k q_r}{dx^k}(x) = \frac{d^k F}{dx^k}(x) + O(\Delta x^{r+1-k}), \quad 0 \leq k \leq r,$
- $q_r(x_{j+1/2}) = F(x_{j+1/2}), \quad \forall j \in \{d_{r(i)-1/2}, \dots, d_{r(i)+r-1/2}\},$
- $q_r(x)$ est une approximation non oscillante au sens suivant

$$TV[q_r(\cdot)] \leq TV[F(\cdot)] + O(\Delta x^{r+1}),$$

où la variation totale de la fonction $F(\cdot)$ est le nombre défini par la limite supérieur du taux d'accroissement de F ,

$$TV[F(\cdot)] = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int |F(x + \varepsilon) - F(x)| dx.$$

Nous renvoyons à [11] pour la démonstration. Cette dernière inégalité permet de contrôler les oscillations numériques à l'ordre $r + 1$. À partir de cette approximation d'ordre élevé, nous pouvons approcher le flux de particules $\Phi_{i+1/2}(t^n)$ par

$$\Phi_{i+1/2}(t^n) = \int_{X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2})}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x) dx = F_h(x_{i+1/2}) - F_h(X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2})).$$

Cette méthode a été implantée jusqu'à l'ordre quatre. Ce n'est pas un schéma positif, mais les oscillations numériques sont atténuées.

3.3.2 La méthode Positive et à Flux Conservatif (PFC).

Comme précédemment, nous utilisons la reconstruction via primitive, mais le "stencil" est désormais fixé. Pour assurer la préservation de la positivité et le principe du maximum dans l'étape de reconstruction, nous introduisons des correcteurs de pentes. En effet, c'est seulement en sacrifiant le principe d'ordre élevé que nous pourrions espérer obtenir un schéma positif.

Dans la suite, nous notons par $f_\infty = \max_{j \in I} \{f_j\}$.

Une approximation d'ordre deux. Supposons pour simplifier que la vitesse de propagation $u(t, x)$ soit positive, nous construisons alors une première approximation de f , d'ordre élevé sur l'intervalle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ en utilisant les points $\{x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}\}$ et la propriété $w_i - w_{i-1} = \Delta x f_i$:

$$\overline{F}_h(x) = w_{i-1} + (x - x_{i-1/2})f_i + \frac{1}{2}(x - x_{i-1/2})(x - x_{i+1/2})\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}.$$

Ainsi, par dérivation, nous obtenons une approximation d'ordre élevé de la fonction de distribution sur l'intervalle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$:

$$\overline{f}_h(x) = \frac{d\overline{F}_h}{dx}(x) = f_i + (x - x_i)\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}.$$

Mais, cette approximation ne satisfait pas le principe du maximum et des oscillations numériques peuvent apparaître, nous introduisons alors les correcteurs de pentes

$$\epsilon_i = \begin{cases} \min\left(1; 2f_i/(f_{i+1} - f_i)\right) & \text{si } f_{i+1} - f_i > 0, \\ \min\left(1; -2(f_i - f_{i+1})/(f_{i+1} - f_i)\right) & \text{si } f_{i+1} - f_i < 0. \end{cases} \quad (3-1)$$

Nous définissons alors une nouvelle approximation, où les pentes sont atténuées lorsque la solution devient moins régulière,

$$f_h(x) = f_i + \epsilon_i(x - x_i)\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}, \quad \forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]. \quad (3-1)$$

À partir de cette reconstruction, nous pouvons démontrer la proposition suivante

Proposition 3.2 *L'approximation numérique définie par (3.3.2) satisfait :*

- *La conservation locale de la masse : pour tout $i \in I$, $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f_h(x)dx = \Delta x f_i$.*
- *Le principe du maximum : pour tout $x \in [x_{min}, x_{max}]$, $0 \leq f_h(x) \leq f_\infty$.*

De plus, si nous supposons que la variation totale de la fonction de distribution $f(x)$ est bornée, alors l'estimation globale suivante a lieu

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} |f_h(x) - \overline{f}_h(x)|dx \leq \Delta x \sum_i (1 - \epsilon_i)|f_{i+1} - f_i| \leq TV(f) \Delta x.$$

Définissons une approximation du flux $\Phi_{i+1/2}(t^n)$: nous recherchons d'abord l'intervalle C_j tel que $X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2}) \in C_j$ et posons $\alpha_i = x_{j+1/2} - X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2})$, lequel satisfait $0 \leq \alpha_i \leq \Delta x$ et le flux de particules est donné par

$$\Phi_{i+1/2}(t^n) = \int_{x_{j+1/2}-\alpha_i}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x)dx = \alpha_i \left[f_j + \frac{\epsilon_j}{2} \left(1 - \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) (f_{j+1} - f_j) \right] + \Delta x \sum_{k=j+1}^i f_k.$$

Par symétrie, nous obtenons une approximation de $\Phi_{i+1/2}(t^n)$ lorsque la vitesse de propagation $u(t, x)$ est négative, en posant $\alpha_i = x_{j-1/2} - X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2})$, alors $-\Delta x \leq \alpha_i \leq 0$ et

$$\Phi_{i+1/2}(t^n) = \int_{x_{j-1/2-\alpha_i}}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x) dx = \alpha_i \left[f_j - \frac{\epsilon_j}{2} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\Delta x} \right) (f_j - f_{j-1}) \right] + \Delta x \sum_{k=i+1}^{j-1} f_k,$$

où ϵ_j est donné par

$$\epsilon_j = \begin{cases} \min\left(1; 2(f_\infty - f_j)/(f_j - f_{j-1})\right) & \text{si } f_j - f_{j-1} > 0, \\ \min\left(1; -2f_j/(f_j - f_{j-1})\right) & \text{si } f_j - f_{j-1} < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Une approximation d'ordre trois. Nous généralisons maintenant la méthode précédente à l'ordre trois. Sur l'intervalle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, nous utilisons les points d'interpolation $\{x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}\}$ pour approcher la fonction primitive, et introduisons des correcteurs de pentes pour finalement définir une nouvelle approximation : pour tout $x \in C_i$,

$$\begin{aligned} f_h(x) &= f_i \\ &+ \frac{\epsilon_i^+}{6\Delta x^2} \left[2(x - x_i)(x - x_{i-3/2}) + (x - x_{i-1/2})(x - x_{i+1/2}) \right] (f_{i+1} - f_i) \\ &- \frac{\epsilon_i^-}{6\Delta x^2} \left[2(x - x_i)(x - x_{i+3/2}) + (x - x_{i-1/2})(x - x_{i+1/2}) \right] (f_i - f_{i-1}), \end{aligned} \quad (3.0)$$

avec les correcteurs de pentes

$$\epsilon_i^+ = \begin{cases} \min\left(1; 2f_i/(f_{i+1} - f_i)\right) & \text{si } f_{i+1} - f_i > 0, \\ \min\left(1; -2(f_\infty - f_i)/(f_{i+1} - f_i)\right) & \text{si } f_{i+1} - f_i < 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

et

$$\epsilon_i^- = \begin{cases} \min\left(1; 2(f_\infty - f_i)/(f_i - f_{i-1})\right) & \text{si } f_i - f_{i-1} > 0, \\ \min\left(1; -2f_i/(f_i - f_{i-1})\right) & \text{si } f_i - f_{i-1} < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Proposition 3.3 *L'approximation de la fonction de distribution $f_h(x)$ définie par (3.0)-(3.3.2) et construite en utilisant la méthode d'interpolation d'ordre trois satisfait*

- *La conservation locale de la masse : pour tout $i \in I$, $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f_h(x) dx = \Delta x f_i$.*
- *Le principe du maximum : pour tout $x \in [x_{min}, x_{max}]$, $0 \leq f_h(x) \leq f_\infty$.*

De plus, si nous supposons que la variation totale de la fonction de distribution $f(x)$ est bornée, alors l'estimation globale suivante a lieu

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} |f_h(x) - \bar{f}_h(x)| dx \leq 4TV(f) \Delta x,$$

où \bar{f}_h désigne l'approximation d'ordre trois de f sans correcteur de pente.

Preuve : considérons $x \in C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ et notons par

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[2(x - x_i)(x - x_{i-3/2}) + (x - x_{i-1/2})(x - x_{i+1/2}) \right], \\ \beta(x) &= -\frac{1}{\Delta x^2} \left[2(x - x_i)(x - x_{i+3/2}) + (x - x_{i-1/2})(x - x_{i+1/2}) \right].\end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \alpha(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \beta(x) dx = 0,$$

ce qui donne la conservation locale de la masse ou du nombre de particules sur chaque cellule. Pour obtenir la préservation de la positivité en supposant que les valeurs $(f_j)_j$ sont positives, nous observons que sur la cellule C_i , la fonction $\alpha(x)$ est croissante tandis que la fonction $\beta(x)$ décroît et $\alpha(x), \beta(x) \in [-1, 2]$. Nous décomposons alors la fonction $f_h(x)$ comme la somme de $h(x)$ et de $g(x)$, avec

$$h(x) = \frac{1}{3} \left[f_i + \frac{\alpha(x)}{2} \epsilon_i^+ (f_{i+1} - f_i) \right], \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{3} \left[2f_i + \frac{\beta(x)}{2} \epsilon_i^- (f_i - f_{i-1}) \right].$$

La fonction $h(x)$ est une combinaison linéaire des valeurs f_i et f_{i+1} , ainsi la positivité de $h(x)$ résulte de la valeur prise par ϵ_i^+ . Nous raisonnons de la même manière avec la fonction $g(x)$ et ϵ_i^- , puis, prouvons que $g(x)$ est positive. Finalement, la fonction de distribution $f_h(x)$, qui s'écrit comme la somme de deux fonctions positives, est positive.

En utilisant une décomposition similaire, nous pouvons démontrer que $f_h(x)$ est bornée par f_∞ .

Maintenant, il reste à prouver l'estimation globale sur la reconstruction positive en fonction de l'approximation d'ordre élevé :

$$\begin{aligned}& \int_{x_{min}}^{x_{max}} |f_h(x) - \bar{f}_h(x)| dx \\ &= \sum_i \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} | \alpha(x) (1 - \epsilon_i^+) [f_{i+1} - f_i] + \beta(x) (1 - \epsilon_i^-) [f_i - f_{i-1}] | dx \\ &\leq 2 \Delta x \sum_i (1 - \epsilon_i^+) |f_{i+1} - f_i| + 2 \Delta x \sum_i (1 - \epsilon_i^-) |f_i - f_{i-1}| \\ &\leq 4 \Delta x \sum_i |f_{i+1} - f_i| \leq 4 \Delta x TV(f).\end{aligned}$$

□

À partir de cette reconstruction, nous pouvons approcher le flux de particules $\Phi_{i+1/2}(t^n)$, en recherchant la cellule C_j telle que $X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2}) \in C_j$ et en posant

$\alpha_i = x_{j+1/2} - X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2})$, $0 \leq \alpha_i \leq \Delta x$. Ainsi, pour une vitesse de propagation positive nous obtenons

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1/2}(t^n) &= \int_{x_{j+1/2}-\alpha_i}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x) dx \\ &= \Delta x \sum_{k=j+1}^i f_k + \alpha_i \left[f_j + \frac{\epsilon_j^+}{6} \left(1 - \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) \left(2 - \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) (f_{j+1} - f_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon_j^-}{6} \left(1 - \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) \left(1 + \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) (f_j - f_{j-1}) \right], \end{aligned}$$

tandis que lorsque $u(t, x)$ est négative, en posant $\alpha_i = x_{j-1/2} - X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2})$, on a $-\Delta x \leq \alpha_i \leq 0$ et

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1/2}(t^n) &= \int_{x_{j-1/2}-\alpha_i}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x) dx \\ &= \Delta x \sum_{k=i+1}^{j-1} f_k + \alpha_i \left[f_j - \frac{\epsilon_j^+}{6} \left(1 - \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) \left(1 + \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) (f_{j+1} - f_j) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\epsilon_j^-}{6} \left(2 + \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) \left(1 + \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) (f_j - f_{j-1}) \right]. \end{aligned}$$

Le schéma numérique PFC est alors complètement défini.

Reconstruction en dimension supérieure. Nous présentons brièvement l'algorithme pour étendre la méthode en dimension supérieure (nous nous limitons ici à la dimension deux). Soit $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nous notons $C_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$, une cellule de la grille du domaine de calcul. Nous posons ensuite pour $x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$

$$f_j(x) = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(x, y) dy \quad \text{et} \quad f_{i,j} = \frac{1}{\Delta y \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(x, y) dy dx.$$

La fonction $F_j(x)$ représente la primitive de $f_j(x)$ qui s'annule en $x_{-1/2}$, alors

$$F_j(x_{i+1/2}) - F_j(x_{i-1/2}) = \Delta x f_{i,j}, \quad \text{et} \quad F_j(x_{i+1/2}) = \Delta x \sum_{k=0}^i f_{k,j} = w_{i,j}.$$

Nous construisons alors une approximation de $f_j(x)$, notée $q_j(x)$, à l'ordre trois en utilisant les correcteurs de pentes $\epsilon_{i,j}^+$ et $\epsilon_{i,j}^-$

$$\begin{aligned} q_j(x) &= f_{i,j} & (3.-14) \\ &+ \frac{\epsilon_{i,j}^+}{6 \Delta x^2} \left[2(x - x_i)(x - x_{i-3/2}) + (x - x_{i-1/2})(x - x_{i+1/2}) \right] (f_{i+1,j} - f_{i,j}) \\ &- \frac{\epsilon_{i,j}^-}{6 \Delta x^2} \left[2(x - x_i)(x - x_{i+3/2}) + (x - x_{i-1/2})(x - x_{i+1/2}) \right] (f_{i,j} - f_{i-1,j}), \end{aligned}$$

avec

$$\epsilon_{i,j}^{\pm} = \begin{cases} \min\left(1; 2 f_{i,j}/(f_{i\pm 1,j} - f_{i,j})\right) & \text{si } f_{i+1,j} \pm f_{i,j} > 0, \\ \min\left(1; -2(f_{\infty} - f_{i,j})/(f_{i\pm 1,j} - f_{i,j})\right) & \text{si } f_{i\pm 1,j} - f_{i,j} < 0. \end{cases}$$

Ainsi, $q_j(x)$ est une approximation de $\frac{1}{\Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(x, y) dy$. Nous réitérons le procédé pour x fixé : nous posons $F(x, y)$ la primitive de $f(x, y)$ par rapport à la variable y qui s'annule en $y_{-1/2}$. Elle vérifie donc

$$F(x, y_{j+1/2}) = \Delta y \sum_{k=0}^j f_k(x) = w_j(x).$$

Nous obtenons finalement sur la cellule $C_{i,j}$ une approximation du type

$$\begin{aligned} f_h(x, y) &= f_j(x) & (3.-15) \\ &+ \frac{\epsilon_j^+(x)}{6 \Delta y^2} \left[2(y - y_j)(y - y_{j-3/2}) + (y - y_{j-1/2})(y - y_{j+1/2}) \right] (f_{j+1}(x) - f_j(x)) \\ &- \frac{\epsilon_j^-(x)}{6 \Delta y^2} \left[2(y - y_j)(y - y_{j+3/2}) + (y - y_{j-1/2})(y - y_{j+1/2}) \right] (f_j(x) - f_{j-1}(x)), \end{aligned}$$

où $f_j(x)$ est donné par (3.-14) et les correcteurs de pentes

$$\epsilon_j^{\pm}(x) = \begin{cases} \min\left(1; 2 f_j(x)/(f_{j\pm 1}(x) - f_j(x))\right) & \text{si } f_{j\pm 1}(x) - f_j(x) > 0, \\ \min\left(1; -2(f_{\infty} - f_j(x))/(f_{j\pm 1}(x) - f_j(x))\right) & \text{si } f_{j\pm 1}(x) - f_j(x) < 0. \end{cases}$$

3.4 La méthode semi-lagrangienne.

Comme nous l'avons déjà vu le "champ de vitesse" $(v, E(t, x))$ de l'équation de Vlasov-Poisson est à divergence nulle (c'est également le cas pour Vlasov-Maxwell), ainsi l'équation de Vlasov peut s'écrire sous la forme non conservative,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + E(t, x) \cdot \nabla_v f = 0, \quad \forall (t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d. \quad (3.-17)$$

Cette équation indique que la fonction de distribution est constante le long des courbes caractéristiques. En supposant que la solution est connue au temps $t^n = n \Delta t$, elle vérifie alors au temps t^{n+1}

$$f(t^{n+1}, x, v) = f(t^n, X(t^n, t^{n+1}, x, v), V(t^n, t^{n+1}, x, v)),$$

où les valeurs $(X(t^n, t^{n+1}, x, v), V(t^n, t^{n+1}, x, v))$ représentent la solution du système d'équations différentielles ordinaires correspondant aux courbes caractéristiques (qui sont les trajectoires des particules). La méthode semi-lagrangienne est basée sur

cette propriété. Elle consiste à approcher la fonction de distribution aux points de la grille de l'espace des phases discrétisant le domaine de calcul $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)_{i \in I}$. Les valeurs sont mises à jours à chaque étape de temps en calculant l'origine des caractéristiques dans l'espace des phases $(X(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i), V(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i))$. Puis, à l'aide d'une méthode d'interpolation d'ordre élevé, nous reconstruisons la fonction de distribution sur tout l'espace de manière à calculer une approximation précise de la valeur à l'origine de la caractéristique. Dans des travaux précédents [18], une méthode d'interpolation par spline cubique a été utilisée. Cette méthode donne des résultats très satisfaisants du point de vue de la précision, mais a le désavantage d'être globale, c'est-à-dire que toutes les valeurs de la fonction de distribution sont utilisées pour la reconstruction sur une cellule, ce qui provoque d'importantes communications entre les processeurs lors de calculs parallèles. Nous voulons ici mettre au point une méthode locale pour améliorer la vitesse de calcul tout en gardant une bonne précision. Pour simplifier la présentation, nous nous limiterons au cas unidimensionnel, mais les méthodes d'interpolations présentées ici peuvent facilement s'étendre à la dimension supérieure. Dans la suite, nous supposons que la fonction de distribution est connue au temps t^n sur la grille :

$$f(t^n, \mathbf{x}_i) = f_i^n, \quad \forall i \in I$$

et présenterons deux méthodes de reconstruction basées sur l'interpolation de Lagrange et d'Hermite.

3.4.1 L'interpolation de Lagrange.

Nous cherchons une approximation continue de la fonction $f(t^n, \cdot)$, notée f_h , telle que

$$\forall i \in I, f_h(\mathbf{x}_i) = f_i^n \quad \text{et} \quad \forall x \in [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}], \quad f_h(x) = q_m(x),$$

où le polynôme $q_m(x)$ appartient à $P_{2m+1}[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$, c'est-à-dire à l'ensemble des polynômes de degré $2m+1$ sur l'intervalle $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$. Nous choisissons uniquement les polynômes de degré impair de manière à construire un schéma centré. En effet, l'ensemble des points utilisés pour construire le polynôme $q_m(x)$ sur l'intervalle $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$ est

$$\{ \mathbf{x}_{i-m}, \dots, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+1+m} \}$$

et $q_m(x)$ est de la forme suivante

$$q_m(x) = f_{i-m}^n + \sum_{k=1}^{2m+1} f[\mathbf{x}_{i-m}, \dots, \mathbf{x}_{i-m+k}] \prod_{l=0}^k (x - \mathbf{x}_{i-m+l}),$$

où $f[\mathbf{x}_{i-m}, \dots, \mathbf{x}_{i-m+k}]$ est donnée par la formule des différences divisées que nous avons déjà rencontrée

$$\begin{aligned} f[\mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_{i+p}] &= \frac{f[\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+p}] - f[\mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_{i+p-1}]}{\mathbf{x}_{i+p} - \mathbf{x}_i}, \\ f[\mathbf{x}_i] &= f(\mathbf{x}_i). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Cette méthode d'interpolation donne une approximation qui est simplement continue. Il est donc nécessaire d'utiliser un polynôme de degré assez élevé pour mettre au point un schéma suffisamment précis (m au moins supérieur à 2). Cette méthode a été implantée jusqu'à $m = 4$, c'est-à-dire un polynôme de degré neuf.

À partir de cette reconstruction, nous pouvons définir une approximation de la fonction de distribution au temps t^{n+1} en chaque point de la grille de l'espace des phases. Pour $m = 2$, nous supposons que $X(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x}_i)$ est déjà connu et appartient à l'intervalle $[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}]$, alors nous notons $\alpha_i = [X(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_j] / \Delta x$, avec $\Delta x = \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j$. La solution au point \mathbf{x}_i est donnée par

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, \mathbf{x}_i) &= q_2(X(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x}_i)) \\ &= f_j^n + \alpha_i[f_{j+1}^n - f_j^n] - \frac{1}{2}\alpha_i(1 - \alpha_i)[f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n] \\ &\quad - \frac{1}{6}\alpha_i(1 - \alpha_i)(1 + \alpha_i)[f_{j+2}^n - 3f_{j+1}^n + 3f_j^n - f_{j-1}^n] \\ &\quad + \frac{1}{24}\alpha_i(1 - \alpha_i)(1 + \alpha_i)(2 - \alpha_i)[f_{j+2}^n - 4f_{j+1}^n + 6f_j^n - 4f_{j-1}^n + f_{j-2}^n] \\ &\quad + \frac{1}{120}\alpha_i(1 - \alpha_i)(1 + \alpha_i)(2 - \alpha_i)(2 + \alpha_i) \times \\ &\quad \times [f_{j+3}^n - 5f_{j+2}^n + 10f_{j+1}^n - 10f_j^n + 5f_{j-1}^n - f_{j-2}^n]. \end{aligned}$$

En général, la méthode semi-lagrangienne ne conserve pas la masse globale ou le nombre de particules, mais dans le cas de l'advection linéaire, l'utilisation de schémas centrés permet de récupérer cette propriété. Dans ce qui suit, nous supposons que la vitesse de propagation u est positive,

$$f(t^{n+1}, \mathbf{x}_i) = f(t^n, \mathbf{x}_i - u \Delta t).$$

Nous cherchons (j, α) , tel que $j = [\frac{u\Delta t}{\Delta x}]$, où $[\cdot]$ représente la partie entière et $0 \leq \alpha = u \Delta t - \mathbf{x}_{i-j} \leq \Delta x$. Alors, en utilisant la méthode semi-lagrangienne et en sommant sur l'ensemble des points de la grille, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_i f_i^{n+1} &= \sum_i f_{i-j}^n + \alpha \sum_i [f_{i-j+1}^n - f_{i-j}^n] \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha) \sum_i [f_{i-j+1}^n - 2f_{i-j}^n + f_{i-j-1}^n] + \dots, \end{aligned}$$

À partir des formules de différences divisées, le résultat suivant est immédiat

$$\sum_i f_i^{n+1} = \sum_i f_{i-j}^n = \sum_i f_i^n.$$

Lors de la résolution des équations (VP) ou (VM), la méthode de décomposition des opérateurs revient à résoudre des équations de transport à coefficients constants; la masse globale est donc conservée à chaque étape.

3.4.2 L'interpolation d'Hermite.

Nous présentons ici une reconstruction qui utilise des polynômes d'Hermite de degré trois assurant la continuité de l'approximation ainsi que celle de sa dérivée. Pour cela, il est nécessaire d'estimer la dérivée $\partial_x f(x)$. Dans [20], les auteurs ont traité l'équation d'advection à coefficients constants, et ont proposé d'approcher le profil de la dérivée en dérivant l'équation. Ils obtiennent ainsi un système d'équation de transport pour f et $\partial_x f$. Cette méthode convient bien à la résolution numérique de l'équation de Vlasov-Poisson, mais le coût est d'autant plus élevé que la dimension du problème est importante : des problèmes de place mémoire sont générés lorsque l'on traite les équations dans l'espace des phases $2D$ ou $3D$. Nous proposons ici d'approcher les dérivées en utilisant une formule de différences finies à l'ordre deux et quatre centrées.

$$\partial_x f_i^n = \frac{1}{2\Delta x} [f_{i+1}^n - f_{i-1}^n], \quad \text{ou} \quad \partial_x f_i^n = \frac{1}{12\Delta x} [8[f_{i+1}^n - f_{i-1}^n] - [f_{i+2}^n - f_{i-2}^n]].$$

Ainsi, pour tout $x \in [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$, $f(x)$ est donnée par le polynôme de degré trois $p_3(x)$ tel que

$$\begin{aligned} p_3(\mathbf{x}_i) &= f_i^n, & \partial_x p_3(\mathbf{x}_i) &= \partial_x f_i^n \\ p_3(\mathbf{x}_{i+1}) &= f_{i+1}^n, & \partial_x p_3(\mathbf{x}_{i+1}) &= \partial_x f_{i+1}^n. \end{aligned}$$

À partir de cette reconstruction, nous définissons une nouvelle approximation sur la grille au temps t^{n+1} par $\alpha_i = [X(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_j] / \Delta x$, où $X(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x}_i)$ appartient à $[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}]$. La nouvelle valeur est alors déterminée par

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, \mathbf{x}_i) &= p_3(X(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x}_i)) \\ &= f_i^n + \alpha_i \Delta x \partial_x f_i^n + \alpha_i^2 [3[f_{i+1}^n - f_i^n] - \Delta x [2\partial_x f_i^n + \partial_x f_{i+1}^n]] \\ &\quad + \alpha_i^3 [\Delta x [\partial_x f_{i+1}^n + \partial_x f_i^n] - 2[f_{i+1}^n - f_i^n]]. \end{aligned}$$

Comme pour l'interpolation de Lagrange, un schéma centré permet d'obtenir la conservation du nombre de particules dans le cas particulier d'advection à coefficients constants. En outre, pour calculer l'approximation sur l'intervalle $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$, nous utilisons les points $\{\mathbf{x}_{i-2}, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2}, \mathbf{x}_{i+3}\}$, ce qui correspond au stencil utilisé pour une interpolation de Lagrange de degré cinq.

3.5 La méthode de conservation de l'énergie.

En 1966, A. Arakawa [1] a introduit une méthode aux différences finies pour l'intégration des équations de la dynamique des fluides en dimension deux, permettant en particulier de conserver l'énergie cinétique et la vorticité moyenne. Ce schéma peut facilement s'adapter à l'équation de Vlasov-Poisson. En dimension une, le système de Vlasov-Poisson normalisé s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad \Delta \varphi = \int f dv - 1. \quad (3.29)$$

En posant $\psi = -\varphi + \frac{v^2}{2}$, nous définissons l'hamiltonien $J(\psi, f) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x}$, et l'équation de Vlasov devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + J(\psi, f) = 0.$$

Cette formulation constitue le point de départ de la méthode d'Arakawa, qui donne une approximation, notée $J_h(\psi, f)$, d'ordre deux et quatre de $J(\psi, f)$, en imposant la conservation des quantités suivantes

- Conservation du nombre de particule :

$$\int_{\mathbb{R}^2} J_h(\psi, f) dx dv = 0 \implies \int_{\mathbb{R}^2} f dx dv = c^{te}.$$

- Conservation de l'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}^2} J_h(\psi, f) \psi dx dv = 0 \implies \int_{\mathbb{R}^2} f \psi dx dv = c^{te}.$$

- Conservation de la norme L^2 de f :

$$\int_{\mathbb{R}^2} J_h(\psi, f) f dx dv = 0 \implies \int_{\mathbb{R}^2} f^2 dx dv = c^{te}.$$

Nous calculons trois approximations de $J(\psi, f)$ aux points de la grille $(x_i, y_j)_{i,j}$. Nous notons par $h = x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j$, alors :

$$\begin{aligned} J_{i,j}^1(\psi, f) &= \frac{1}{4h^2} \left[(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) \right. \\ &\quad \left. - (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{i,j}^2(\psi, f) &= \frac{1}{4h^2} \left[\psi_{i+1,j} (f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}) - \psi_{i-1,j} (f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}) \right. \\ &\quad \left. - \psi_{i,j+1} (f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}) + \psi_{i,j-1} (f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{i,j}^3(\psi, f) &= \frac{1}{4h^2} \left[\psi_{i+1,j+1} (f_{i,j+1} - f_{i+1,j}) - \psi_{i-1,j-1} (f_{i-1,j} - f_{i,j-1}) \right. \\ &\quad \left. - \psi_{i-1,j+1} (f_{i,j+1} - f_{i-1,j}) + \psi_{i+1,j-1} (f_{i+1,j} - f_{i,j-1}) \right]. \end{aligned}$$

L'approximation $J_h(\psi, f)$ est finalement donnée par la moyenne des trois approximations, ce qui permet de conserver la masse, l'énergie et la norme L^2 de f_h . Cependant, cette méthode ne conserve pas la positivité et l'utilisation d'un schéma en temps explicite implique une condition de stabilité sur le pas de temps. De plus, ce schéma devient "instable" lorsque des filaments se développent à l'échelle de la grille, c'est-à-dire que des oscillations numériques sont générées et se mélangent aux filaments donnés

par l'équation. Les méthodes précédentes utilisent une procédure d'interpolation qui élimine ces mauvaises oscillations et stabilise l'algorithme. Ici, la conservation de la norme L^2 de f_h ne permet pas d'introduire de la diffusion, ainsi des instabilités numériques apparaissent. Nous ajoutons alors un terme de collisions qui va agir sur les petites échelles pour relaxer la fonction de distribution. En s'inspirant des travaux de R. Robert et J. Someria sur la dynamique des fluides [16], nous pouvons calculer un opérateur de collisions qui maximise l'entropie locale et conserve les moments jusqu'à l'ordre souhaité. Nous désirons mettre au point un schéma qui conserve les moments jusqu'à l'ordre deux, c'est-à-dire la masse globale, l'impulsion et l'énergie. Plus précisément, nous recherchons l'opérateur satisfaisant

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial v},$$

où \mathcal{J} est choisi tel que pour tout x , l'opérateur de collisions maximise l'entropie

$$S(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f \log f dv,$$

et tel qu'il y ait

- une borne sur la norme

$$\|\mathcal{J}\| = \int \frac{\mathcal{J}^2}{f} dv \leq \alpha,$$

où le paramètre α est de l'ordre de la taille de la grille.

- conservation du nombre de particules n , de l'impulsion v_0 et de l'énergie ϵ , où

$$n = \int_{\mathbb{R}} f dv, \quad v_0 = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} f v dv, \quad \epsilon = \int_{\mathbb{R}} f v^2 dv,$$

ce qui revient à imposer

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial v} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} dv = 0,$$

- si nécessaire conservation des moments d'ordre plus élevé

$$\int_{\mathbb{R}} f v^k dv, \quad \forall k \leq k_{max}.$$

Soit \mathcal{H} l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels agissant sur les fonctions strictement positives de $W^{1,1} \cap L^\infty(\mathbb{R})$ telles que les moments jusqu'à l'ordre k_{max} et l'entropie soient finis. Nous définissons l'application \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} : \begin{array}{l} \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{J} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{J(f)}{f} \frac{\partial f}{\partial v} dv. \end{array}$$

Nous cherchons alors l'opérateur \mathcal{J} qui minimise la fonction \mathcal{A} sous les contraintes indiquées précédemment. En utilisant une technique de multiplicateurs de Lagrange, nous introduisons les multiplicateurs A_k , pour $k=0, \dots$ et calculons l'opérateur de collisions \mathcal{J} de sorte qu'il vérifie

$$\frac{dH}{dt} + \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{J}\| + A_1 \frac{d(n v_0)}{dt} + A_2 \frac{d\epsilon}{dt} + \sum_{k=3}^{k_{max}} A_k \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} f v^k = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{J} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{f} \mathcal{J} + A_1 + A_2 v + \sum_{k=3}^{k_{max}} A_k v^{k-1} \right) dv = 0.$$

Ce qui donne

$$\mathcal{J} = \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial v} + A_1 f + A_2 f v + \sum_{k=3}^{k_{max}} A_k f v^{k-1} \right).$$

En particulier pour $k_{max} = 2$, l'opérateur de collisions est de la forme suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + J(\psi, f) = \alpha \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial v} + A_1 f - A_2 f v \right),$$

avec $A_1 = \frac{n v_0}{\epsilon - n v_0^2}$ et $A_2 = \frac{v_0}{\epsilon - n v_0^2}$, c'est-à-dire $A_1 = v_0/T$ et $A_2 = 1/T$, où $T = (\epsilon - n v_0^2)/n$ représente la température. La difficulté est de choisir le paramètre α qui détermine la fréquence de collisions permettant la relaxation de l'entropie. Nous signalons par exemple les travaux de L. R. Gardner *et al.* [10] qui vont dans ce sens.

3.6 Tests numériques.

3.6.1 L'advection linéaire.

Considérons d'abord le problème de l'advection linéaire à vitesse constante avec conditions aux limites périodiques sur $[-\pi; \pi]$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \text{ et } f(t, -\pi) = f(t, \pi). \quad (3.-38)$$

Sous ces hypothèses simplificatrices, une analyse de Fourier du schéma est rendue possible en utilisant une transformation de Fourier discrète

$$f_j^n = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k^n e^{i k x_j}, \quad \text{où } \hat{f}_k^n = \sum_{j=0}^{N-1} f_j^n e^{-i k x_j}.$$

La solution de l'équation d'advection (3.6.1) s'écrit pour chaque coefficient de Fourier

$$\hat{f}_k^n = \hat{f}_k^0 e^{i k v t^n}. \quad (3.-38)$$

En général, l'égalité (3.6.1) n'est pas exactement satisfaite par la solution du schéma numérique, il est alors nécessaire de donner le type d'erreur que nous pouvons rencontrer,

- l'erreur d'amplitude $\hat{f}_k^n / \hat{f}_k^0$: les harmoniques doivent décroître pour stabiliser l'algorithme, ce qui induit de la diffusion numérique. Cette erreur est d'autant plus importante que le nombre d'onde k est petit.
- l'erreur de phase $|v t^n - \text{Arg}(\hat{f}_k^n / \hat{f}_k^0)|$: ce type d'erreur est le plus souvent appelé dispersion et décrit l'erreur sur les harmoniques qui se propagent à la mauvaise vitesse. Cette erreur est croissante avec le nombre d'onde k .

D'une part, l'erreur d'amplification est présentée (voir Fig. 3.1) pour les schémas FBM et PFC en utilisant la méthode de reconstruction d'ordre trois sans correcteur de pente et pour les méthodes semi-lagrangiennes avec une interpolation de type Lagrange à l'ordre trois, cinq et neuf, puis en utilisant les interpolations d'Hermite et spline cubique. Les méthodes utilisant une reconstruction régulière c'est-à-dire au moins continuellement différentiable (Hermite et spline cubique) sont moins dissipatives que celles utilisant une approximation au mieux continue. En fait, il est nécessaire d'utiliser un polynôme de degré neuf pour l'interpolation de Lagrange, afin d'obtenir un facteur d'amplification comparable à celui obtenu par la méthode spline cubique. Pour la méthode conservative (FBM ou PFC), ce facteur est proche de celui obtenu par l'interpolation de Lagrange de degré trois pour la méthode semi-lagrangienne.

D'autre part, l'erreur de phase (voir Fig. 3.2) obtenue pour la méthode semi-lagrangienne utilisant une interpolation d'Hermite est la plus importante. De plus, l'interpolation par spline cubique est moins précise que celle obtenue par une interpolation de Lagrange de degré neuf. L'erreur de phase des méthodes conservatives semble moins importante que celle des méthodes semi-lagrangiennes.

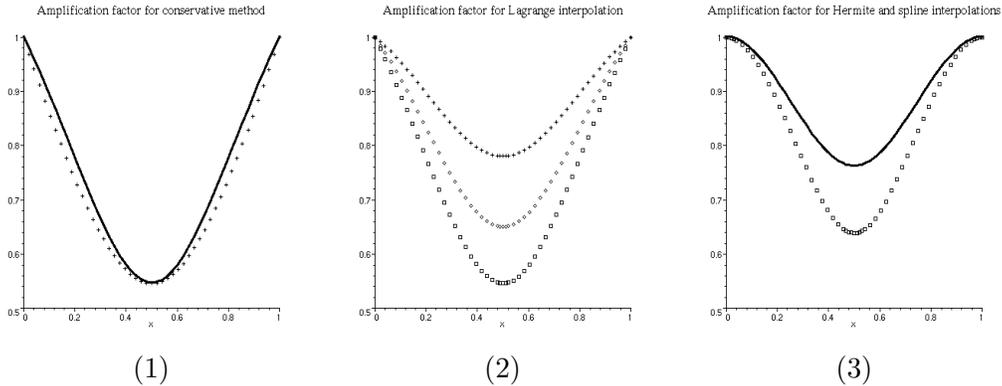


Figure 3.1: Le coefficient d'amplification en fonction de $\alpha = \frac{v \Delta t}{\Delta x}$ pour une nombre d'onde fixé k . (1) la méthode FBM (croix) et l'approximation d'ordre trois sans correcteur de pente (ligne); (2) la méthode semi-lagrangienne utilisant une interpolation de type Lagrange de degré 3 (boîte), 5 (diamant) et 9 (croix); (3) utilisant les polynômes d'Hermite (boîte) et par spline cubique (ligne).

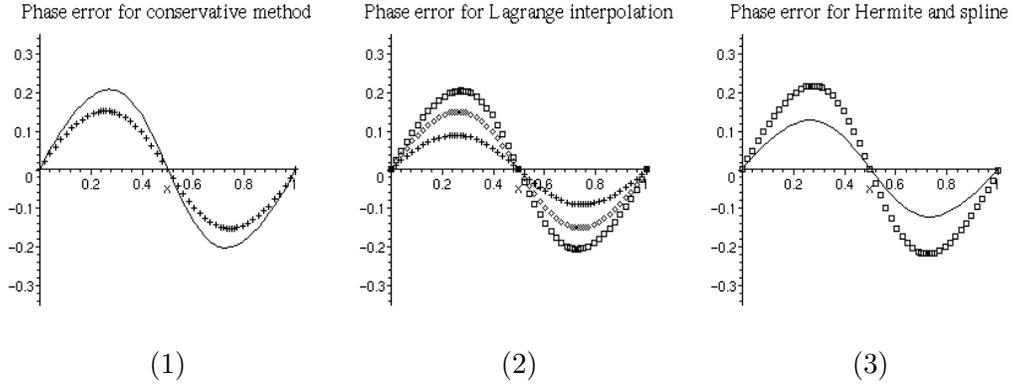


Figure 3.2: L'erreur de phase en fonction de $\alpha = \frac{v\Delta t}{\Delta x}$ pour une nombre d'onde fixé k . (1) la méthode FBM (croix) et l'approximation d'ordre trois sans correcteur de pente (ligne); (2) la méthode semi-lagrangienne utilisant une interpolation de type Lagrange de degré 3 (boîte), 5 (diamant) et 9 (croix); (3) utilisant les polynômes d'Hermite (boîte) et par spline cubique (ligne).

3.6.2 Le système de Vlasov-Poisson.

Cette partie est consacrée à la comparaison des différentes méthodes de reconstruction pour traiter l'équation de Vlasov avec conditions aux limites périodiques

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x \cdot (v f) + \nabla_v \cdot (E(t, x) f) = 0$$

couplée avec l'équation de Poisson normalisée $q = m = c = 1$

$$E(t, x) = -\nabla_x \phi(t, x), \quad -\Delta \phi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv - 1.$$

La procédure de discrétisation en temps, introduite par Cheng et G. Knorr [7], est basée sur un schéma de décomposition d'opérateurs. Pour passer de l'étape t^n au temps t^{n+1} , nous procédons de la manière suivante

- 1. réalisation d'une première étape d'advection le long de l'axe x pour un demi pas de temps : $f^*(x, v) = f(t^n, x - v\Delta t/2, v)$.
- 2. calcul du champ électrique au temps $t^{n+1/2}$ en utilisant f^* pour le calcul de la charge dans l'équation de Poisson.
- 3. réalisation d'une étape d'advection le long de l'axe des vitesses v pour un pas de temps : $f^{**} = f^*(x, v - E(t^{n+1/2}, x)\Delta t)$.
- 4. réalisation d'une seconde étape d'advection le long de l'axe x pour un demi pas de temps : $f(t^{n+1}, x, v) = f^{**}(x - v\Delta t/2, v)$.

Cet algorithme permet d'obtenir une approximation d'ordre deux en Δt . Nous proposons maintenant divers cas tests pour comparer les différents types de reconstruction.

A. L'amortissement Landau linéaire en dimension une. La donnée initiale est

$$f(0, x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} (1 + \alpha \cos(kx)), \quad \forall (x, v) \in [0, L] \times \mathbb{R},$$

où $\alpha=0.01$, la période vaut $L=4\pi$ et $k=0.5$. Le nombre de cellules utilisé est $N_x=32$ dans la direction x et $N_v=16, 32$ et 64 le long de l'axe des vitesses v , le paramètre $v_{max}=4.5$ désigne le rayon du support de la fonction de distribution en vitesse et le pas de temps vaut $\Delta t=1/8$.

La Fig. 3.3 représente l'évolution de l'énergie électrique discrète $\sum |E_i(t)|^2$ obtenue par le schéma PFC, la reconstruction ENO d'ordre quatre, le schéma de conservation de l'énergie et la méthode semi-lagrangienne utilisant une interpolation par spline cubique avec $N_v=32$. Les résultats obtenus par la méthode semi-lagrangienne en utilisant les différents types d'interpolation (Hermite à l'ordre quatre, Lagrange de degré cinq et neuf, spline) sont très proches les uns des autres. L'aspect local des reconstructions de Lagrange et d'Hermite ne semble donc pas porter atteinte à la précision de la méthode et ne crée pas plus d'oscillations numériques que l'interpolation par spline cubique.

Concernant les résultats numériques, "l'effet de récurrence" apparaît à $T_R=44.68$, ce qui correspond à la valeur prédite $T_R = 2\pi/(k\Delta v)$ pour l'équation de transport libre, c'est-à-dire sans champ électrique. La méthode PFC donne dans un premier temps une description précise de l'amortissement, mais lorsque l'on se rapproche du temps de récurrence, l'évolution du champ électrique devient moins précise. En revanche, les méthodes ENO, de conservation de l'énergie et semi-lagrangiennes paraissent moins sensibles à ce phénomène et sont plus précises pour un temps plus long. Pour ce cas test, la fonction de distribution reste positive et les variations de la norme d'erreur relative sur l'entropie cinétique, sur la norme L^2 de f et sur l'énergie totale demeurent inférieures à 10^{-5} . Pour le schéma de conservation de l'énergie, l'opérateur de collisions est ici sans influence : les effets non linéaires sont très faibles, le schéma ne développe donc pas d'oscillations numériques.

Le premier mode du champ électrique $k=0.5$, obtenu par le schéma PFC, est présenté en Fig. 3.4, pour les discrétisations $N_v=16, 32$ et 64 cellules. Nous constatons que l'amplitude du champ électrique décroît de manière exponentielle par rapport au temps, en accord avec la théorie de Landau. Le taux d'amortissement et la fréquence d'oscillations obtenus par cette méthode avec seulement 32 cellules en v , sont donnés respectivement par $\gamma=0.153$ et $\omega=1.415$, ce qui correspond bien aux valeurs $\gamma=0.1533$ et $\omega=1.4156$ prédites par la théorie. L'utilisation d'un nombre suffisamment grand de points de discrétisation permet de repousser l'effet de récurrence et donc d'améliorer l'approximation du champ électrique pour des temps plus longs.

B. L'amortissement Landau non linéaire en dimension une. Dans cet exemple, l'amplitude de la perturbation initiale de la densité est accrue, nous considérons la donnée initiale précédente avec $\alpha=0.5$ et $v_{max}=6$. Le nombre de cellules en x est $N_x=32$ et $N_v=64, 128$. La théorie de Landau ne peut plus s'appliquer puisque les

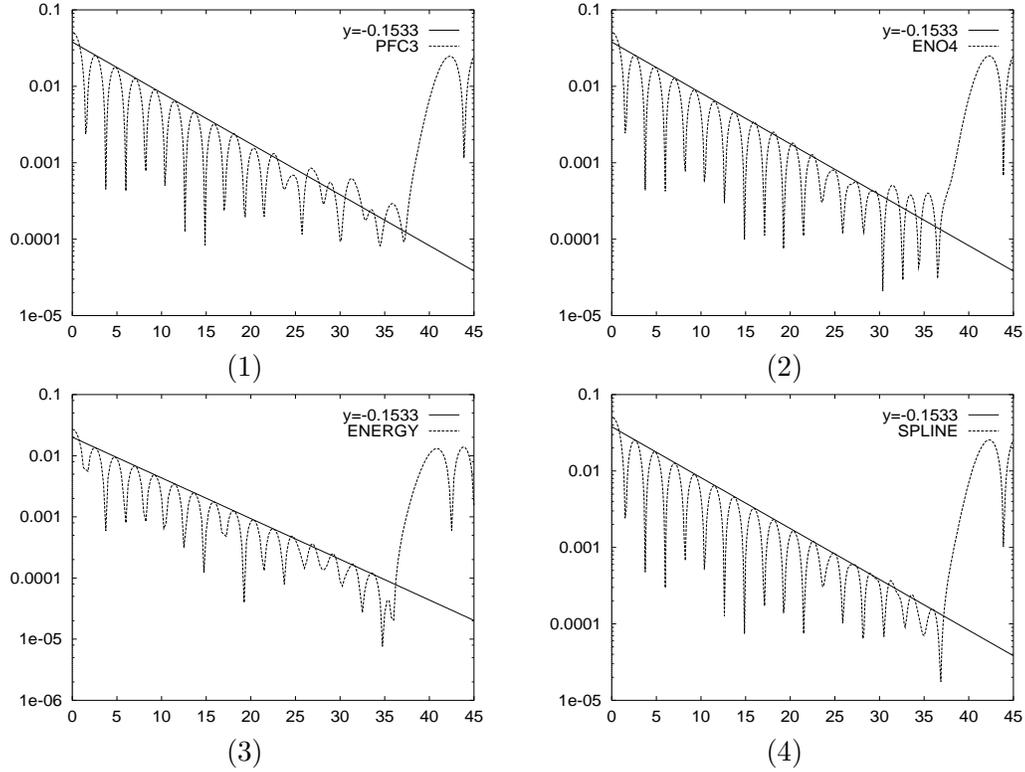


Figure 3.3: Évolution de l'énergie électrique en échelle logarithmique obtenue par (1) le schéma PFC, (2) la reconstruction ENO d'ordre quatre, (3) la méthode de conservation de l'énergie et (4) semi-lagrangienne avec une interpolation par spline cubique pour 32×32 inconnues pour l'amortissement Landau linéaire.

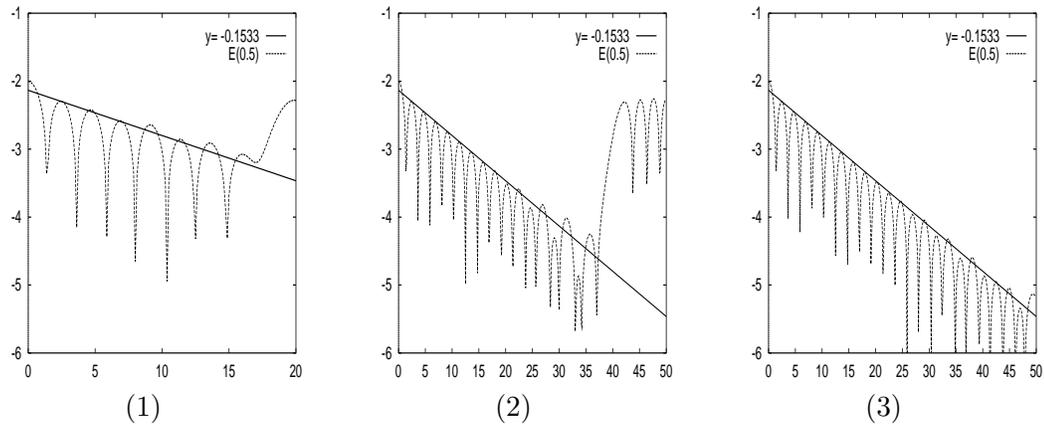


Figure 3.4: Évolution du premier mode du champ électrique $E(t, k = 0.5)$ obtenu par la méthode PFC, pour (1) $N_v = 16$, (2) $N_v = 32$ (3) $N_v = 64$ cellules pour l'amortissement Landau linéaire.

effets non linéaires deviennent trop importants, cependant ce test a été étudié par plusieurs auteurs [12, 20, 14]. Les résultats obtenus sont en accord avec les nombreuses simulations présentées dans la littérature : l'amplitude de l'énergie électrique décroît dans un premier temps exponentiellement, puis oscille de manière périodique autour d'une constante. Sur la Fig. 3.5, l'évolution de l'énergie électrique obtenue par la méthode PFC et par le schéma de conservation de l'énergie est tracée pour une discrétisation de 32×64 cellules. Nous comparons ces résultats avec ceux obtenus par la méthode semi-lagrangienne utilisant une interpolation par spline cubique avec 32×64 et 32×128 points. Nous notons d'abord que l'évolution de l'énergie électrique donnée par les schémas semi-lagrangiens utilisant une interpolation locale (Lagrange, Hermite) est semblable à celle obtenue à partir de l'interpolation par spline cubique, alors que la méthode PFC est beaucoup plus précise pour une même résolution. En effet, pour obtenir un résultat comparable avec la méthode semi-lagrangienne, il est nécessaire d'utiliser une grille deux fois plus fine. Concernant la méthode de conservation de l'énergie, les résultats numériques dépendent fortement du coefficient devant l'opérateur de collisions : pour cette simulation il vaut $3 \cdot 10^{-4}$, mais une petite variation de ce paramètre modifie sensiblement les résultats, ce qui rend cette méthode peu robuste et difficile à utiliser pour des cas plus complexes.

Ensuite, nous nous intéressons à l'évolution de l'entropie cinétique et des normes L^p de f_h , qui sont théoriquement conservées. L'évolution de l'entropie cinétique discrète définie par $H(t) = -\sum f_i(t) \ln(f_i(t))$ et la norme $L^p(t)$ discrète $\sum |f_i(t)|^p$ pour $p=1,2$ sont présentées sur la Fig. 3.6 pour les différents schémas. Les variations de la norme L^1 de f_h représentent le taux de valeurs négatives de la fonction de distribution puisque tous les schémas proposés conservent le nombre total de particules $\sum f_i(t)$. D'une part, les méthodes semi-lagrangiennes et de conservation de l'énergie ne préservent pas la positivité et l'amplitude des oscillations numériques croît lorsque les effets non linéaires deviennent plus importants. L'évolution de l'entropie cinétique ou des normes L^p de f_h obtenue par les différents types d'interpolations en utilisant la méthode semi-lagrangienne est en accord avec l'analyse de Fourier réalisée pour l'équation d'advection linéaire. La dissipation de la norme L^2 de f_h est plus importante pour les schémas de conservation des flux que pour les méthodes semi-lagrangiennes avec une interpolation d'ordre élevé. En contre partie, les variations de la norme L^1 de f_h sont bien plus importantes pour les méthodes semi-lagrangiennes et montrent que la faible dissipation de ces schémas favorise l'introduction d'erreurs numériques. La variation des points de reconstruction utilisée par la méthode ENO agit comme un effet régularisant, ainsi la diffusion est la plus importante et l'entropie cinétique n'est pas bien stabilisée. L'entropie obtenue par la méthode PFC est également croissante, mais se stabilise ensuite, tandis que celle donnée par la méthode semi-lagrangienne continue d'osciller. Il est possible de diminuer les oscillations numériques du schéma de conservation de l'énergie en modifiant le coefficient devant l'opérateur de collisions, mais l'amplitude de l'énergie électrique et l'entropie continuent alors de décroître par rapport au temps.

D'autre part, la représentation de la fonction de distribution dans l'espace des

phases (x, v) , montre l'apparition de trous autour de la vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$. Ces trous représentent les particules qui sont piégées par les ondes électrostatiques (voir la Fig. 3.7). La décroissance de l'entropie entraîne une régularisation de la fonction de distribution lorsque les filaments deviennent plus fins que la taille de la grille de l'espace des phases. Des petites oscillations sont visibles pour la fonction de distribution donnée par la méthode de conservation de l'énergie, elles représentent les erreurs numériques. La forte diffusion des méthodes conservatives peut s'expliquer par l'étape de moyennisation. En effet, les plus petits détails de la fonction de distribution sont éliminés pour stabiliser le schéma. Cependant, la projection sur le maillage, signifie que nous regardons l'équation de Vlasov à l'échelle de la grille de l'espace des phases, ainsi les détails les plus fins ne peuvent pas être pris en compte par le schéma numérique. De plus, l'approximation obtenue semble donner une bonne description des valeurs macroscopiques, c'est-à-dire des quantités physiques obtenues par intégration de la fonction de distribution en vitesse, puisque l'évolution du champ électrique décrite par la méthode PFC demeure très précise avec une grille grossière de l'espace des phases. Enfin, les variations de l'énergie totale restent inférieures à 2% pour tous les schémas numériques exceptées pour la méthode ENO, pour laquelle l'énergie totale est croissante et l'amplitude du champ électrique est amortie. Ainsi, la méthode ENO ne semble pas bien adaptée pour décrire les effets non linéaires générés par l'équation de Vlasov.

C. L'amortissement Landau en dimension deux. La donnée initiale est choisie telle que $v = (v_x, v_y)$

$$f_0(x, y, v_x, v_y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(v_x^2 + v_y^2)/2} (1 + \alpha \cos(k_x x) \cos(k_y y)),$$

avec $\alpha = 0.05$, le rayon du support de la fonction de distribution vaut $v_{max}=6$, les nombres d'ondes $k_x=k_y=0.5$ et les dimensions de la boîte sont prises en fonction des nombres d'ondes $L_x=L_y=2\pi/k_x=2\pi/k_y=4\pi$. Finalement, la grille de l'espace des phases contient 64 points par direction et le pas de temps est fixé à $\Delta t=1/8$. Puisque la donnée initiale est symétrique par rapport aux axes x et y , l'évolution des deux composantes du champ électrique est identique. Les modes de Fourier du champ électrique sont tracés en Fig. 3.9. La décroissance des modes $E_x(t, k_x = 0, k_y = 0.5)$ et $E_x(t, k_x = 0.5, k_y = 0.5)$ est exponentielle en temps avec un taux d'amortissement donné respectivement par $\gamma = -0.1533$ et $\gamma=-0.394$ et la fréquence d'oscillations $\omega=1.4156$ et $\omega=1.6973$, ce qui correspond aux valeurs prédites par la théorie linéaire de Landau. L'amplitude du mode $k_x=k_y=0.5$ est la plus importante, mais celui-ci décroît rapidement, tandis que la valeur du champ électrique correspondant au mode $k_x=0.5, k_y=0$ est bien moins ample et la décroissance moindre.

D. L'évolution d'un faisceau 2D. Nous considérons maintenant l'évolution d'un faisceau semi gaussien dans l'espace des phases de dimension quatre. Dans ce cas

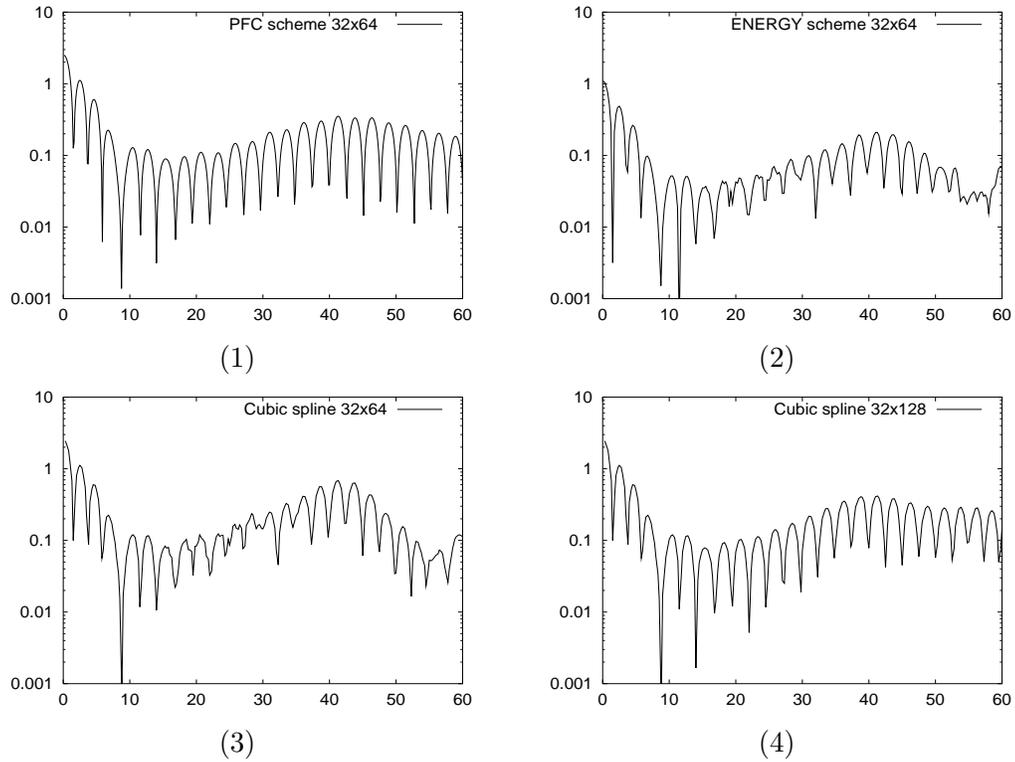


Figure 3.5: Évolution de l'énergie électrique discrète obtenue par (1) la méthode PFC et (2) de conservation de l'énergie avec 32×64 cellules; (3) la méthode semi-lagrangienne avec 32×64 points et (4) 32×128 points pour l'amortissement Landau non linéaire.

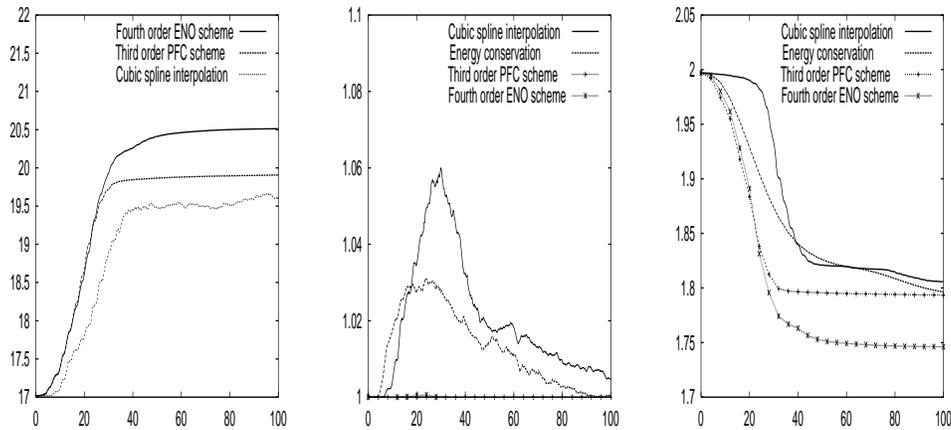


Figure 3.6: Évolution de l'entropie cinétique discrète, des normes L^1 et L^2 de f_h obtenues avec 32×64 inconnues pour l'amortissement Landau non linéaire.

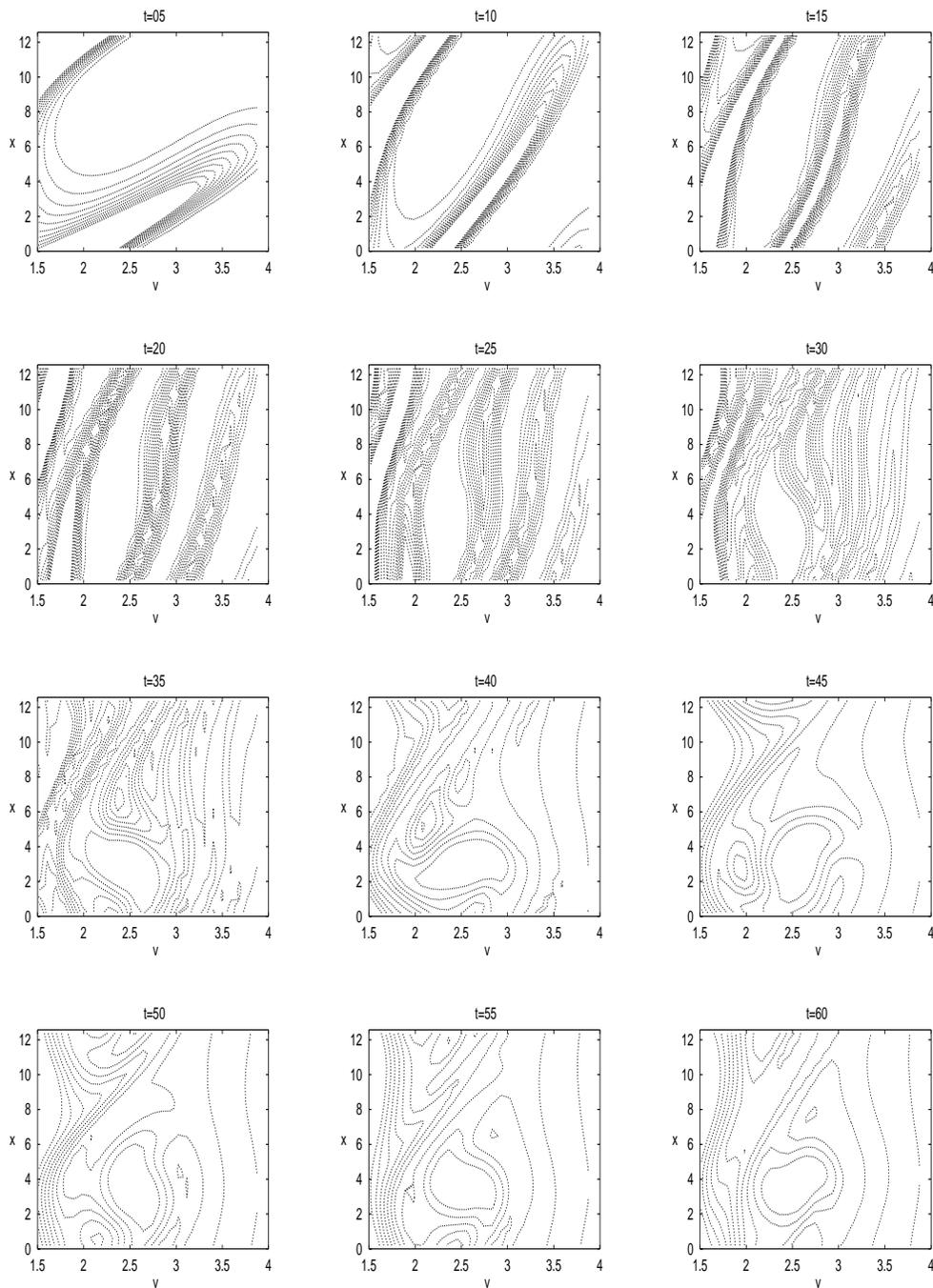


Figure 3.8: Développement de la fonction de distribution pour les valeurs $f(t, x, v) \leq 0.1$ obtenues par le schéma PFC pour l'amortissement Landau non linéaire.

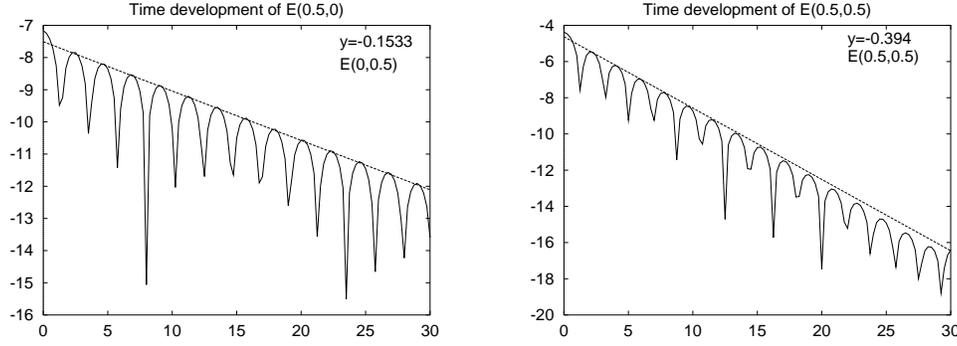


Figure 3.9: Évolution des premiers modes du champ électrique $E_x(0.5,0)$ et $E_x(0.5,0.5)$ en échelle logarithmique obtenus par la méthode PFC avec 64×64 cellules pour l'amortissement Landau linéaire 2D.

l'équation de Vlasov s'écrit de la façon suivante, pour tout $\mathbf{x} = (x, y)$ et $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + (E_s(t, \mathbf{x}) + E_a(t, \mathbf{x})) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \quad (3.-38)$$

où E_s représente le champ électrique autoconsistant donné par l'équation de Poisson et E_a est le champ appliqué linéaire permettant la focalisation du faisceau.

1. Résolution de l'équation de Poisson. Le champ électrique autoconsistant est donné par l'équation de Poisson, il vérifie donc $E_s(t, \mathbf{x}) = -\nabla \phi(t, \mathbf{x})$,

$$\begin{cases} -\Delta \phi = \rho / \epsilon_0, & \text{dans } \Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |\mathbf{x}|^2 \leq (\frac{3a}{2})^2\}, \\ \phi = 0, & \text{sur } \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |\mathbf{x}|^2 = (\frac{3a}{2})^2\}, \end{cases} \quad (3.-37)$$

où a désigne le rayon du faisceau. Nous discrétisons d'abord l'équation de Poisson sur une grille régulière par une méthode spectrale :

$$\bar{\phi}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{\phi}_k \sin\left(\frac{2\pi}{3a} k \cdot \mathbf{x}\right), \quad \hat{\phi}_k = - \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \bar{\phi}(\mathbf{x}_k) \sin\left(\frac{2\pi}{3a} k \cdot \mathbf{x}\right).$$

L'utilisation d'une base de sinus permet de résoudre le problème de Poisson avec condition de Dirichlet homogène sur $\Omega_2 =]-\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}[^2$

$$-\Delta \bar{\phi} = \rho / \epsilon_0, \text{ dans } \Omega_2 \text{ et } \bar{\phi} = 0, \text{ sur } \partial\Omega_2.$$

Pour trouver une approximation de l'équation (3.-37), nous recherchons les points de la grille tels que $\bar{\mathbf{x}}_j \in \partial\Omega$. Puis, résolvons

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{\phi}_j &= \delta_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}_j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ dans } \Omega_2, \\ \bar{\phi}_j &= 0, \text{ sur } \partial\Omega_2. \end{aligned}$$

Nous notons par $\mathcal{J} = \{j \in \mathbb{Z}^2; \bar{\mathbf{x}}_j \in \partial\Omega\}$, il reste à calculer les coefficients $(\alpha_j)_{j \in \mathcal{J}}$ assurant la condition de Dirichlet homogène sur la paroi

$$\bar{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_j) - \sum_{l \in \mathcal{J}} \alpha_l \bar{\phi}_l(\bar{\mathbf{x}}_j) = 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

L'approximation de (3.-37) est alors donnée par

$$\phi(\mathbf{x}_i) = \bar{\phi}(\mathbf{x}_i) - \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j \bar{\phi}_j(\mathbf{x}_i), \quad \forall i \in \mathbb{Z}^2.$$

2. Résultats numériques. La fonction de distribution initiale est donnée par

$$f_0(x, y, v_x, v_y) = \frac{n_0}{(2\pi v_{th}^2)(\pi a^2)} e^{-\frac{v_x^2 + v_y^2}{2v_{th}^2}}, \quad \text{si } x^2 + y^2 \leq a^2$$

et $f_0(x, y, v_x, v_y) = 0$, si $x^2 + y^2 > a^2$. Pour avoir un faisceau ‘‘adapté’’, nous devons calculer la vitesse thermique v_{th} et le champ électrique appliqué E_a appropriés (voir par exemple [15]). Pour cela, nous considérons une fonction de distribution K-V (Kapchinsky-Vladirmisky), qui est une solution stationnaire de l'équation de Vlasov-Poisson (3.6.2) et pour laquelle le champ électrique autoconsistant est linéaire. Ainsi, le champ de force électrique total s'écrit

$$\frac{q}{m} (E_s(t, \mathbf{x}) + E_a(t, \mathbf{x})) = -\omega^2 \mathbf{x}$$

et la fonction de distribution K-V est de la forme

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \delta_C, \quad \text{avec } C = \left\{ \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} + \frac{v_x^2}{(\omega A)^2} + \frac{v_y^2}{(\omega A)^2} = 1 \right\}.$$

Nous calculons alors les valeurs RMS (Root Mean Square) qui correspondent aux moments d'ordre deux en espace et en vitesse normalisés

$$x_{rms} = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac{\int x^2 f d\mathbf{x} d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{x} d\mathbf{v}}} = A/2, \quad v_{x,rms} = \sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{\int v_x^2 f d\mathbf{x} d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{x} d\mathbf{v}}} = \omega A/2,$$

$$y_{rms} = \sqrt{\overline{y^2}} = \sqrt{\frac{\int y^2 f d\mathbf{x} d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{x} d\mathbf{v}}} = A/2, \quad v_{y,rms} = \sqrt{\overline{v_y^2}} = \sqrt{\frac{\int v_y^2 f d\mathbf{x} d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{x} d\mathbf{v}}} = \omega A/2.$$

Nous choisissons alors une fonction de distribution semi-gaussienne équivalente au faisceau K-V, c'est-à-dire, telle que les deux fonctions de distribution aient les mêmes quantités RMS

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = a^2/4, \quad v_{th}^2 = \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \omega^2 a^2/4,$$

où ω^2 représente le coefficient directeur de la différence entre le champ électrique autoconsistant initial et le champ appliqué $E_a(t, x) = -\omega_0^2 x$. Dans cet exemple, nous

Nombre de processeurs	méthode PFC	méthode SPLINE
1 processeur	24 min	35 min 45 sec
2 processeurs	13 min 20 sec	19 min 45 sec
4 processeurs	5 min 50 sec	8 min 55 sec
8 processeurs	57 sec	1 min 15 sec

Table 3.1: *Temps de calcul pour les méthodes PFC3 et semi-lagrangiennes avec interpolation par spline cubique en fonction du nombre de processeurs pour une résolution $32 \times 32 \times 32 \times 32$.*

Nombre de processeurs	méthode PFC	méthode SPLINE
1 processeur	9 h 04 min	12 h 15 min
2 processeurs	4 h 30 min	6 h 20 min
4 processeurs	2 h 11 min	3 h 07 min
8 processeurs	56 min	84 min

Table 3.2: *Temps de calcul pour les méthodes PFC3 et semi-lagrangiennes avec interpolation par spline cubique en fonction du nombre de processeurs pour une résolution $64 \times 64 \times 64 \times 64$.*

avons choisi ω et ω_0 tels que la dépression du nombre d'onde $\frac{\omega}{\omega_0}=1/4$. La densité du faisceau n_0 peut s'écrire en fonction du courant I et de la vitesse du faisceau v_b , de la façon suivante : $n_0 = \frac{I}{q v_b}$. Le faisceau est supposé être composé de particules de potassium ionisées, le courant vaut $I=0.2$ A, la vitesse du faisceau est $v_b=0.63 \times 10^6$ m/s et le rayon du faisceau est $a=0.02$ m. Nous comparons la solution obtenue par l'algorithme PFC utilisant une reconstruction d'ordre trois positive et la solution obtenue par la méthode semi-lagrangienne (pour plus de détails voir [19]).

Les contours projetés dans l'espace des phases, les coupes de la densité ainsi que le champ électrique total sont présentés sur les Fig. 3.10,3.11. Le faisceau commence par se creuser à l'intérieur, ainsi les régions de fortes densités se propagent au cœur du faisceau et se dirigent ensuite de nouveau vers l'extérieur, ce qui crée des ondes de densité de charge. Ces ondes finissent par s'amortir après plusieurs périodes. Les résultats obtenus par la méthodes PFC sont très proches de ceux obtenus par la méthode semi-lagrangienne avec une interpolation par spline cubique.

3.7 Conclusion.

Dans cette partie, nous avons introduit un nouveau schéma numérique d'ordre élevé pour l'approximation de l'équation de Vlasov en utilisant une grille de l'espace des phases (x, v) . Cette méthode impose la conservation du nombre de particules (ou de la masse globale) ainsi que le contrôle des oscillations numériques qui peuvent apparaître lorsque le problème est fortement non linéaire. Ce contrôle des oscillations

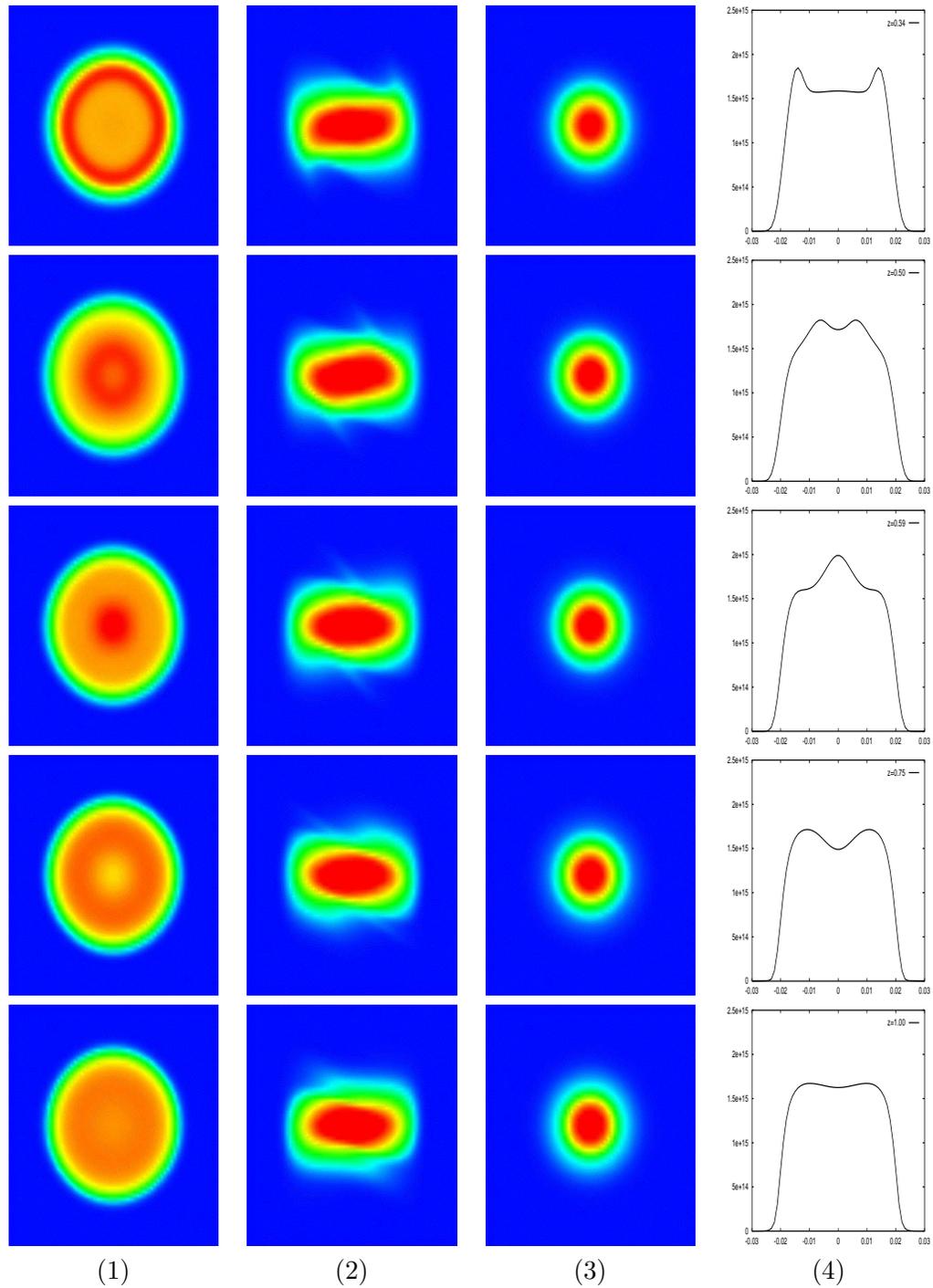


Figure 3.10: Développement (1) de la projection en (x,y) , (2) de la projection en (x,v_x) , (3) de la projection en (v_x,v_y) , (4) de la coupe de la densité de charge obtenues par la méthode PFC.

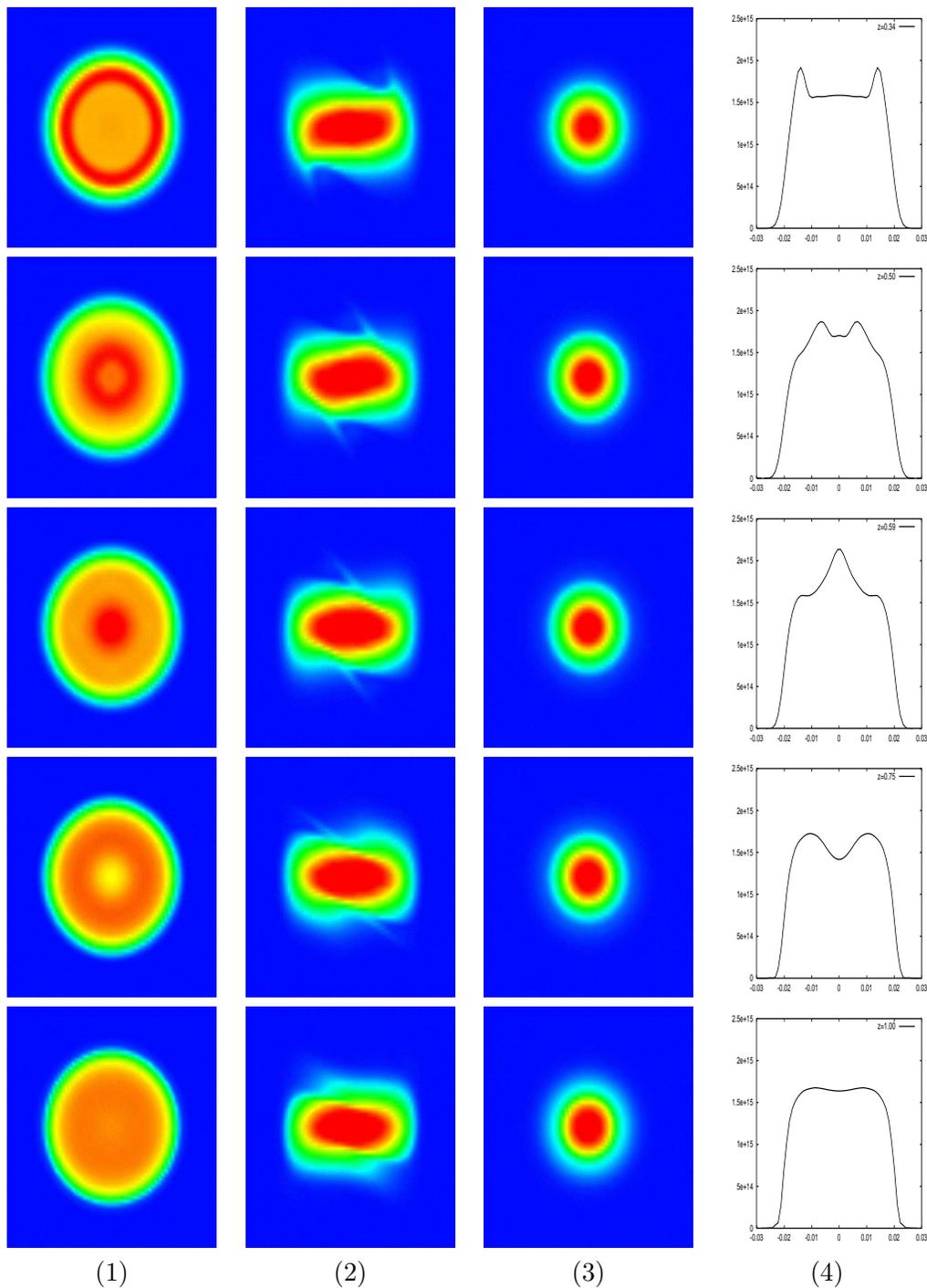


Figure 3.11: Développement (1) de la projection en (x,y) , (2) de la projection en (x,v_x) , (3) de la projection en (v_x,v_y) , (4) de la coupe de la densité de charge obtenues par la méthode semi-lagrangienne.

est assuré par l'utilisation de la variation des points de reconstruction (ENO) ou en imposant la conservation de la positivité (PFC). D'une part, la méthode ENO semble être trop dissipative pour donner une approximation précise de la fonction de distribution lorsque celle-ci est fortement perturbée (par exemple, l'entropie n'est jamais stabilisée). D'autre part, la méthode PFC est aussi précise que la méthode semi-lagrangienne et génère très peu d'oscillations numériques. La dissipation est donc plus importante qu'un schéma semi-lagrangien utilisant une interpolation par spline cubique, mais les valeurs macroscopiques obtenues par intégration de la solution par rapport à la variable des vitesses v sont données avec une bonne précision. De plus, la reconstruction locale est particulièrement bien adaptée pour le calcul parallèle qui est indispensable pour traiter les problèmes de la physique avec suffisamment de points de discrétisations en dimension élevée.

Le schéma PFC se présente donc comme une alternative aux méthodes particulières lorsque celles-ci ne donnent pas satisfaction pour traiter des problèmes en 1D1/2, 2D et 2D1/2.

Ensuite, nous avons proposé et testé différentes interpolations locales pour la méthode semi-lagrangienne. L'étude de la stabilité L^2 confirme la précision de l'interpolation par spline cubique en terme de dissipation et de dispersion. Pourtant, l'utilisation de l'interpolation cubique d'Hermite avec une approximation des dérivées à l'ordre quatre ou l'interpolation de Lagrange de degré cinq donne des résultats très satisfaisants avec un moindre coût. La méthode semi-lagrangienne qui a l'avantage de s'adapter aux domaines à géométrie complexe [3] présente donc un intérêt majeur pour de futurs développements du traitement de l'équation de Vlasov dans l'espace des phases.

Bibliography

- [1] A. Arakawa, Computational Design for Long-Term Numerical Integration of the Equation of Fluid Motion: Two dimensional Incompressible Flow. Part 1. *J. Comput. Phys.* **1** (1966), 119–143. Reprinted in *J. Comput. Phys.* **135** (1997), 103–114.
- [2] C.K. Birdsall, A.B. Langdon, Plasma Physics via Computer Simulation. *Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia.* (1991).
- [3] R. Bermejo, Analysis of a class of quasi-monotone and conservative semi-lagrangian advection schemes. *Numer. Math.* **87** (2000), 597–623.
- [4] F. Bouchut, F. Golse et M. Pulvirenti, Kinetic equations and asymptotic theory. *Gauthier-Villars, series in Applied Mathematics* (2000).
- [5] J.P. Boris et D.L. Book, Flux-corrected transport. I: SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comput. Phys.* **11** (1973), 38–69.
- [6] J.P. Boris et D.L. Book, Flux-corrected transport. III: Minimal-error FCT algorithms. *J. Comput. Phys.* **20** (1976), 397–431.
- [7] Cheng et G. Knorr, The integration of the Vlasov equation in configuration space. *J. Comput. Phys.* **22** (1976), 330–348.
- [8] B. Després et F. Lagoutiere, Un schéma non-linéaire anti-dissipatif pour l’advection linéaire. *C. R. A. S. Paris Sér. I Math.* **328** (1999), 939–944.
- [9] E. Fijalkow, A numerical solution to the Vlasov equation. *Comput. Phys. Communications* **116** (1999), 319–328.
- [10] L.R. Gardner, G.A. Gardner et S.I. Zaki, Collisional effects in plasmas Modelled by a simplified Fokker-Planck equation. *J. Comp. Phys.* **107** (1993), 40–50.
- [11] A. Harten et S. Osher, Uniformly High-Order Accurate Non-Oscillatory Schemes. I. *SIAM J. Numer. Anal.* **24** (1987), 279–309.
- [12] A.J. Klimas, A method for overcoming the velocity space filamentation problem in collisionless plasma model solutions. *J. Comput. Phys.* **68** (1987), 202–226.
- [13] A. Klimas et W.M. Farrell, A Splitting Algorithm for Vlasov Simulation with Filamentation Filtration. *J. Comput. Phys.* **110** (1994), 150–163.
- [14] G. Manfredi, Long time behavior of non linear Landau damping. *Phys. Rev. Letters.* **79** (1997), 2815–2818.
- [15] M. Reiser, Theory and design of charged particle beams. *Wiley and sons* (1994).

- [16] R. Robert et J. Sommeria, Statistical equilibrium states for two-dimensional flows. *J. Fluid. Mech.* **229** (1991), 291–310.
- [17] M. Shoucri et G. Knorr, Numerical integration of the Vlasov equation. *J. Comput. Phys.* **14** (1974), 84–92.
- [18] E. Sonnendrücker, J. Roche, P. Bertrand et A. Ghizzo, The Semi-Lagrangian Method for the Numerical Resolution of Vlasov Equations. *J. Comput. Phys.* **149** (1999), 201–220.
- [19] E. Sonnendrücker, J.J. Barnard, A. Friedman, D.P. Grote et S.M. Lund, Simulation of heavy ion beams with a semi-Lagrangian Vlasov solver. *Proceedings of the HIF 2000 symposium.* (1999).
- [20] T. Nakamura et T. Yabe, Cubic interpolated propagation scheme for solving the hyper-dimensional Vlasov-Poisson equation in phase space. *Comput. Phys. Communications* **120** (1999), 122–154.
- [21] S.I. Zaki, L.R. Gardner et T.J.M. Boyd, A finite element code for the simulation of one-dimensional Vlasov plasmas I. Theory. *J. Comput. Phys.* **79** (1988), 184–199.
- [22] S.I. Zaki, L.R. Gardner et T.J.M. Boyd, A finite element code for the simulation of one-dimensional Vlasov plasmas II. Applications. *J. Comput. Phys.* **79** (1988), 200–208.

Chapter 4

L'équation de Vlasov axisymétrique.

4.1 Introduction.

Pour réaliser la fusion thermonucléaire ou traiter d'autres applications de la physique des plasmas, il est nécessaire d'accélérer un faisceau de particules à très haute énergie. Pour minimiser la radioactivité dans l'accélérateur, il faut éviter les "pertes", c'est-à-dire les particules s'échappant du corps du faisceau. C'est pourquoi, il est essentiel de comprendre la formation d'un halo : une couronne formée de particules autour du corps du faisceau. Ce phénomène apparaît lorsque la densité de charge est élevée, ce qui provoque de fortes variations du champ électrique autoconsistant et une petite quantité de particules est piégée autour du faisceau. Plusieurs modèles approchés ont été considérés pour expliquer ce processus (Particle Core Model), mais la plupart ne prennent pas en compte toutes les non linéarités. Ceci ne permet donc pas d'évaluer la quantité de particules perdue et d'expliquer le mécanisme de formation du halo. Il faut donc étudier un modèle plus proche de la réalité comme le système de Vlasov-Poisson. Les expériences dans ce domaine restent difficiles à mettre en place et sont encore très coûteuses. Il est donc impératif de recourir à la simulation numérique. La plupart des méthodes particulaires, qui sont utilisées pour la discrétisation du transport de particules, n'arrivent pas à décrire ces mécanismes. En effet, d'une part le "bruit numérique" est trop important pour approcher précisément les zones de faibles densités où se situent les halos (aux alentours de un millième de la densité totale). De plus, le faible taux de convergence de ces méthodes ne suffit pas à bien décrire l'évolution de la fonction de distribution même lorsque le nombre de particules se rapproche de la réalité. Le recours à la discrétisation de l'équation de Vlasov dans l'espace des phases semble donc souhaitable dans ce cas. Dans la plupart des applications nous pouvons supposer une symétrie cylindrique et considérer l'équation de Vlasov en coordonnées cylindriques $1D1/2$ ou $2D1/2$.

Dans ce chapitre, nous supposons que le faisceau est uniforme en la variable lon-

itudinale z et se propage à vitesse constante

$$v_z = \frac{\xi_z/m}{\sqrt{1 + |\xi_z|^2/m^2 c^2}},$$

où ξ_z représente l'impulsion dans la direction z . Ainsi, les composantes transverses (v_x, v_y) sont petites devant la vitesse longitudinale v_z . Le problème se réduit donc à l'étude de l'équation de Vlasov classique dans le plan transverse. De plus, nous supposons que la fonction de distribution initiale est invariante par rotation. La solution de l'équation de Vlasov reste alors invariante par rotation et vérifie l'équation en coordonnées cylindriques

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{q}{m} E_s(t, r) + \frac{q}{m} E_a(t, r) + \frac{v_\theta^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_\theta v_r}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\theta} = 0, \quad (4.0)$$

où le champ $E_s(t, r)$ est donné par l'équation de Poisson et $E_a(t, r)$ représente le champ appliqué que l'on supposera la plupart du temps linéaire. La variable r désigne la distance par rapport à l'origine $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Le champ $E_s(t, r)$ est donné par l'équation de Poisson en coordonnées cylindriques

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r E_s}{\partial r} = \rho(t, r)/\varepsilon_0, \quad \rho(t, r) = q \int_{\mathbb{R}^2} f(t, r, v_r, v_\theta) dv_r dv_\theta. \quad (4.0)$$

Dans la suite, nous étudierons également l'équation de Vlasov avec un champ magnétique appliqué de la forme $B = (0, 0, B_z)$, où B_z est constant. L'équation de Vlasov devient alors,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{q}{m} E_s(t, r) + \frac{q B_z}{m} v_\theta + \frac{v_\theta^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \left(\frac{q B_z}{m} v_r + \frac{v_\theta v_r}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\theta} = 0. \quad (4.0)$$

Cette équation est plus réaliste, puisque la focalisation de faisceaux de particules est la plupart du temps réalisée par l'application d'un champ magnétique longitudinal.

Le reste du chapitre est organisé comme suit. Nous donnons d'abord une nouvelle formulation de l'équation de Vlasov en coordonnées cylindriques par la recherche d'invariants supplémentaires. Nous présentons ensuite la construction de solutions stationnaires pour le système de Vlasov-Poisson avec champ appliqué, comme les fonctions de distribution K-V ou de Maxwell-Boltzmann. La fonction de distribution K-V servira de base pour la focalisation de faisceaux quelconques. Après un bref rappel de la méthode numérique employée, nous donnons différents résultats numériques.

4.2 Recherche d'invariants.

Les courbes caractéristiques de l'équation de Vlasov en coordonnées cylindriques vérifient le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{r} = v_r \\ \dot{v}_r = \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q}{m} v_\theta B_z + \frac{q}{m} E_s(t, r) \\ \dot{v}_\theta = -\frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{q}{m} v_r B_z. \end{cases} \quad (4.0)$$

Il est facile de vérifier que pour l'équation (4.1),

$$H(r, v_r, v_\theta) = \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\theta^2) + q \phi_s(t, r) \quad (4.0)$$

est un invariant, où ϕ_s est donné par $E_s = \partial_r \phi_s$. Il est difficile de se placer dans le référentiel (r, v_r, H) puisqu'il contient le champ autoconsistant. Nous recherchons alors un nouvel invariant I de la forme $I(r, v_\theta)$ et tel que $\dot{I} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{r} \frac{\partial I}{\partial r} + \dot{v}_\theta \frac{\partial I}{\partial v_\theta}, \\ &= v_r \frac{\partial I}{\partial r} - \left(\frac{v_\theta v_r}{r} + \frac{q}{m} v_r B_z \right) \frac{\partial I}{\partial v_\theta}, \\ &= v_r \left(\frac{\partial I}{\partial r} - \left(\frac{v_\theta}{r} + \frac{q}{m} B_z \right) \frac{\partial I}{\partial v_\theta} \right). \end{aligned}$$

Il faut donc résoudre l'équation de transport

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial r} - \left(\frac{v_\theta}{r} + \frac{q}{m} B_z \right) \frac{\partial I}{\partial v_\theta}, \\ I(r = 1, v_\theta) = I_1(v_\theta). \end{cases} \quad (4.3)$$

Le système définissant les courbes caractéristiques correspondant à (4.2) est donné par

$$\begin{cases} \frac{d v_\theta}{d r} = -\frac{v_\theta}{r} - \frac{q B_z}{m} \\ v_\theta(s) = w_\theta. \end{cases} \quad (4.3)$$

La solution de l'équation différentielle (4.2) s'écrit de la façon suivante,

$$v_\theta(r) = \left(s w_\theta + \frac{1}{2} \frac{q B_z}{m} s^2 \right) \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{q B_z}{m} r. \quad (4.3)$$

Ainsi, en prenant la donnée initiale $I_1(v_\theta) = v_\theta + \frac{q B_z}{m} \frac{v_\theta^2}{2}$, nous trouvons un nouvel invariant pour l'équation de Vlasov,

$$I(r, v_\theta) = I(1, v_\theta(1)) = I_1(v_\theta(1)) = r v_\theta + \frac{1}{2} \frac{q B_z}{m} r^2. \quad (4.3)$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle formulation de l'équation de Vlasov par un changement de variable $(r, v_r, v_\theta) \rightarrow (r, v_r, I)$ avec

$$v_\theta = \frac{I}{r} - \frac{1}{2} \frac{q B_z}{m} r$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{q}{m} E_s(t, r) + \frac{I^2}{r^3} - \frac{1}{4} \left(\frac{q B_z}{m} \right)^2 r \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} = 0, \quad \forall I \in \mathbb{R}. \quad (4-3)$$

Cette nouvelle formulation est particulièrement bien adaptée pour la parallélisation des calculs puisque la variable I joue seulement le rôle d'un paramètre [3].

4.3 Solutions stationnaires.

4.3.1 Fonction de distribution K-V.

Nous nous intéressons à la fonction de distribution de Kapchinsky-Vladirmisky (K-V), qui est une solution stationnaire de l'équation de Vlasov-Poisson. Cette fonction de distribution a fait l'objet de nombreuses études en physique des faisceaux et constitue le point de départ de la focalisation [4]. Soit $a > 0$, nous considérons la fonction de distribution

$$f_0(r, v_r, v_\theta) = \frac{n_0}{\pi} \delta_0 \left(\frac{2}{m} H - \beta I - a^2 \right), \quad (4-3)$$

où n_0 représente la densité totale, H et I sont donnés par (4.2) et (4.2), tandis que le paramètre β reste à déterminer. Puisque H et I sont des invariants pour l'équation de Vlasov, il est clair que f_0 est une solution stationnaire de l'équation de Vlasov

$$f(t, r, v_r, v_\theta) = f_0(r(0), v_r(0), v_\theta(0)) = \frac{n_0}{\pi} \delta_0 \left(\frac{2}{m} H - \beta I - a^2 \right).$$

Il reste à calculer le champ autoconsistant à partir de l'équation de Poisson

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_s}{\partial r} \right) = \rho / \epsilon_0.$$

Nous calculons d'abord la densité de charge ρ . Pour cela, intégrons la fonction de distribution par rapport à (v_r, v_θ) , pour un calcul rigoureux nous devons approcher la mesure de Dirac par une fonction intégrable, par exemple

$$g_k(x) = \begin{cases} k/2, & \text{si } x \in [-1/k, 1/k], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous notons par $f_{0,k}$ la fonction de distribution approchée de f_0 . Ainsi, pour tout $0 < r \leq r_{max}$, où r_{max} représente le rayon du faisceau

$$\begin{aligned}\rho_k(t, r) &= \frac{q n_0}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f_{0,k}(r, v_r, v_\theta) dv_r dv_\theta, \\ &= \frac{q n_0}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g_k \left(v_r^2 + v_\theta^2 + 2 \frac{q}{m} \phi_s - \beta(r v_\theta + \frac{1}{2} \frac{q B_z}{m} r^2) - a^2 \right) dv_r dv_\theta, \\ &= \frac{q n_0}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g_k (v_r^2 - K) dv_r dv_\theta,\end{aligned}$$

avec

$$K = -v_\theta^2 - 2 \frac{q}{m} \phi_s + \beta r \left(v_\theta + \frac{1}{2} \frac{q B_z}{m} r \right) + a^2.$$

Alors, la densité de charge approchée s'écrit

$$\begin{aligned}\rho_k(t, r) &= \frac{q n_0}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g_k (v_r^2 - K) dv_r dv_\theta, \\ &= \frac{q n_0}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^+} g_k (v - K) \frac{dv}{\sqrt{v}} \right) \text{supp}(g_k) dv_\theta, \\ &= \frac{q n_0}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{K}} \text{supp}(g_k) dv_\theta + O(1/k^2).\end{aligned}$$

Nous posons ensuite

$$R = a^2 + \frac{1}{4} \beta^2 r^2 + \beta \frac{1}{2} \frac{q B_z}{m} r^2 - 2 \frac{q}{m} \phi_s$$

et le paramètre β est tel que $R > 0$. Nous calculons,

$$\begin{aligned}\rho_k(t, r) &= \frac{q n_0}{\pi} \int_{-R}^R \frac{dv'_\theta}{\sqrt{R - v_\theta'^2}} + O(1/k^2), \\ &= q n_0 + O(1/k^2).\end{aligned}$$

Lorsque k tend vers l'infini, nous concluons que

$$\rho(t, r) = q n_0.$$

Le potentiel ϕ_s est alors donné par

$$\phi_s(r) = \frac{q n_0 r^2}{\varepsilon_0 4}.$$

Finalement, le paramètre β doit vérifier

$$R = a^2 + \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \frac{q B_z}{m} \beta - \frac{q^2 n_0}{m \varepsilon_0} \right) \frac{r^2}{2} > 0.$$

Nous reconnaissons la fréquence plasma ω_p et la fréquence cyclotronique ω_c ,

$$\omega_p^2 = \frac{q^2 n_0}{m \varepsilon_0}, \quad \omega_c = \frac{q}{m} B_z.$$

Nous avons donc,

$$R = a^2 + \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \omega_c \beta - \omega_p \right) \frac{r^2}{2} > 0.$$

La densité de charge est donnée par une constante pourvu que l'on choisisse bien β pour que le faisceau soit focalisé, le champ électrique auto-consistant est alors linéaire par rapport à r . Ainsi, la fonction de distribution K-V est bien une solution stationnaire de l'équation de Vlasov.

Dans le but d'analyser et de comparer le comportement de différentes solutions stationnaires ou non stationnaires, P. M. Lapostolle et F. J. Sacherer ont introduit les valeurs RMS et le concept de faisceaux équivalents [2]. Deux faisceaux composés de la même espèce de particules, ayant la même densité, le même courant et la même énergie cinétique sont équivalents si les seconds moments de la fonction de distribution en x , y , v_x et v_y sont égaux.

Exemple: considérons le problème de la focalisation de faisceau par un champ électrique appliqué $E_a(r)$ linéaire en la variable r ,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{q}{m} E_s(t, r) + \frac{I^2}{r^3} - E_a(r) \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} = 0, \quad \forall I \in \mathbb{R}, \quad (4.12)$$

où $I = r v_\theta$. Soit $f(t, x, y, v_x, v_y)$ une fonction de distribution stationnaire ou non stationnaire normalisée dans l'espace des phases $4D$. En coordonnées cartésienne, l'équation (4.3.1) s'écrit alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{q}{m} (E_s(t, x, y) - E_a(x, y)) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0.$$

Le second moment en x est défini par

$$\overline{x^2} = \int_{\mathbb{R}^4} x^2 f(t, x, y, v_x, v_y) dx dy dv_x dv_y$$

et le rayon RMS dans la direction des x est donné par

$$x_{rms} = \sqrt{\overline{x^2}}.$$

De la même manière, nous définissons y_{rms} , $v_{x_{rms}}$, $v_{y_{rms}}$. Dans la suite, nous utiliserons les notations habituelles $x'_{rms} = v_{x_{rms}}/v_z$ et $x' = v_x/v_z$, où v_z désigne la vitesse constante du faisceau dans la direction z . Pour une fonction de distribution K-V,

nous notons par $x_{max} = a$ et $x'_{max} = a'$, le rayon maximal du faisceau sur les axes x et x' . Nous avons alors [4]

$$\overline{x^2} = a^2/4, \quad \overline{x'^2} = a'^2/4.$$

Ainsi, pour une fonction de distribution quelconque, nous pouvons définir un faisceau équivalent à l'aide des moment en (\mathbf{x}, \mathbf{v}) .

Ensuite, nous introduisons l'émittance qui joue un rôle fondamental dans la physique des faisceaux. Elle décrit l'ensemble des particules qui se trouvent à l'intérieur du faisceau

$$\epsilon_x = \left(\overline{x^2 \overline{x'^2}} - \overline{x} \overline{x'}^2 \right)^{1/2}.$$

Cette valeur n'est en général pas constante. En effet, les non linéarités dues au couplage de l'équation de Vlasov avec l'équation de Poisson, font croître l'émittance tout en oscillant au cours du temps.

D'un point de vue pratique, la fonction de distribution K-V n'est pas le meilleur modèle pour représenter un faisceau de laboratoire. Pour cela, nous étudions les faisceaux semi-gaussiens (voir chapitre 2) ou les fonctions de distribution de Maxwell-Boltzmann. Cependant, pour les solutions stationnaires ou non stationnaires, les faisceaux K-V sont toujours utilisés pour calculer les paramètres d'adaptation à l'aide de la définition de faisceaux équivalents.

4.3.2 Fonction distribution de Maxwell-Boltzmann.

Nous étudions ici une solution stationnaire de l'équation de Vlasov axisymétrique normalisée $q = m = 1$ avec un champ électrique appliqué linéaire $E_a(t, r) = -r/2$. Considérons la fonction de distribution pour $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$f_0(r, v_r, v_\theta) = \frac{\alpha}{2\pi} \exp \left(- \left(\frac{1}{2} (v_r^2 + v_\theta^2) + \phi_s(t, r) + \phi_a(t, r) \right) \right), \quad (4.-12)$$

avec $\phi_a(t, r) = r^2/4$ et $E_a(t, r) = -\partial_r \phi_a(t, r)$. Nous évaluons ensuite la solution de l'équation de Poisson normalisée

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_s}{\partial r} \right) = \alpha \exp \left(-\phi_s - \frac{r^2}{4} \right). \quad (4.-12)$$

Lorsque α est différent de zéro et de un, nous ne connaissons pas de solutions explicites de l'équation de Poisson (4.3.2). C'est pourquoi, nous approchons le potentiel ϕ_s par une formule aux différences finies : soit $(r_i)_{i \geq 0}$, un maillage de $]0, r_{max}]$

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0, \\ \phi_1 &= \alpha \Delta r^2 / 4, \\ \phi_i &= \frac{r_{i-1}}{r_{i-1/2}} \left(2 \phi_{i-1} - \phi_{i-2} \left(\frac{r_{i-3/2}}{r_{i-1}} - \alpha \Delta r^2 \exp(-\phi_{i-1} - r_{i-1}^2/4) \right) \right). \end{aligned}$$

4.4 Discrétisation de l'équation de Vlasov axisymétrique.

Nous utilisons une grille de l'espace des phases (r, v_r, I) . Cependant, il est nécessaire d'utiliser une discrétisation particulière dans la direction I . En effet, lorsque le champ électrique total est linéaire comme pour une fonction de distribution K-V, les courbes caractéristiques s'écrivent

$$\frac{\omega^2}{2}r^2 + v_r^2 + \frac{I^2}{r^2} = c^{te},$$

où

$$-\frac{q}{m}(\phi_s + \phi_a) = \frac{\omega^2}{2}r^2.$$

Il faut donc contrôler le ratio I/r , la discrétisation dans la direction I vérifie donc

$$I = \pm\omega r^2.$$

Nous utilisons alors la conservation des valeurs de la fonction de distribution le long des caractéristiques pour construire l'algorithme. Les nouvelles valeurs sont calculées en chaque point de la grille en recherchant l'origine des courbes caractéristiques au temps précédent. Cette méthode n'implique pas de condition de stabilité sur le pas de temps du type *CFL*, ce qui pourrait être très pénalisant pour traiter l'équation près de l'axe $r = 0$.

Ensuite, dans l'équation de Vlasov axisymétrique le facteur I^2/r^3 agit comme un potentiel de répulsion par rapport au champ électrique total. Ce potentiel est le plus important près de l'axe, où le champ électrique est négligeable. La principale difficulté dans la discrétisation de l'équation de Vlasov en coordonnées cylindriques se situe donc dans le traitement de l'équation près de l'axe $r = 0$. La méthode la plus naturelle consisterait à séparer la partie du transport libre qui peut être résolue explicitement, puis à résoudre la partie autoconsistante. Cependant, des erreurs numériques sont générées près de l'axe $r = 0$, et se propagent à l'intérieur du domaine. En effet, lorsque l'on souhaite observer des phénomènes à de très petites échelles, il est impératif d'empêcher la propagation des erreurs numériques. Une autre possibilité est d'utiliser un schéma de splitting d'opérateurs classiques : sur l'intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$, la fonction de distribution au temps t^n est donnée par $f^n(r, v_r, I)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f^*}{\partial t} + v_r \frac{\partial f^*}{\partial r} = 0, \\ f^*(0, r, v_r, I) = f^n(r, v_r, I). \end{cases} \quad (4-14)$$

Nous calculons le champ électrique autoconsistant E_s à partir de l'approximation $f^*(\Delta t, r, v_r, I)$. Puis,

$$\begin{cases} \frac{\partial f^{**}}{\partial t} + \left(\frac{q}{m}E_s(t, r) + \frac{I^2}{r^3} - \frac{1}{4} \left(\frac{qB_z}{m} \right)^2 r \right) \frac{\partial f^{**}}{\partial v_r} = 0, \\ f^{**}(0, r, v_r, I) = f^*(\Delta t, r, v_r, I). \end{cases} \quad (4-13)$$

Finalement, $f^{n+1}(r, v_r, I) = f^{**}(r, v_r, I)$.

La discrétisation de l'équation (4.-14) nécessite l'application de conditions aux limites artificielles. En effet, en $r = 0$ et pour $v_r > 0$, le flux de particules est entrant, tandis que pour $v_r < 0$ des particules sortent du domaine de calcul. Ainsi, nous devons modéliser le passage des particules à travers l'axe $r = 0$. Pour cela, nous avons imposé la réflexion spéculaire de particules

$$f(0, v_r, I) = f(0, -v_r, I), \quad \forall v_r > 0.$$

La résolution numérique des équations de transport (4.-14) et (4.-13) est ensuite réalisée à l'aide d'une méthode semi-lagrangienne avec une interpolation de type Hermite. Par exemple, pour l'équation (4.-14), sur l'intervalle $[r_i, r_{i+1}]$, nous approchons la dérivée de la fonction de distribution en chaque point de la grille par une formule de différences finies d'ordre quatre

$$\partial_r f_i^n = \frac{1}{12\Delta r} [8[f_{i+1}^n - f_{i-1}^n] - [f_{i+2}^n - f_{i-2}^n]].$$

La reconstruction est alors donnée sur chaque intervalle $[r_i, r_{i+1}]$ par un polynôme de degré trois interpolant la fonction de distribution et sa dérivée aux points de la grille

$$\begin{aligned} f^n(r) &= f_i^n + (r - r_i) \partial_r f_i^n + (r - r_i)^2 [3[f_{i+1}^n - f_i^n] - \Delta r [2\partial_x f_i^n + \partial_x f_{i+1}^n]] \\ &+ (r - r_i)^3 [\Delta x [\partial_r f_{i+1}^n + \partial_x f_i^n] - 2[f_{i+1}^n - f_i^n]]. \end{aligned}$$

La fonction de distribution est alors reconstruite sur tout le domaine au temps t^n . Il reste alors à utiliser les courbes caractéristiques pour calculer la fonction de distribution aux points de la grille au temps t^{n+1} .

4.5 Résultats numériques.

4.5.1 Faisceau semi-gaussien.

Dans cet exemple, nous considérons l'évolution d'un faisceau semi gaussien dans l'espace des phases de dimension quatre. De plus, la fonction de distribution est invariante par rotation.

Nous résolvons donc le système de Vlasov-Poisson en coordonnées cylindriques. Puis, pour permettre la focalisation du faisceau nous appliquons un champ magnétique constant le long de l'axe z . Alors, la fonction de distribution obéit à l'équation de Vlasov de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(E_s(t, r) + \frac{I^2}{r^3} - \left(\frac{q B_z}{2m} \right)^2 r \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} = 0, \quad \forall I \in \mathbb{R}, \quad (4.-15)$$

où $I = r v_\theta + \frac{q B_z}{m} \frac{r^2}{2}$ et E_s représente le champ électrique autoconsistant donné par l'équation de Poisson. La fonction de distribution initiale en coordonnées cartésiennes

est donnée pour $x^2 + y^2 \leq a^2$

$$f_0(x, y, v_x, v_y) = \frac{n_0}{(2\pi v_{th}^2)(\pi a^2)} \exp\left(-\left((v_x - \frac{qB_z}{2m}y)^2 + (v_y + \frac{qB_z}{2m}x)^2\right)/2v_{th}^2\right),$$

et $f_0(x, y, v_x, v_y) = 0$, si $x^2 + y^2 > a^2$. Le champ magnétique B_z et la vitesse thermique v_{th} sont calculés à partir des quantités RMS, de sorte que le faisceau soit équivalent au faisceau K-V adapté.

Nous supposons que le faisceau est composé d'une seule espèce de particules, des ions lourds de potassium. La densité n_0 est calculée à partir du courant $I=0.2$ A et de la vitesse de propagation du faisceau le long de l'axe z

$$v_z = c \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}}, \quad \gamma = 1 + \frac{q}{m c^2} K,$$

où K est l'énergie propre du faisceau $K = 8.10^4$ eV. Finalement, le rayon du faisceau est $a=0.02$ m et la dépression du nombre d'onde $\omega/\omega_0 = 1/4$.

Nous observons la formation d'une onde au bord du faisceau. Celle-ci se propage à l'intérieur du faisceau et est finalement réfléchi près de l'axe $r = 0$. Le champ électrique autoconsistant initial est linéaire à l'intérieur du faisceau. Les variations du champ sont relativement faibles mais suffisantes pour perturber fortement la densité (Fig. 4.1). La résolution de l'équation axisymétrique permet d'utiliser un plus grand nombre d'inconnues que pour l'approximation de l'équation en coordonnées cartésiennes. Ceci permet de décrire plus précisément la fonction de distribution. De plus, la nouvelle formulation de l'équation de Vlasov conserve parfaitement les invariants θ et $I = r v_\theta + \frac{qB_z}{2m} r^2$. Dans ce cas, l'utilisation de l'équation axisymétrique et d'une discrétisation par une méthode semi-lagrangienne donnent des résultats très satisfaisants. Lorsque l'on compare l'évolution de la densité obtenue par le code axisymétrique et par une méthode eulérienne ou semi-lagrangienne en coordonnées cartésiennes, nous observons une plus grande amplitude de l'onde à l'intérieur du faisceau. Ensuite, l'amortissement de cette onde est plus tardif avec le code axisymétrique. En effet, la résolution plus faible en coordonnées cartésiennes introduit de la dissipation numérique qui donne une approximation moins précise du transport de particules. Pour terminer, il est possible de comparer les résultats avec ceux obtenus par les méthodes particulières (code WARP [1]). Le bruit numérique est clairement trop important pour distinguer les erreurs numériques des phénomènes physiques. Il faut utiliser un grand nombre de particules pour obtenir un résultat similaire (un million de particules) [5].

4.5.2 Faisceau Maxwell-Boltzmann.

Nous considérons une fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann (4.3.2) qui est une solution stationnaire du système autoconsistant de Vlasov-Poisson. Nous perturbons la densité de 50%. Les paramètres du faisceau sont les suivants : les particules

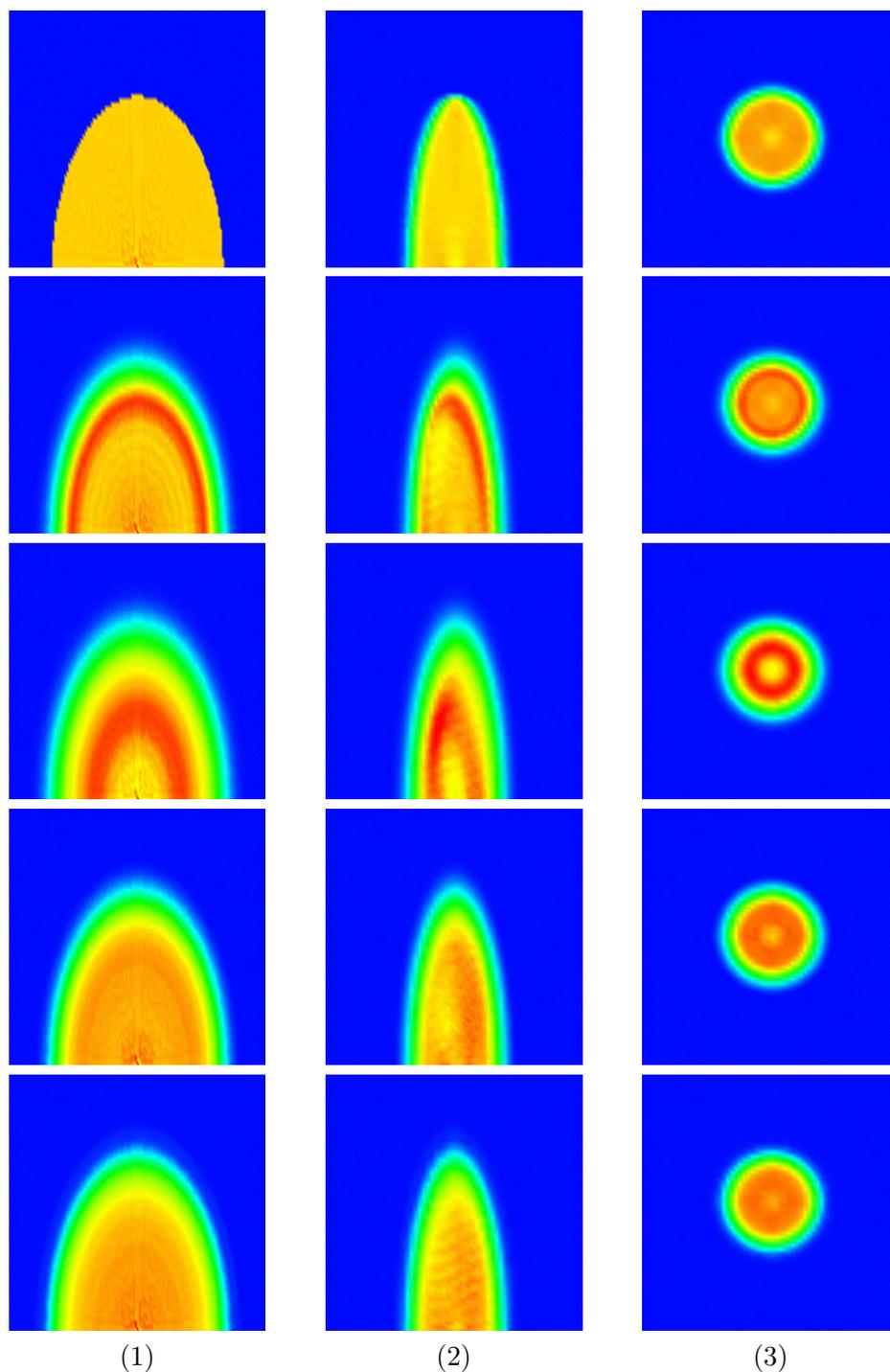


Figure 4.1: Développement de (1) la projection en (x,y) , (2) la projection en (x,v_x) , (3) la projection en (v_x,v_y) obtenues par le code axisymétrique pour un faisceau semi-gaussien à $z=0, 0.32, 0.48, 0.64, 0.96$ m.

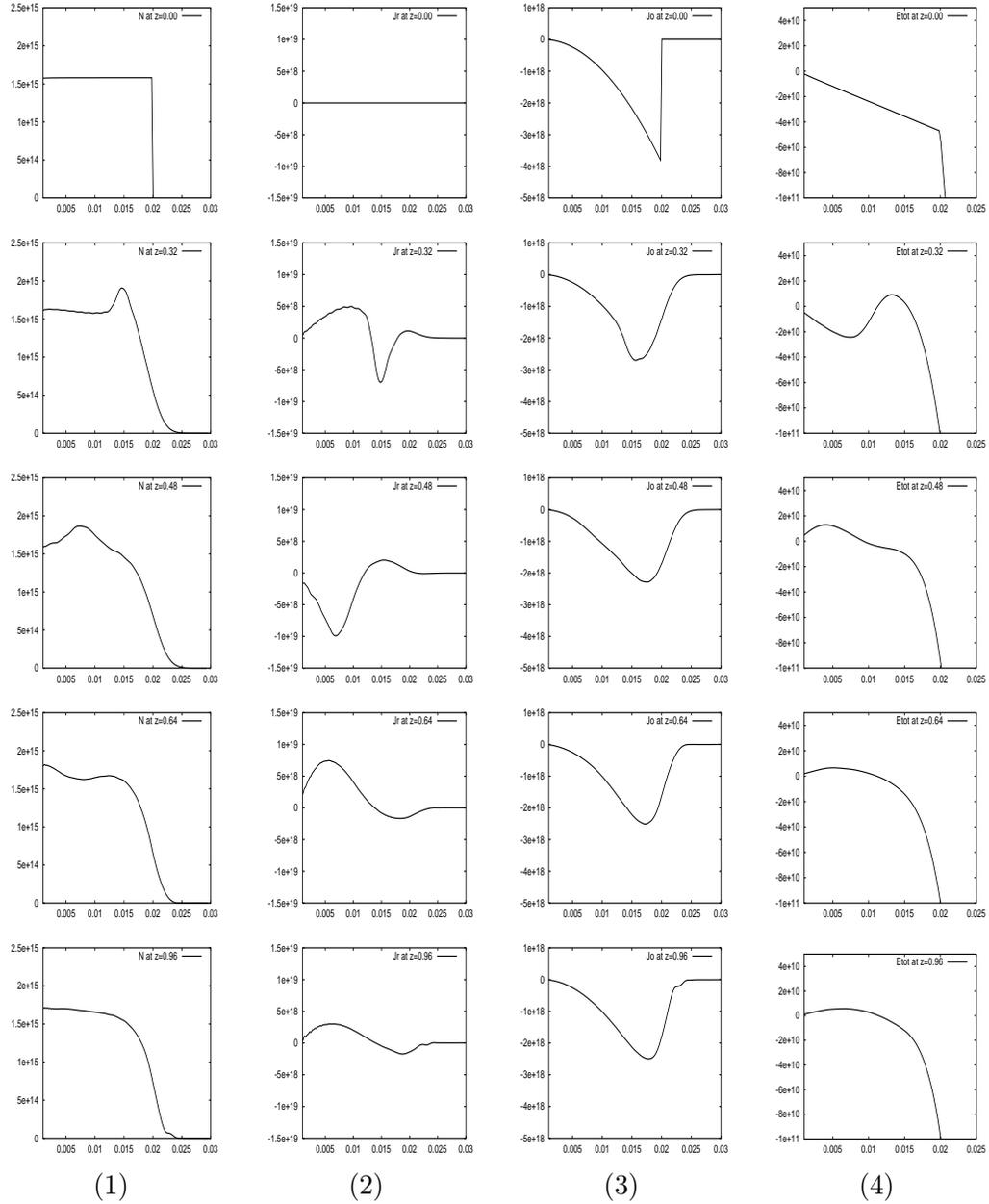


Figure 4.2: Développement de la coupe de (1) la densité $N(t,r)$, (2) du premier moment en v_r , (3) du premier moment en v_θ , (4) du champ de force total $E_s(t,r) - \left(\frac{qB_z}{2m}\right)^2 r$ à l'intérieur du faisceau obtenues par le code axisymétrique pour un faisceau semi-gaussien $z=0, 0.32, 0.48, 0.64, 0.96$ m.

sont des ions lourds (potassium), le courant vaut $I = 0.2$ A et l'énergie $K = 8 \cdot 10^4$ eV et le rayon est $r_{max} = 0.01$ m. Nous présentons d'abord l'évolution des quantités RMS

$$r_{rms} = (\overline{r^2})^{1/2}, \quad v_{rms} = (\overline{v_r^2})^{1/2}, \quad v_{\theta rms} = (\overline{v_\theta^2})^{1/2}$$

et l'émittance ϵ_x , donnée par

$$\epsilon_x = \sqrt{\overline{x^2 v_x^2} - \overline{x} \overline{v_x^2}}.$$

Or, $x = r \cos \theta$

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \int_{\mathbb{R}^4} x^2 f(t, x, y, v_x, v_y) dx dy dv_x dv_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} r^2 f(r, v_r, I) dr dv_r dI \left(\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta \right) \\ &= \pi \overline{r^2}. \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta$

$$\begin{aligned} \overline{v_x^2} &= \int_{\mathbb{R}^4} v_x^2 f(t, x, y, v_x, v_y) dx dy dv_x dv_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} v_r^2 f(r, v_r, I) dr dv_r dI \left(\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta \right) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} v_\theta^2 f(r, v_r, I) dr dv_r dI \left(\int_0^{2\pi} (\sin \theta)^2 d\theta \right) \\ &= \pi (\overline{v_r^2} + \overline{v_\theta^2}). \end{aligned}$$

Enfin, $\overline{x v_x} = r v_r (\cos \theta)^2 - r v_\theta (\sin \theta)^2$,

$$\begin{aligned} \overline{x v_x} &= \int_{\mathbb{R}^4} x v_x f(t, x, y, v_x, v_y) dx dy dv_x dv_y \\ &= \pi \overline{r v_r}. \end{aligned}$$

Ce qui permet de calculer l'émittance à partir des coordonnées cylindriques

$$\epsilon_x = (\pi \sqrt{\overline{r^2 (\overline{v_r^2} + \overline{v_\theta^2})} - \overline{r v_r^2}}) / (2\pi) = 0.5 \sqrt{\overline{r^2 (\overline{v_r^2} + \overline{v_\theta^2})} - \overline{r v_r^2}}.$$

La Fig. 4.5 illustre la formation d'un halo autour du corps du faisceau. Ces coupes sont réalisées lorsque la valeur RMS v_{rms} correspond à un extremum. En effet, c'est à cet instant que le halo est le plus visible [4]. Pour une dépression du nombre d'onde $\omega/\omega_0 = 1/2$, nous observons les contours de la densité de charge pour $z=09.4$ m, 13.57 m, 16.79 m, 23.05 m, 25.14 m. Le halo correspond approximativement à un millièème de la densité totale. De plus, pour notre faisceau le rayon vaut 0.01 m et la dimension du plateau est approximativement de 0.025 m, ce qui correspond bien à la valeur maximale du rayon, donnée par la formule empirique de T. P. Wangler *et al.* [6] qui vaut 0.0241 m.

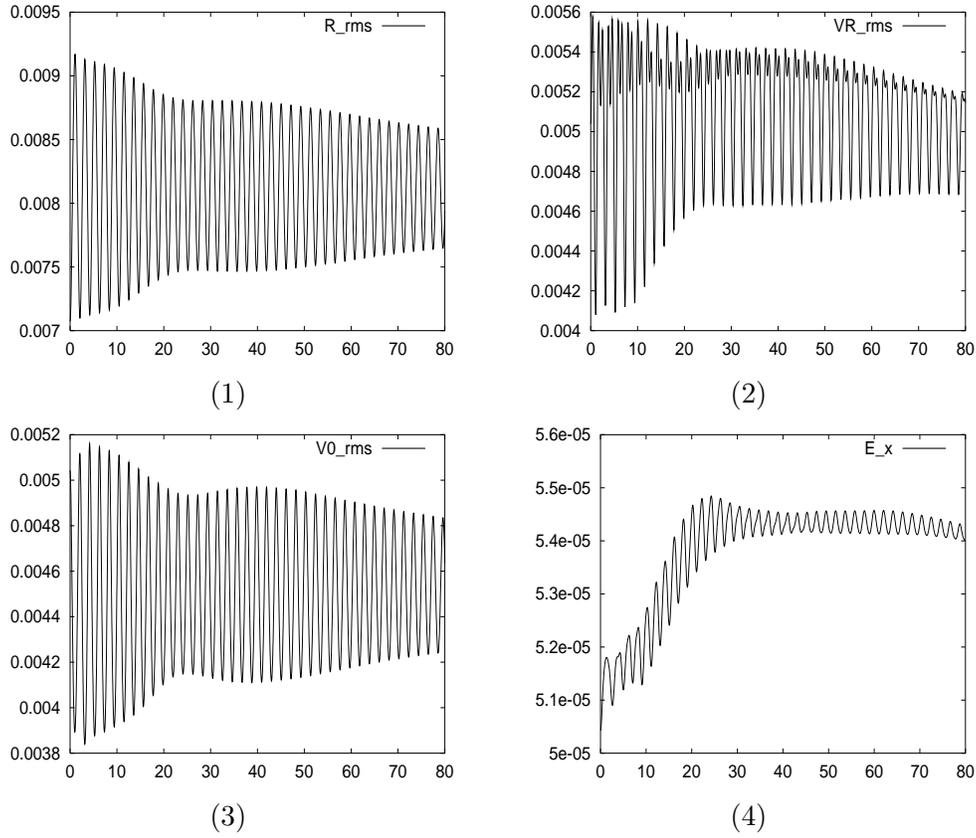


Figure 4.3: (1) r_{rms} , (2) $v_{r_{rms}}$, (3) $v_{\theta_{rms}}$ (4) ϵ_x obtenues par l'équation axisymétrique pour un faisceau Maxwell-Boltzmann.

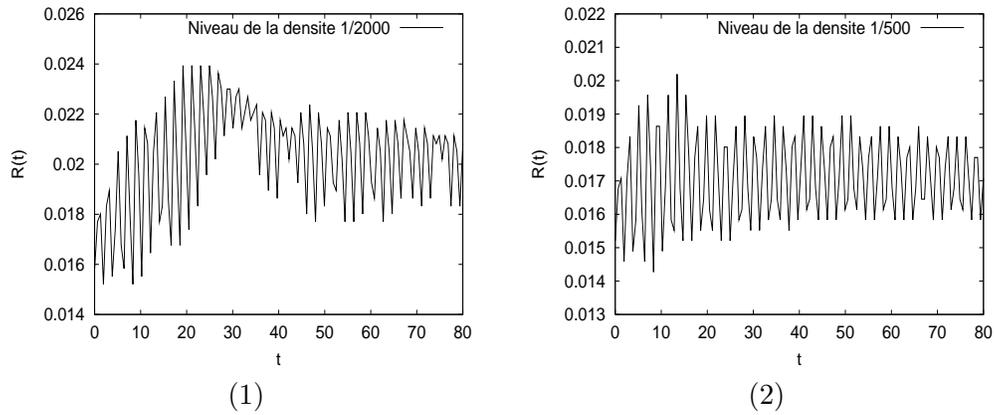


Figure 4.4: Évolution au cours du temps du rayon du faisceau correspondant à (1) un deux-millième de la densité totale, (2) un cinq-centième de la densité totale obtenu par l'équation axisymétrique pour un faisceau Maxwell-Boltzmann.

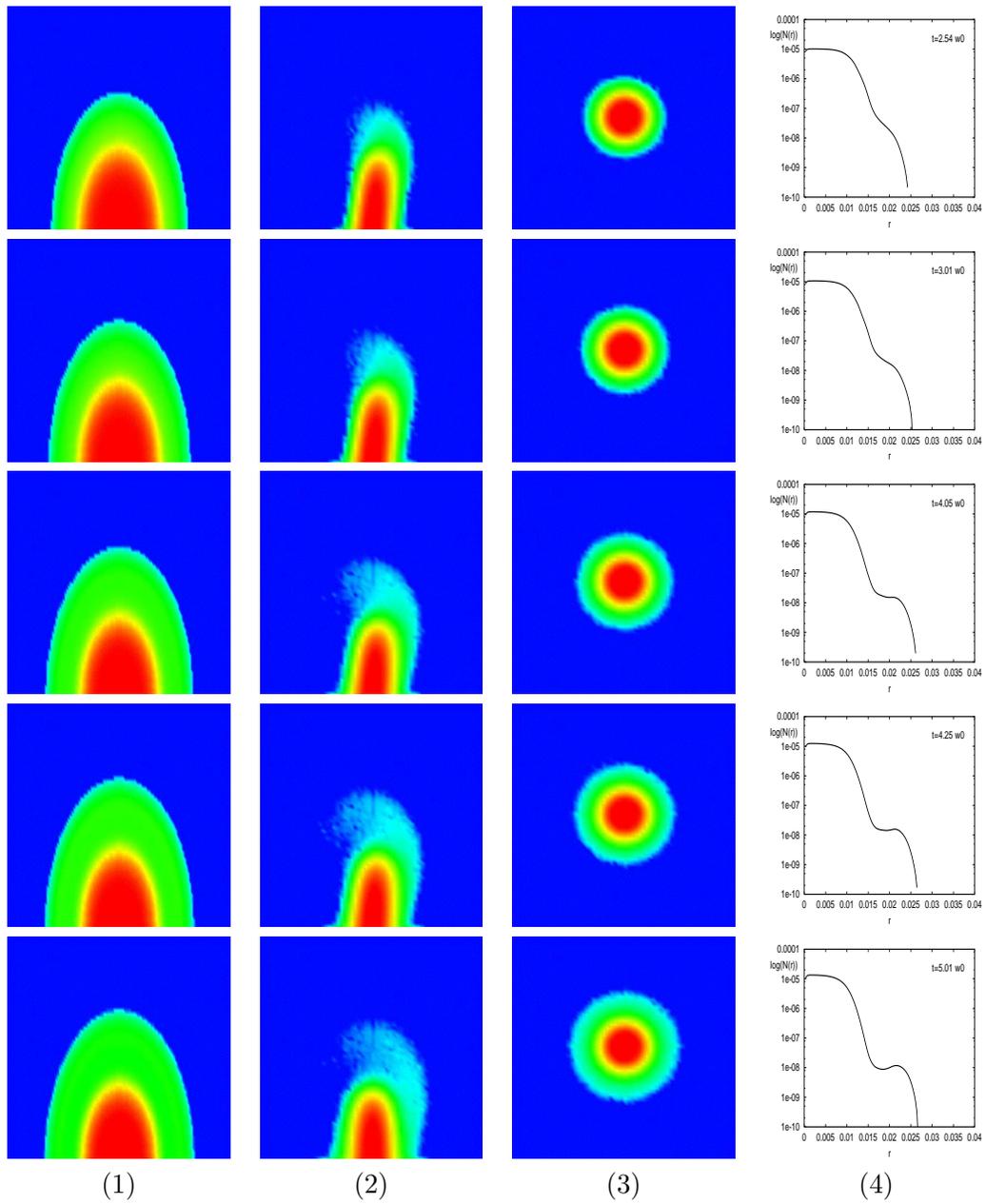


Figure 4.5: Développement de (1) la projection en (x, y) , (2) la projection en (x, v_x) , (3) la projection en (v_x, v_y) , (4) la coupe de la densité à l'échelle logarithmique obtenues par l'équation axisymétrique pour un faisceau Maxwell-Boltzmann.

4.6 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode pour la discrétisation de l'équation de Vlasov en coordonnées cylindriques sur une grille de l'espace des phases. Les résultats numériques montrent que la précision de ce type de méthode est telle qu'il est possible de mettre en évidence des phénomènes très fins comme la formation de halos. Ainsi, par cette méthode nous pouvons traiter un grand nombre d'applications de la physique des faisceaux et construire des solutions de références pour les codes en coordonnées cartésiennes. En effet, pour traiter la focalisation par gradients alternés, il faut utiliser l'espace des phases complet puisque la fonction de distribution n'est plus axisymétrique. Nous devons donc valider les solutions numériques obtenues par les codes $2D \times 2D$ avant de traiter des problèmes plus complexes.

Bibliography

- [1] A. Friedman, D.P Grote et I. Haber, *Phys. Fluids B* **4** (1992), 2203–2210.
- [2] P.M. Lapostolle, *IEEE Trans. Nucl. Sci. NS* **18** (1971), 1101.
- [3] G. Manfredi, M. Shoucri, M.R. Feix, P. Bertrand, E. Fijalkow et A. Ghizzo, The numerical integration of the Vlasov equation possessing an invariant. *J. Comput. Phys.* **121** (1995), 298–313.
- [4] M. Reiser, Theory and design of charged particle beams. *Wiley and sons* (1994).
- [5] E. Sonnendrücker, J.J. Barnard, A. Friedman, D.P. Grote et S.M. Lund, Simulation of heavy ion beams with a semi-Lagrangian Vlasov solver. *Proceedings of the HIF 2000 symposium.* (2000).
- [6] T.P. Wangler, R.W. Garnett, E.R. Gray, R.D. Ryne et T.S. Wang, Dynamics of beam halo in mismatched beams. *XVIII International Linac Conference, Genève, Suisse* (1996).

Chapter 5

Approximation de l'équation de Landau.

5.1 Introduction.

L'équation de Landau ou Fokker-Planck-Landau (FPL) a été établie par Landau en 1936 pour l'étude des collisions dans les plasmas. En effet, l'équation de Boltzmann perd tout son sens pour des interactions coulombiennes (voir Partie I de [26]) qui sont pourtant de première importance en physique des plasmas, physique des accélérateurs, lasers, interactions faisceaux-plasmas, ondes de chocs et expansion de plasmas ou encore en astrophysique. Ce modèle décrit donc les collisions binaires entre des particules chargées avec des interactions de longue portée,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} E(t, x) \cdot \nabla_v f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f), \quad (5.1)$$

où q représente la charge d'une particule, et m sa masse, $Q(f, f)$ est l'opérateur de collisions défini par

$$Q(f, f) = \nabla_v \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(v - v^*) \left[(\nabla_v f(t, v)) f(t, v^*) - (\nabla_{v^*} f(t, v^*)) f(t, v) \right] dv^*, \quad (5.2)$$

avec

$$\Phi(v) = |v|^{\gamma+2} S(v), \quad \text{et} \quad S(v) = Id - \frac{v \otimes v}{|v|^2}. \quad (5.2)$$

L'inconnue $f(t, x, v)$ représente la densité d'un gaz ou d'un plasma dans l'espace des phases, de position x et vitesse v . $f(t, x, v)$ est positive et telle que le moment d'ordre deux soit fini. De plus, dans l'équation (5.1), ε représente le nombre de Knudsen, qui détermine la fréquence de collisions et $E(t, x)$ désigne le champ de force autoconsistant donné par la solution de l'équation de Poisson

$$E(t, x) = -\nabla_x \phi(t, x), \quad -\Delta \phi(t, x) = \frac{q}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv,$$

où ε_0 est la permittivité du vide. Comme pour l'équation de Boltzmann, différentes valeurs de γ dans (5.1) permettent d'établir un classement : nous parlerons de potentiels durs lorsque $\gamma > 0$, de molécules Maxwelliennes, lorsque $\gamma = 0$ et de potentiels mous pour $\gamma < 0$. Ce dernier cas contient les interactions coulombiennes ($\gamma = -3$), dont les principales applications sont dans le domaine de la physique des plasmas. La structure algébrique de l'opérateur est similaire à celle de l'opérateur de Boltzmann, nous retrouvons ainsi des propriétés physiques comme la conservation de la masse, de l'impulsion, de l'énergie

$$\int Q(f, f)(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} dv = 0$$

et la décroissance de l'entropie cinétique $H(t)$,

$$\frac{dH}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) \ln(f(t, v)) dv \leq 0.$$

Finalement, les états stationnaires de l'opérateur FPL i.e. $Q(f, f) = 0$, sont donnés par des fonctions de distribution Maxwelliennes :

$$M_{\rho, u_0, T}(v) = \frac{\rho}{(2\pi v_{th}^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v - u_0|^2}{2v_{th}^2}\right),$$

où ρ est la masse totale, u_0 la vitesse moyenne, et v_{th} la vitesse thermique qui est liée à la température T par $v_{th} = \sqrt{k_B T/m}$, où le réel positif k_B désigne la constante de Boltzmann. De plus,

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} f(v) dv, \quad u_0 = \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} f(v)v dv, \quad T = \frac{1}{3\rho} \int_{\mathbb{R}^3} f(v)(u_0 - v)^2 dv.$$

Comme il est bien connu dans la littérature et établi par les travaux mathématiques d'A.-A. Arsenev et N. V. Peskov [1], P. Degond et B. Lucquin-Desreux [12] et plus récemment L. Desvillettes [13], l'équation FPL est obtenue en supposant que les collisions rasantes sont prépondérantes dans l'équation de Boltzmann. Concernant le problème d'existence de solutions, A.-A. Arsenev et N.-V. Peskov [2] ont établi un premier résultat d'existence locale en temps de solutions faibles dans le cas spatialement homogène pour les potentiels coulombiens. Récemment, une preuve d'existence globale en temps de solutions renormalisées a été donnée par R. Alexandre et C. Villani [1, 27] dans le cas non homogène et pour une donnée initiale d'énergie finie. Nous renvoyons le lecteur intéressé au remarquable travail de synthèse de C. Villani sur le sujet [28].

Pour l'équation de Boltzmann, la plupart des simulations numériques sont réalisées par des méthodes Monte-Carlo [10]. Par contre, pour l'équation de Landau et plus particulièrement pour les interactions coulombiennes, ces méthodes ne donnent pas de résultats satisfaisants. D'ailleurs, la plupart de ces méthodes particulières sont

basées sur une intuition physique plus que sur la discrétisation directe de l'équation de Landau [6, 19]. Plusieurs schémas déterministes ont donc été considérés, ces dernières années, pour la résolution numérique de l'équation FPL dans le cas homogène (la fonction de distribution f ne dépend pas de la variable d'espace x). D'abord, dans le cas isotrope [3], c'est-à-dire lorsque la fonction de distribution ne dépend que de la variable d'énergie $\varepsilon^2 = |v|^2$, puis pour les problèmes à symétrie cylindrique dans [23, 17]. La construction d'un schéma numérique conservatif et entropique pour l'approximation de l'opérateur FPL dans l'espace des vitesses $v \in \mathbb{R}^3$ a été proposée par P. Degond et B. Lucquin-Desreux [11] : le point de départ de cette méthode est de discrétiser l'opérateur en utilisant la formulation faible du problème homogène. Ceci permet de retrouver toutes les propriétés de conservations. Cependant, une implantation directe d'un tel schéma en dimension trois est trop coûteuse. Plusieurs méthodes rapides ont alors été considérées pour réduire le temps de calcul, comme les méthodes multipole [16] et multigrille [7]. Une autre approche, basée sur la discrétisation directe de l'opérateur en utilisant une méthode spectrale, a récemment été envisagée [20]. Elle permet de réduire le coût quadratique à $N \log N$, où N est le nombre total d'inconnues.

Ce chapitre est constitué de deux parties. La première est consacrée à la description de différents algorithmes rapides pour approcher l'opérateur de Landau. Nous présentons une nouvelle méthode basée sur l'approximation de l'opérateur pour une fonction de distribution isotrope. Cette approximation est bien connue en physique des plasmas pour le cas pseudo-isotrope [25] et permet de réduire l'évaluation de l'opérateur de collisions à un coût linéaire. Des tests comparatifs pour les méthodes multigrille, spectrale et pseudo-isotrope dans le cas maxwellien et coulombien sont réalisés. Les méthodes spectrale et multigrille ont prouvé leur efficacité dans le cas homogène, mais d'après nos connaissances, il n'existe pas de résultats numériques dans la situation non homogène. Pourtant, le couplage avec la partie transport est nécessaire pour traiter des problèmes appliqués à la physique des plasmas ou à la dynamique des gaz. De plus, l'ajout de la partie transport peut engendrer des oscillations ou des discontinuités dans l'espace des vitesses et le traitement de l'opérateur de collisions par ces algorithmes rapides pourrait entraîner des problèmes de précision. Dans la deuxième partie, nous donnons un algorithme efficace, basé sur la décomposition des opérateurs de collisions et transports, pour traiter l'équation de Landau non homogène. L'équation de transport sera résolue en utilisant le schéma PFC d'ordre trois permettant de conserver la masse, l'impulsion, l'énergie et la positivité.

5.2 Comparaison de schémas numériques.

Nous rappelons les principaux traits des algorithmes rapides, puis présentons la méthode pseudo-isotropique. Ensuite, nous proposons des résultats numériques classiques pour le traitement de l'équation FPL dans le but de comparer la précision, le coût et la robustesse des différents schémas numériques dans le cas homogène. Dans la dernière partie, nous rappelons le schéma à pas fractionnaire permettant le couplage

de l'équation de transport et de l'opérateur de collisions. Des résultats numériques illustrant l'effet de la fréquence de collisions sont présentés dans le cas $1D \times 3D$ avec la méthode multigrille (dimension une en espace et dimension trois en vitesse).

5.2.1 Trois algorithmes rapides pour l'équation de Landau.

Cette partie est d'abord consacrée à une brève description des méthodes spectrale et multigrille. La non linéarité de l'équation de Landau est de type quadratique, cependant la complexité des deux méthodes est de l'ordre de $N \log(N)$, où N représente le nombre d'inconnues.

Dans la dernière partie, nous proposons une nouvelle méthode pour la discrétisation de l'opérateur avec un coût linéaire lorsque la fonction de distribution est "presque isotrope".

A. La méthode spectrale.

Discrétisation de l'opérateur. Cette méthode a été récemment proposée par L. Pareschi *et al.* pour approcher les équations de Boltzmann [21] et Landau [20, 22]. Nous décrivons brièvement l'idée de la discrétisation et renvoyons le lecteur aux articles de références pour plus de détails. Nous écrivons d'abord l'opérateur sous sa forme usuelle

$$Q(f, f) = \nabla_v \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(g) \left[(\nabla_v f(t, v)) f(t, v + g) - (\nabla_g f(t, v + g)) f(t, v) \right] dg. \quad (5.2)$$

Nous supposons que le support de la fonction de distribution est inclus dans la boule $B(0, R/2)$ avec $R > 0$. Cette hypothèse ne peut pas être satisfaite en général puisque l'état stationnaire est donné par une Maxwellienne, qui n'est pas à support compact. La fonction de distribution est donc tronquée à zéro lorsque f prend des valeurs suffisamment petites. À partir de cette hypothèse sur le support de la fonction de distribution, le domaine d'intégration est inclus dans la boule $B(0, R)$. Nous approchons ensuite la fonction de distribution par une somme partielle d'une série de Fourier

$$f_N(t, v) = \sum_{k \in \{-N, \dots, N\}} \hat{f}_k(t) e^{i \frac{\pi}{R} k \cdot v}, \quad (5.2)$$

où $k = (k_1, k_2, k_3)$, N est le multi-entier (n, n, n) , n représentant le nombre de demi-modes dans chaque direction et le k -ème mode est donné par

$$\hat{f}_k(t) = \frac{1}{(2R)^3} \int_{B(0, R)} f(t, v) e^{-i k \cdot v} dv.$$

En substituant l'approximation $f_N(t, v)$ dans l'opérateur (5.2), nous obtenons

$$Q(f_N, f_N) = \left[\frac{\pi}{R} \right]^{\gamma+3} \sum_{l, m \in \{-N, \dots, N\}^2} \hat{f}_l(t) \hat{f}_m(t) \hat{\beta}_L(l, m) e^{i \frac{\pi}{R} (l+m) \cdot v},$$

où $\hat{\beta}_L(l, m)$ est défini par

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_L(l, m) &= \int_{B(0, \pi)} |w|^{\gamma+2} \left[(l+m)(l-m) - (l+m) \cdot \frac{w}{|w|} (l-m) \cdot \frac{w}{|w|} \right] e^{i w \cdot m} dw \\ &= \hat{B}(l, m) - \hat{B}(m, m),\end{aligned}$$

avec

$$\hat{B}(l, m) = \int_{B(0, \pi)} |w|^{\gamma+2} \left[l^2 - \left(l \cdot \frac{w}{|w|} \right)^2 \right] e^{i w \cdot m} dw.$$

Nous recherchons alors la fonction de distribution f_N qui vérifie

$$\forall k \in \{-N, \dots, N\}, \quad \int_{B(0, R)} \left\{ \frac{\partial f_N}{\partial t} - Q(f_N, f_N) \right\} e^{-i k \cdot v} dv = 0.$$

Comme le terme résiduel de l'opérateur FPL est orthogonal à tout polynôme trigonométrique de degré $\leq n$, nous obtenons le système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$\forall k \in \{-N, \dots, N\}, \quad \frac{d\hat{f}_k}{dt} = \left[\frac{\pi}{R} \right]^{\gamma+3} \sum_{\substack{l, m \in \{-N, \dots, N\} \\ l+m=k}} \hat{f}_l \hat{f}_m \left[\hat{B}(l, m) - \hat{B}(m, m) \right].$$

Maintenant, il reste à approcher les termes $\hat{B}(l, m)$ en décomposant en deux parties,

$$\begin{aligned}\hat{B}(l, m) &= \int_{B(0, \pi)} |w|^{\gamma+2} \left[l^2 - \left(l \cdot \frac{w}{|w|} \right)^2 \right] e^{i w \cdot m} dw, \\ &= l^2 \int_{B(0, \pi)} |w|^{\gamma+2} e^{i w \cdot m} dw - \sum_{i, j=1}^3 l_i l_j \int_{B(0, \pi)} \Phi(w) \frac{w_i w_j}{|w|^2} e^{i w \cdot m} dw.\end{aligned}$$

Nous posons donc

$$F(m) = \int_{B(0, \pi)} |w|^{\gamma+2} e^{i w \cdot m} dw \quad (5.-1)$$

$$I_{i, j}(m) = \int_{B(0, \pi)} |w|^{\gamma+2} \frac{w_i w_j}{|w|^2} e^{i w \cdot m} dw, \quad (5.0)$$

pour finalement obtenir le nouveau système d'EDO : $\forall k \in \{-N, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{f}_k}{dt} &= \left[\frac{\pi}{R} \right]^{\gamma+3} \sum_{m \in \{-N, \dots, N\}} \hat{f}_{k-m} \hat{f}_m \left[(k-m)^2 F(m) - \hat{B}(m, m) \right] \\ &\quad - \left[\frac{\pi}{R} \right]^{\gamma+3} \sum_{i, j=1}^3 \sum_{m \in \{-N, \dots, N\}} \hat{f}_{k-m} \hat{f}_m (k_i - m_i) (k_j - m_j) I_{i, j}(m).\end{aligned} \quad (5.1)$$

Remarque 5.1 *Les coefficients $F(m)$ et $I_{i,j}$, donnés par (5.-1) et (5.0), ne dépendent que de γ et s'écrivent comme des intégrales à une dimension. Ils sont donc approchés en utilisant une formule de quadrature récursive permettant de contrôler l'erreur numérique.*

Pour approcher le terme de droite du système (5.1) qui s'écrit comme une somme de convolutions discrètes, il suffit d'utiliser un algorithme faisant appel à la Transformation de Fourier Rapide (FFT). Soit S_k une convolution discrète, elle s'écrit sous la forme

$$S_k = \sum_{m \in \{-N, \dots, N\}} g_m h_{k-m}.$$

L'évaluation de S_k est de l'ordre de $(8n^3) \log(8n^3)$, où $8n^3$ est le nombre total d'inconnues. En effet

- la réalisation d'une FFT pour transformer g_m et h_{k-m} en \hat{g}_m et \hat{h}_{k-m} dans l'espace de Fourier a un coût de l'ordre $O((8n^3) \log(8n^3))$,
- le calcul de la somme dans l'espace de Fourier \hat{S}_k a un "coût linéaire".
- la réalisation d'une FFT inverse pour transformer \hat{S}_k en S_k a un coût de l'ordre $O((8n^3) \log(8n^3))$.

L'approximation utilisant la méthode spectrale préserve exactement la masse, puisque les conditions aux limites sont périodiques. L'impulsion et l'énergie sont contrôlées par la précision spectrale. En effet, nous rappelons le résultat déjà présenté par L. Pareschi *et al.* dans [22] en apportant une correction à la preuve. Nous introduisons \mathcal{P}_N l'opérateur de projection

$$\mathcal{P}_N : L_p^2(\cdot - R, R^{[d]}) \rightarrow \mathbb{P}^N, \quad (5.0)$$

où d est la dimension de l'espace des vitesses et \mathbb{P}^N désigne l'ensemble des polynômes trigonométriques de \mathbb{R}^d de degré inférieur à $|N|$ et $L_p^2(\cdot - R, R^{[d]})$ est l'espace des fonctions mesurables, périodiques de $\cdot - R, R^{[d]}$ et de carré intégrable.

Proposition 5.1 *Soit $\gamma > 0$. Nous supposons que la fonction de distribution f solution classique de l'équation de Landau satisfait*

$$f \in H_p^2(\cdot - R, R^{[d]}),$$

où $H_p^2(\cdot - R, R^{[d]})$ désigne l'espace des fonctions mesurables, périodiques sur $\cdot - R, R^{[d]}$ et dont les dérivées jusqu'à l'ordre deux sont de carré intégrable.

Alors, l'approximation spectrale $Q_N(f_N, f_N) = \mathcal{P}_N Q(f_N, f_N)$ de l'opérateur de collisions $Q(f, f)$ vérifie

$$\|Q(f, f) - Q_N(f_N, f_N)\|_{L_p^2} \leq C(f) \left(\|f - f_N\|_{H_p^2} + \frac{\|Q(f_N, f_N)\|_{H_p^2}}{N^2} \right). \quad (5.0)$$

Preuve : nous décomposons d'abord l'erreur en deux parties

$$\begin{aligned} \|Q(f, f) - Q_N(f_N, f_N)\|_{L_p^2} &\leq \|Q(f, f) - Q(f_N, f_N)\|_{L_p^2} \\ &\quad + \|Q(f_N, f_N) - Q_N(f_N, f_N)\|_{L_p^2}. \end{aligned}$$

Nous savons que $f_N \in \mathbb{P}^N$ et puisque l'opérateur de Landau est quadratique en f_N , il est clair que $Q(f_N, f_N) \in \mathbb{P}^{2N}$. Ainsi, en appliquant les estimations classiques des méthodes spectrales [24], nous avons

$$\|Q(f_N, f_N) - Q_N(f_N, f_N)\|_{L_p^2} \leq \frac{C}{N^2} \|Q(f_N, f_N)\|_{H_p^2}.$$

Il reste à estimer le second terme $\|Q(f, f) - Q(f_N, f_N)\|_{L_p^2}$. Pour cela, nous utilisons l'identité

$$Q(f, f) - Q(g, g) = Q(f + g, f - g),$$

où l'opérateur bilinéaire symétrique $Q(., .)$ est défini par

$$\begin{aligned} Q(f, g) &= \frac{1}{2} \nabla_v \cdot \int_{B(0, 2R)} \Phi(w) \left[(\nabla_v f(t, v + w))g(t, v) - (\nabla_w g(t, v + w))f(t, v) \right] dw \\ &\quad + \frac{1}{2} \nabla_v \cdot \int_{B(0, 2R)} \Phi(w) \left[(\nabla_v g(t, v + w))f(t, v) - (\nabla_w f(t, v + w))g(t, v) \right] dw, \end{aligned}$$

lequel peut s'écrire en utilisant le produit de convolution en reprenant les notations de [26]

$$Q(f, g) = \sum_{i,j=1}^d \frac{1}{2} \left[\bar{a}_{i,j}^g \partial_{i,j} f + \bar{a}_{i,j}^f \partial_{i,j} g - \bar{c}^g f - \bar{c}^f g \right],$$

avec

$$a_{i,j}(z) = |z|^{\gamma+2} \left(\delta_{i,j} - \frac{z_i z_j}{|z|^2} \right), \quad \bar{a}_{i,j}^f = a_{i,j} * f$$

et

$$c(z) = \partial_{i,j} a_{i,j}(z) = -2(\gamma + 3)|z|^\gamma, \quad \bar{c}^f = c * f.$$

Sous l'hypothèse $\gamma > 0$, les quantités $a_{i,j}$ et c sont bornées sur $B(0, R)$, nous vérifions l'estimation sur $Q(f, g)$

$$\|Q(f, g)\|_{L_p^2} \leq C_R (\|g\|_{L_p^1} \|f\|_{H_p^2} + \|f\|_{L_p^1} \|g\|_{H_p^2}) \leq C_R \|g\|_{H_p^2} \|f\|_{H_p^2}.$$

Ainsi, nous obtenons la majoration souhaitée

$$\|Q(f, f) - Q(f_N, f_N)\|_{L_p^2} \leq C_R \|f + f_N\|_{H_p^2} \|f - f_N\|_{H_p^2} \leq C(R, f) \|f - f_N\|_{H_p^2}.$$

Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 5.1. \square

Remarque 5.2 Cette estimation n'est pas valable dans le cas coulombien, puisque dans ce cas les quantités $a_{i,j}$ et c ne sont pas bornées sur $B(0, R)$.

Notons que nous n'avons aucune information sur les états stationnaires, sur la décroissance de l'entropie et sur la préservation de la positivité.

B. La méthode multigrille.

Cette méthode a été proposée par C. Buet *et al.* dans [7]. Nous supposons ici que le domaine d'intégration est inclus dans une "boîte" de diamètre R , que l'on notera par C_0 . Posons pour toute fonction $\varphi(v)$ suffisamment régulière,

$$H(v, v^*) = -\frac{1}{2} f(t, v) f(t, v^*) [\nabla_v \varphi(v) - \nabla_{v^*} \varphi(v^*)] \Phi(v - v^*) \\ [\nabla_v \ln(f(t, v)) - \nabla_{v^*} \ln(f(t, v^*))].$$

En utilisant la formulation faible, l'équation de Landau s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(v) \varphi(v) dv = \int_{C_0 \times C_0} H(v, v^*) dv^* dv. \quad (5.7)$$

Puis, nous introduisons une grille régulière discrétisant le domaine d'intégration C_0 , composée de $N = 8^n$ points, où n représente le nombre total de niveaux de grille. Le pas de l'espace des vitesses est noté par $\Delta v = R/(2^n)$ et $f_l(t)$ représente l'approximation de $f(t, v_l)$, avec $v_l = l \Delta v - v_0$, $l = (l^1, l^2, l^3) \in \mathcal{I} = \{1, \dots, 2^n\}^3$ et v_0 est le centre de la grille.

Discrétisation différences finies. Dans une première partie, nous rappelons le schéma conservatif et entropique introduit par P. Degond et B. Lucquin-Desreux [11]. À partir de la formulation faible (5.2.1) et pour $l \in \mathcal{I}$, nous définissons l'approximation $\bar{Q}(f, f)_l$ de l'opérateur de collisions par

$$\sum_{l \in \mathcal{I}} \Delta v^3 \bar{Q}(f, f)_l \varphi_l = \sum_{(l, m) \in \mathcal{I}^2} \Delta v^6 \bar{H}(v_l, v_m).$$

Le terme $\bar{H}(v_l, v_m)$ désigne une approximation de $H(v_l, v_m)$ pour une fonction test quelconque $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^3)$

$$\bar{H}(v_l, v_m) = -\frac{1}{2} f_l(t) f_m(t) [(D\varphi)_l - (D\varphi)_m] \Phi(v_l - v_m) [(D \ln f(t))_l - (D \ln f(t))_m], \quad (5.7)$$

où D est une approximation différences finies de l'opérateur gradient.

À partir de cette formulation, nous prenons une fonction φ telle que $\varphi(v_l)=1$ et $\varphi(v_p)=0$, pour $p \neq l$, puis obtenons le système d'équations différentielles suivant

$$\frac{df_l(t)}{dt} = FP_l(t) = (D^* p(t))_l, \quad (5.7)$$

où D^* est l'opérateur de différences finies adjoint de D et

$$p_l(t) = \sum_{m \in \mathcal{I}} f_l(t) f_m(t) \Phi(v_l - v_m) \left((D \ln f(t))_l - (D \ln f(t))_m \right).$$

Pour obtenir la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie, nous calculons d'abord une approximation de l'opérateur FPL en utilisant successivement l'opérateur différences finies décentré amont D^+ et aval D^- définis par

$$(D_s^+ \psi)_i = \frac{\psi_{i+e_s} - \psi_i}{\Delta v}, \quad (D_s^- \psi)_i = \frac{\psi_i - \psi_{i-e_s}}{\Delta v}, \quad s = 1, 2, 3,$$

où e_s représente la s -ème composante de la base canonique de \mathbb{R}^3 . Nous introduisons aussi l'approximation centrée D^c

$$(D_s^c \psi)_i = \frac{\psi_{i+e_s} - \psi_{i-e_s}}{2\Delta v}, \quad s = 1, 2, 3.$$

L'opérateur FPL discret est finalement obtenu à partir de la moyenne des opérateurs approchés à l'aide de D^+ et D^- . Il vérifie ainsi

$$\Delta v^3 \sum_{l \in \mathcal{I}} \bar{Q}(f, f)_l \begin{pmatrix} 1 \\ v_l \\ v_l^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dans [7], les auteurs reformulent ce schéma comme la somme d'une approximation centrée d'ordre deux et d'un terme de viscosité artificielle en Δv^2 qui permet d'éliminer les mauvaises conservations. Une telle approximation de (5.2.1) est actuellement trop coûteuse, il faut donc réduire le temps de calcul en utilisant un algorithme rapide.

La méthode multigrille. Nous décrivons maintenant la mise au point de l'algorithme multigrille pour améliorer la vitesse de calcul de l'opérateur. Il consiste à décomposer l'opérateur en différents niveaux et à calculer les interactions entre les particules suivant leur vitesse relative $|v - v^*|$.

Au niveau un, nous décomposons le domaine d'intégration C_0 en huit "boîtes" de taille identique notées par C_1^r , $r \in I_1 = \{0, 1\}^3$, que nous appellerons les "enfants de C_0 " et C_0 étant le "parent" des boîtes C_1^r . Nous avons ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(v) \varphi(v) dv = \sum_{(r, r') \in \{0, 1\}^3} \int_{C_1^r \times C_1^{r'}} H(v, v^*) dv dv^*.$$

Au niveau deux, nous décomposons chaque boîte C_1^r en "sous-boîtes" $C_2^{r'}$, pour $r' \in I_2 = \{0, 1, 2\}^3$, nous calculons alors les interactions des particules suivant la position relative des boîtes d'un même niveau. Nous introduisons la définition suivante : la cellule $C_k^{r'}$ est dite bien séparée de C_k^r si et seulement si les parents de $C_k^{r'}$ et de C_k^r sont les plus proches voisins et si $C_k^{r'}$ n'est pas le plus proche voisin de C_k^r . Le plus proche voisin de C_k^r est obtenu en ajoutant au centre les quantités $(R/2^k)(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 0, 1\}$.

Nous écrivons alors la formulation faible de l'opérateur comme la somme de l'intégrale

sur les boîtes bien séparées (*b.s*) et sur les boîtes qui ne sont pas bien séparées (*p.b.s.*) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(v)\varphi(v) &= \sum_{\substack{(r,r') \in I_2 \\ \text{b.s.}}} \int_{C_2^r \times C_2^{r'}} H(v, v^*) dv dv^* \\ &+ \sum_{\substack{(r,r') \in I_2 \\ \text{p.b.s.}}} \int_{C_2^r \times C_2^{r'}} H(v, v^*) dv dv^*. \end{aligned}$$

Si la cellule C_2^r est “bien séparée”, nous calculons l’intégrale à partir d’une formule de quadrature donnée ci-dessous, sinon la contribution est calculée au niveau supérieur. Nous répétons ce procédé jusqu’à ce que le niveau final n soit atteint. Pour un niveau fixé k , nous devons approcher l’intégrale de la forme,

$$\int_{C_k^r \times C_k^{r'}} H(v, v^*) dv dv^*, \quad (5.9)$$

mais une approximation directe requiert 8^{2k} évaluations, ce qui implique un calcul de l’ordre de N^2 . Ainsi, pour réduire le coût, nous utilisons seulement $n_k = 8^k$ évaluations pour approcher (5.2.1), puis demandons qu’après n_k itérations en temps, tous les couples $(i, j) \in C_k^r \times C_k^{r'}$ aient donné leur contribution. Soit $\{1, \dots, n_k\}$, les n_k éléments de la boîte C_k^r et soit π une permutation aléatoire de $\{1, \dots, n_k\}$. Dans une première partie, nous approchons (5.2.1) par une formule de quadrature de type Monte-Carlo en utilisant les paires $(l, \pi(l))$, $l \in \{1, \dots, n_k\}$, à la deuxième itération, nous utilisons $(l, \pi^2(l))$, etc... Ainsi, après n_k itérations, l’ordre π est de nouveau atteint.

Finalement, lorsque C_k^r et $C_k^{r'}$ sont bien séparées, l’approximation Monte-Carlo de (5.2.1) est donnée par

$$\int_{C_k^r \times C_k^{r'}} H(v, v^*) dv dv^* = \frac{1}{2^{n-k}} \sum_{l \in \{1, \dots, n_k\}} \Delta v^6 H(v_l, v_{\pi(l)}).$$

L’évaluation de l’opérateur FPL est alors réduit à l’ordre nN ($< N \log N$).

Discrétisation en temps. Concernant la discrétisation en temps, un schéma d’Euler explicite est utilisé. Pour assurer la stabilité de l’algorithme, nous imposons des conditions sur le pas de temps Δt pour lesquelles le schéma donne une approximation positive et assure la décroissance de l’entropie [8]. Il existe une constante positive $C > 0$ telle que

$$|FP_l(t)| = |(D^* p)_l| \leq C \ln(K) f_l(t),$$

où $K = \max_{\{l, |m| \leq 1\}} (f_l / f_{l+m})$, puis en posant $\Delta t_1 = \alpha / (C \ln(K))$, avec $\alpha \in]0, 1[$, l’approximation $f_l(t)$ reste positive. Finalement, l’entropie décroît pourvu que le pas

de temps vérifie

$$\Delta t \leq \min \left(\Delta t_1, \frac{-\Delta v^3 \sum F P_l(t) \ln(f_l(t))}{\Delta v^3 \sum \frac{F P_l^2(t)}{f_l(t)}} \right). \quad (5.-9)$$

Nous notons enfin que pour éviter une condition de stabilité globale de type (5.-9) sur le pas de temps, nous utilisons un algorithme de sous-cyclage, c'est-à-dire que l'on choisit un pas de temps différent à chaque niveau de grille.

C. Le schéma pseudo-isotrope.

La méthode pseudo-isotrope pour l'équation de Landau est très proche de la méthode multigrille décrite précédemment, le point de départ est le schéma conservatif de type différences finies. La formulation faible discrétisée de l'équation FPL peut être reformulée en utilisant la symétrie de l'opérateur. Pour toute fonction test φ

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\partial f_i}{\partial t} \varphi_i \Delta v^3 = -\Delta v^6 \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}^2} f_i f_j (D\varphi)_i \Phi(v_i - v_j) [(D \ln f)_i - (D \ln f)_j], \quad (5.-9)$$

où f_i désigne la moyenne de f sur la cellule i et D est l'opérateur différences finies utilisé précédemment pour la construction de la méthode multigrille.

À partir de ce schéma aux différences finies, nous approchons le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{df_i(t)}{dt} = F P_i(t) = (D^* p(t))_i, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

où D^* est l'opérateur adjoint de D , et

$$p_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{I}} f_i(t) f_j(t) \Phi(v_i - v_j) \left((D \ln f(t))_i - (D \ln f(t))_j \right) \quad (5.-9)$$

et la matrice $\Phi(v)$ s'écrit

$$\Phi(v) = |v|^\gamma (|v|^2 Id - v \otimes v).$$

Lorsque la fonction de distribution est isotrope, le facteur multiplicatif $|v - v^*|^\gamma$ dans la matrice Φ peut être remplacé par $\max(|v|, |v^*|)^\gamma$ [9, 25]. Ceci peut être vérifié en utilisant les polynômes de Legendre. En effet, nous avons

$$\frac{1}{|v - v^*|} = \frac{1}{v^+} \frac{1}{(1 + 2\rho x + \rho^2)^{1/2}} = \frac{1}{v^+} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) \rho^l,$$

où $\rho = v^+/v^-$ avec $v^+ = \max(|v|, |v^*|)$ et $v^- = \min(|v|, |v^*|)$, x est le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs vitesses et P_l désigne le polynôme de Legendre de

degré l . Alors, comme dans le cas continu, seul le terme d'ordre zéro apporte sa contribution. Cette propriété est utilisée pour dériver l'équation isotrope simplifiée.

Pour une fonction de distribution quelconque, nous pouvons considérer une troncature de la série en ne retenant que les M premiers termes du développement. Dans cette partie, nous nous limiterons à la plus grossière approximation ($M = 1$). En utilisant ce que nous appellerons l'approximation isotrope, qui est valable pour une fonction de distribution proche de la fonction isotrope, nous améliorons les méthodes multipole et multigrille [7, 8, 16] : le coût de cette méthode devient en effet linéaire et le nombre d'inconnues n'est plus forcément une puissance de deux.

Proposition 5.2 *Supposons que l'espace des vitesses $v \in \mathbb{R}^3$ soit discrétisé par une grille composée de points de la forme $(v_{i_\alpha} + 0.5)\Delta v$, $i_\alpha \in \{-N, \dots, N-1\}$ et $\alpha = 1, 2, 3$. Alors, la méthode pseudo-isotrope décrite précédemment a un coût de calcul linéaire par rapport au nombre total de points de discrétisation $8N^3$.*

Preuve : nous devons évaluer les quantités de la forme

$$A^{\alpha, \beta, \delta}(v_i) = \sum_j (\max(|v_i|, |v_j|)^\gamma f_i f_j (v_i - v_j)_\alpha (v_i - v_j)_\beta ((D \ln f)_i - (D \ln f)_j)_\delta), \quad (5.-9)$$

où α, β et δ représentent les composantes $\{1, 2, 3\}$ des vecteurs de \mathbb{R}^3 . Cette somme peut être décomposée selon que $|v_i| \leq |v_j|$ ou $|v_i| > |v_j|$.

La première étape consiste à calculer les moments en "énergie", c'est-à-dire en $|v|$. Nous définissons alors

$$H^{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon}(|v_i|) = \sum_j v_{j, \alpha} v_{j, \beta} (D \ln f)_{j, \delta} f_j |v_j|^{\gamma \varepsilon}, \quad (5.-9)$$

où les indices α, β et δ sont maintenant dans $\{0, 1, 2, 3\}$. ($v_{j, \alpha}$ désigne la α -ème composante du point v_j lorsque $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ tandis que $v_{j, 0}$ est égal à 1. De plus, le paramètre ε est défini de la manière suivante

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } |v_j| \leq |v_i|, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le nombre de valeurs de la forme $(|v_i|)_i$ est largement inférieur au nombre total de points de discrétisation de la grille. Par exemple, si nous utilisons une grille uniforme centrée $v_{i, \alpha} = (i_\alpha + 0.5)\Delta v$ où $i_\alpha \in \{-N, N-1\}$, le nombre de points est $N_1 = 8N^3$, tandis que le nombre de valeurs de la forme $|v_i|$ est $N_2 = O(N^2)$. En effet,

$$0 \leq \frac{v_{i_\alpha}^2}{\Delta v^2} = (i_\alpha + 0.5)^2 \leq N^2,$$

les valeurs $|v_i|^2/\Delta v^2$ appartiennent donc à l'ensemble $\{0, \dots, 3N^2\}$. Enfin, en utilisant la symétrie de la grille, il est possible de réduire encore le nombre de valeurs de la

forme $|v_i|$. Les propriétés de symétrie et la structure de la matrice Φ font que les seules quantités nécessaires pour calculer (5.2.1) sont

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \{0, 1, 2, 3\}^3 \text{ tel que } \alpha \leq \beta, \quad \alpha\beta\gamma \notin \{1, 6, 8, 27\}.$$

Le cardinal de cet ensemble est 34. Le coût de calcul de cette étape est donc de l'ordre de $N_1 = 8N^3$, et le coût en place mémoire de l'ordre de N_2 . Nous calculons d'abord

$$P^{\alpha, \beta, \delta}(|v_k|) = \sum_{\substack{l \\ |v_l|=|v_k|}} v_{l, \alpha} v_{l, \beta} (D \ln f)_{l, \delta} f_l, \quad (5.-9)$$

avec un coût en $N_1 = 8N^3$.

La seconde phase est l'accumulation :

$$H^{\alpha, \beta, \delta, 0}(|v_i|) = \sum_{k=0}^i P^{\alpha, \beta, \delta}(|v_k|), \quad H^{\alpha, \beta, \delta, 1}(|v_i|) = \sum_{k=0}^i |v_k|^\gamma P^{\alpha, \beta, \delta}(|v_k|).$$

Ainsi, nous estimons les valeurs

$$F^{\alpha, \beta, \gamma}(|v_i|) = f_i \left(|v_i|^\gamma H^{\alpha, \beta, \gamma, 0}(|v_i|) + H^{\alpha, \beta, \gamma, 1}(|v_i|) \right).$$

Cette évaluation nécessite environ N_2 opérations.

La troisième phase est la partie attribution. Par exemple pour le terme $A^{1,2,2}$ correspondant à la première ligne et deuxième colonne

$$A^{1,2,2} = \sum_j \max(|v_i|, |v_j|)^\gamma (v_i - v_j)_1 (v_i - v_j)_2 f_i f_j ((D \ln f)_i - (D \ln f)_j)_2,$$

nous étendons le produit des vitesses relatives et obtenons

$$A^{1,2,2}(v_i) = (v_{i,1} v_{i,2} F^{0,0,0} - v_{i,1} F^{2,0,0} - v_{i,2} F^{1,0,0} + F^{2,1,0}) (D \ln f)_{i,2} \\ + (v_{i,1} v_{i,2} F^{0,0,2} - v_{i,1} F^{2,0,2} - v_{i,2} F^{1,0,2} + F^{2,1,2}).$$

Le coût de cette dernière partie est N_1 .

En conclusion, nous avons montré que l'évaluation de l'intégrale double de la forme (5.2.1) a un coût linéaire en dépit de sa structure quadratique. Le second avantage, lorsque l'on utilise cette approximation, est que le nombre de points n'est plus de la forme 2^k . Ceci est très important pour la flexibilité de la méthode. \square

5.2.2 Tests numériques dans le cas homogène.

Nous présentons maintenant des tests numériques pour comparer les différents algorithmes dans les situations suivantes

- le cas maxwellien ($\gamma = 0$) pour lequel des solutions explicites sont connues [4, 5].
- le cas coulombien isotrope ($\gamma = -3$) introduit dans [25] et pour lequel un code unidimensionnel isotrope [9] est utilisé pour calculer des solutions de références.
- le cas coulombien bi-maxwellien : ce dernier test est de première importance en physique des plasmas et consiste en une donnée initiale bi-Maxwellienne qui est loin de la situation isotrope. Les deux premières méthodes sont alors utilisables, et nous permettront d'évaluer la précision en fonction du temps CPU.

Au cours de ces tests, nous observerons l'évolution des quantités physiques suivantes,

- L'entropie cinétique discrète :

$$H(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^3} \Delta v^3 f_i(t) \ln(f_i(t)).$$

- Le moment discret d'ordre quatre :

$$M_4(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^3} \Delta v^3 |v_i|^4 f_i(t).$$

- Les températures discrètes : pour $k = 1, 2, 3$

$$T_k(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^3} \Delta v^3 (i^k \Delta v - u_0^k)^2 f_i(t) \quad \text{et} \quad T(t) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 T_k(t),$$

où $u_0 = (u_0^1, u_0^2, u_0^3)$ est une approximation de l'impulsion $\frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} v f(t, v) dv$ et ρ une approximation de la masse totale.

- L'erreur quadratique discrète : dans le cas Maxwellien ($\gamma = 0$), nous pouvons calculer des solutions explicites. Nous notons par f^{exact} la solution de l'équation de Landau, puis définissons la norme L^2 de l'erreur relative discrète par

$$EQ(t) = \frac{(\sum \Delta v^3 |f^{exact}(v_i, t) - f_i(t)|^2)^{1/2}}{(\sum \Delta v^3 |f^{exact}(v_i, t)|^2)^{1/2}}.$$

A. Le cas Maxwellien ($\gamma = 0$).

La donnée initiale est choisie dans la classe des solutions exactes connues isotropes, qui est une extension des solutions de A.-V. Bobylev [4]. Nous posons $S = 0.6$ et considérons

$$f_0(v) = \frac{1}{(2\pi S)^{3/2}} \frac{1-S}{S} \frac{|v|^2}{2S} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2S}\right).$$

Nombre d'inconnues	spectrale	multigrille	pseudo-isotrope
$16 \times 16 \times 16$	0.4 sec	0.08 sec	0.03 sec
$32 \times 32 \times 32$	10 sec	1.8 sec	0.37 sec

Table 5.1: Temps de calcul pour les méthodes spectrale, multigrille et pseudo-isotrope en fonction du nombre d'inconnues pour une évaluation de l'opérateur (TEST A).

Les résultats numériques sont comparés avec la solution explicite

$$f(t, v) = \frac{1}{(2\pi S)^{3/2}} \left(\frac{5S - 3}{2S} + \frac{1 - S}{S} \frac{|v|^2}{2S} \right) \exp\left(-\frac{|v|^2}{2S}\right),$$

où $S = 1 - 0.4 \exp(-t/6)$. Dans ce cas les températures $T_1(t)$, $T_2(t)$, $T_3(t)$ sont égales puisque la solution est isotrope. Ce test est réalisé pour évaluer la précision des différents schémas en comparant l'évolution de l'erreur quadratique. Pour la méthode spectrale, un schéma de type Runge-Kutta d'ordre élevé est nécessaire pour la résolution du système d'équations différentielles ordinaires, puisqu'il est impératif de garder la haute précision de l'algorithme. De plus, le support de la fonction de distribution est plus important que celui utilisé pour les méthodes différences finies. En effet, pour obtenir la stabilité du schéma et pour éviter l'effet d'“aliasing” inhérent aux méthodes spectrales, un support suffisamment large est requis.

La simulation est stoppée lorsque l'état stationnaire est atteint, ce qui correspond, par exemple, à la stabilisation de l'entropie. Le tableau 5.1 montre le temps de calcul pour l'évaluation de l'opérateur de collisions : nous avons réalisé une itération avec un pas de temps proche de zéro et un schéma d'Euler explicite. Le coût de la méthode pseudo-isotrope est largement réduit par rapport aux méthodes rapides, en $N \log N$. D'autre part, le tableau 5.2, représente le temps de calcul total pour les différentes méthodes en fonction du nombre d'inconnues. L'augmentation du temps de calcul de la méthode spectrale avec 32^3 modes s'explique par l'utilisation du schéma Runge-Kutta qui nécessite plusieurs évaluations de l'opérateur à chaque itération. De plus, la condition de stabilité est de l'ordre de $O(1/N^2)$, où N est le nombre d'inconnues, ce qui devient très contraignant pour cette résolution. Un schéma d'ordre quatre de type Adams-Balshforth, qui ne nécessite qu'une évaluation à chaque itération a été testé, mais la restriction sur le pas de temps devient plus forte et ne permet pas de réduire le temps de calcul. Concernant l'utilisation de la méthode multigrille, l'algorithme de sous-cyclage est très efficace dans cette situation. Le coût linéaire de la méthode pseudo-isotrope pour l'évaluation de l'opérateur améliore le temps de calcul, même si la condition sur le pas de temps demeure quadratique, i.e. $\Delta t \leq C \Delta v^2$. L'évolution de la norme discrète, de l'entropie et du moment d'ordre quatre est présentée (voir Fig. 5.1,5.2,5.3). Au vu des résultats numériques, les méthodes multigrille et pseudo-isotrope semblent être d'ordre un. En effet, l'approximation différences finies de l'opérateur gradient est d'ordre deux, mais l'utilisation d'un algorithme Monte-Carlo diminue la précision. En contre partie, le schéma spectral est largement plus précis

Nombre d'inconnues	spectrale	multigrille	pseudo-isotrope
$16 \times 16 \times 16$	2 min 40 sec	10 sec	03 sec
$32 \times 32 \times 32$	07 h 40 min	3 min 21 sec	1 min 50 sec

Table 5.2: Temps de calcul total pour les méthodes spectrale, multigrille et pseudo-isotrope en fonction du nombre d'inconnues (TEST A).

avec 32^3 modes et semble être ici d'ordre deux. De plus, l'évolution de l'erreur obtenue par l'algorithme spectral avec 16 modes dans chaque direction est seulement quatre fois supérieure à celle obtenue par la méthode multigrille avec 32 points dans chaque direction. Pourtant, l'erreur de l'approximation spectrale ne converge pas vers zéro lorsque t tend vers l'infini, ce qui signifie que l'état stationnaire n'est pas bien décrit sur des temps longs. Enfin, le comportement de l'entropie et du moment d'ordre quatre discrets obtenus avec 16^3 modes ne sont pas suffisamment précis, tandis que la méthode multigrille qui assure la décroissance de l'entropie semble plus robuste.

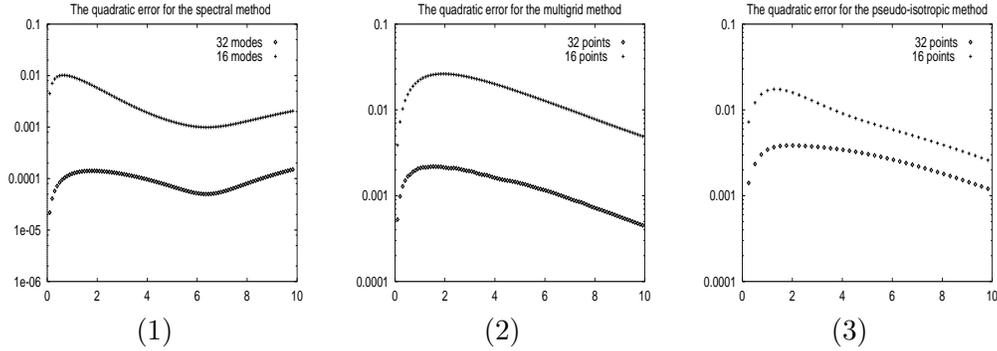


Figure 5.1: Évolution au cours du temps de la norme L^2 de l'erreur relative pour (1) la méthode spectrale, (2) la méthode multigrille, (3) et le schéma pseudo-isotrope en utilisant 16^3 et 32^3 inconnues (TEST A).

B. Le cas isotrope ($\gamma = -3$).

La donnée initiale est maintenant isotrope puisqu'elle ne dépend que du module de la vitesse $|v|$

$$f_0(v) = \frac{1}{S^2} \exp\left(-S \frac{(|v| - \sigma)^2}{\sigma^2}\right),$$

avec $S = 10$, $\sigma = 0.3$. Ce test est réalisé pour comparer l'évolution de l'entropie cinétique avec celle obtenue par le code isotrope unidimensionnel, décrit dans [9], lequel est utilisé avec un nombre important de points de la forme $\varepsilon^2 = |v|^2$. La résolution est de 16^3 modes pour la méthode spectrale et 32^3 pour les schémas multigrille et pseudo-isotrope. D'après les résultats présentés en Fig. 5.4 et 5.5, l'évolution

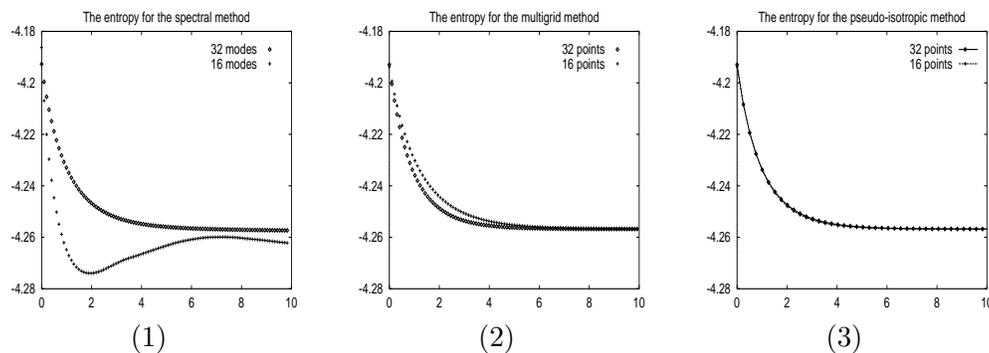


Figure 5.2: Évolution au cours du temps de l'entropie cinétique pour (1) la méthode spectrale, (2) la méthode multigrille, (3) et le schéma pseudo-isotrope en utilisant 16^3 et 32^3 inconnues (TEST A).

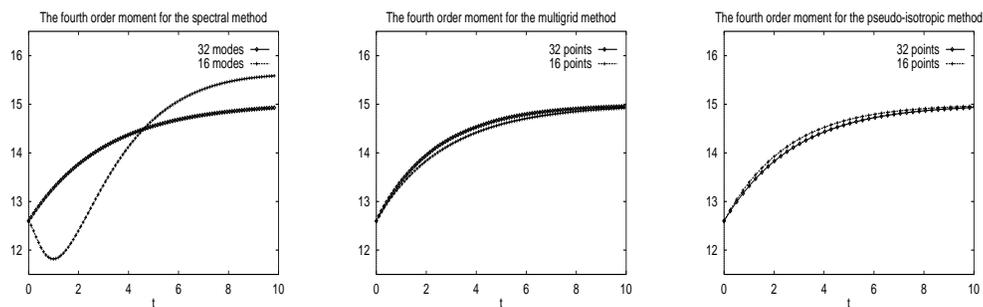


Figure 5.3: Évolution au cours du temps du moment d'ordre quatre pour (1) la méthode spectrale, (2) la méthode multigrille, (3) et le schéma pseudo-isotrope en utilisant 16^3 et 32^3 inconnues (TEST A).

de l'entropie induite par les trois méthodes est en accord avec celle obtenue par le code isotrope. Pour éviter l'effet d'“aliasing” de la méthode spectrale, le support doit être suffisamment large, ce qui diminue la précision de la représentation de la fonction de distribution. Cependant, l'état stationnaire semble être décrit avec précision dans ce cas. La méthode pseudo-isotrope donne également de bons résultats puisque la fonction de distribution reste isotrope.

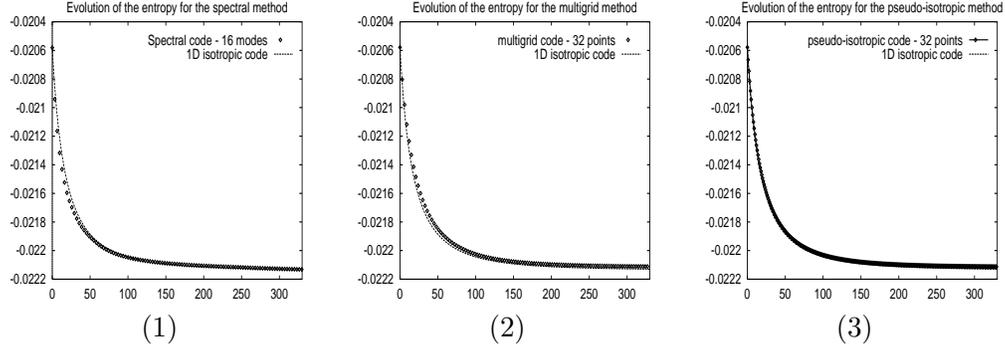


Figure 5.4: *Évolution au cours du temps de l'entropie cinétique pour (1) la méthode spectrale, (2) la méthode multigrille, (3) et le schéma pseudo-isotrope comparée avec celle obtenue par le code isotrope 1d isotrope (TEST B).*

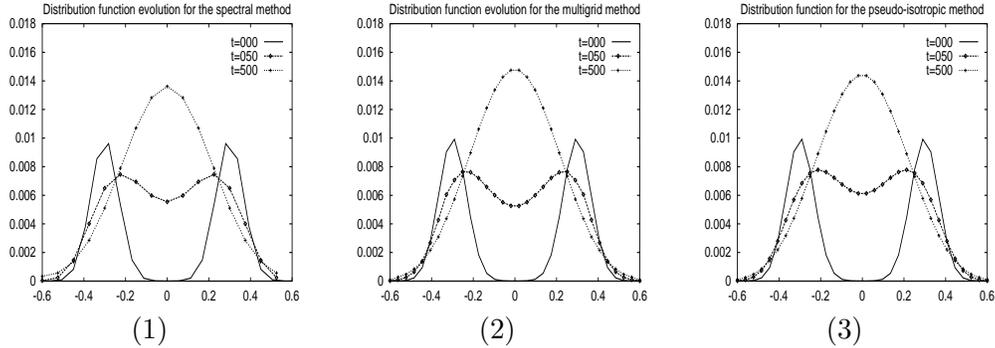


Figure 5.5: *Évolution au cours du temps de la fonction de distribution pour (1) la méthode spectrale, (2) la méthode multigrille, (3) et le schéma pseudo-isotrope (TEST B).*

C. La somme de deux Maxwelliennes ($\gamma = -3$).

La donnée initiale est maintenant choisie bi-Maxwellienne, c'est-à-dire la somme de deux Maxwelliennes :

$$f_0(v) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{M}_{\rho, v_1, T}(v) + \mathcal{M}_{\rho, v_2, T}(v) \right),$$

avec $v_1 = (2,3,3)$, $v_2 = (4,3,3)$ et $v_0 = (3,3,3)$ représente le centre de la grille. La vitesse thermique vaut $v_{th} = 0.45$, la masse totale est $\rho = 5$. Le temps final de la simulation est $T = 20$, ce qui correspond à l'état stationnaire. Ce test permet d'observer l'évolution de l'entropie, de la température et de la fonction de distribution lorsque la donnée initiale est loin de l'équilibre et non isotrope. En effet, dans le cas Maxwellien, C. Villani [26] donne la vitesse de convergence de la température vers l'état stationnaire

$$T_i(t) = T^\infty + (T_i(0) - T^\infty) \exp(-12 \rho t),$$

où T^∞ est la température à l'état stationnaire, ρ représente la masse totale. Cependant, dans le cas le plus intéressant, le cas coulombien ($\gamma = -3$), nous n'avons pas d'information sur le temps de relaxation. D'ailleurs, il n'existe pas de résultat théorique prouvant que la fonction de distribution solution de l'équation de Landau converge vers l'équilibre pour $\gamma = -3$. Le recours à la simulation numérique devient ici nécessaire pour comprendre les phénomènes physiques.

D'abord, nous présentons dans le tableau 5.3, le temps de calcul total pour une itération, en utilisant un schéma d'Euler, afin de comparer le temps requis pour l'évaluation de l'opérateur dans le cas coulombien. L'augmentation du temps de calcul est en accord avec l'estimation théorique pour les deux méthodes en $N \log N$, où N est le nombre total d'inconnues. Mais, le temps nécessaire pour l'évaluation de l'opérateur par la méthode multigrille est nettement inférieur à celui de la méthode spectrale. Le temps CPU pour la simulation complète est donné dans le tableau 5.4. Pour ce test, nous avons utilisé 8^3 et 16^3 modes pour la méthode spectrale et 16^3 , 32^3 points pour le schéma multigrille. Les temps de calculs sont très proches lorsque la méthode multigrille est utilisée avec 32^3 points et la méthode spectrale avec seulement 16^3 modes. Les Figures suivantes proposent l'évolution des quantités physiques obtenues par les deux méthodes. Pour conserver l'ordre élevé de la méthode spectrale, un schéma de type Runge-Kutta d'ordre quatre est requis. Ainsi, un petit nombre de modes suffit à donner une approximation raisonnable : la relaxation de la température (Fig. 5.6 et 5.7) obtenue par l'algorithme multigrille avec 32^3 points est très proche du résultat donné par la méthode spectrale avec seulement 16^3 modes. Nous pouvons noter que l'état stationnaire de la température donné par le schéma multigrille est néanmoins plus précis. En outre, l'entropie donnée par l'algorithme spectral, qui n'est pas un schéma entropique, est décroissante et correspond bien à l'entropie de la méthode multigrille. Par contre, le moment d'ordre quatre pour la méthode spectrale continue de croître. Enfin, l'état stationnaire de la fonction de distribution est bien décrit pour les deux méthodes. Pour terminer, la Fig. 5.8 représente l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace des vitesses 3D, pour $f(t, v) = 0.02$, vers l'état d'équilibre. Ce résultat est obtenu par la méthode spectrale utilisant 32^3 modes. Les isovaleurs de l'état initial correspondent à deux sphères dans l'espace des vitesses \mathbb{R}^3 . Ensuite, les deux fonctions de distribution se rapprochent pour fusionner jusqu'à ce que l'état stationnaire soit atteint et représenté par une seule sphère centrée.

Nombre d'inconnues	méthode spectrale	méthode multigrille
$8 \times 8 \times 8$	0.03 sec	
$16 \times 16 \times 16$	0.40 sec	0.08 sec
$32 \times 32 \times 32$	9.00 sec	1.88 sec

Table 5.3: Temps de calcul pour les méthodes spectrale et multigrille en fonction du nombre d'inconnues pour une évaluation de l'opérateur (TEST C).

méthode spectrale	temps CPU	méthode multigrille	temps CPU
$8 \times 8 \times 8$	3 min 57 sec	$16 \times 16 \times 16$	1 min 52 sec
$16 \times 16 \times 16$	33 min 04 sec	$32 \times 32 \times 32$	36 min 53 sec

Table 5.4: Temps de calcul total pour les méthodes spectrale et multigrille en fonction du nombre d'inconnues (TEST C).

En conclusion, les deux schémas donnent des résultats très proches en terme de précision. De plus, les tests réalisés à l'aide des différentes méthodes montrent que la fonction de distribution converge vers un état d'équilibre à vitesse exponentielle. Cependant, dans le cas coulombien il semble difficile de donner une formule explicite du temps de relaxation.

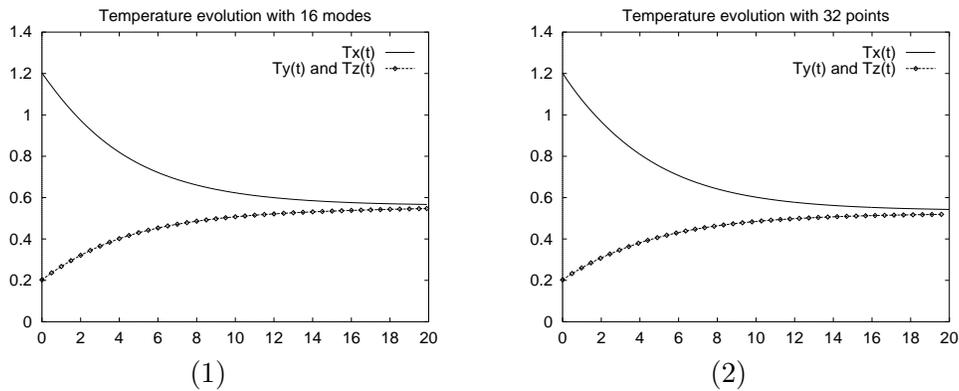
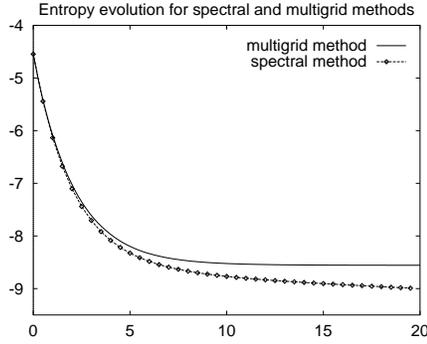
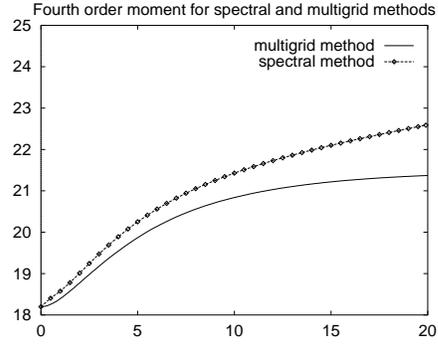


Figure 5.6: Évolution au cours du temps de la température pour (1) la méthode spectrale et (2) multigrille (TEST C).



(1)



(2)

Figure 5.7: Évolution au cours du temps de (1) l'entropie et (2) du moment d'ordre quatre pour les méthodes spectrale et multigrille (TEST C).

5.2.3 Une première discrétisation de l'équation de Landau non homogène.

L'objectif de cette partie est de donner une première idée pour traiter l'équation de Landau non homogène :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f). \quad (5.-10)$$

Nous utilisons un schéma à pas fractionnaire ou de décomposition d'opérateurs. Supposons que $f^n(x, v)$ soit une approximation de f au temps t^n et discrétisons d'abord l'équation de transport libre,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = 0, & \text{pour } t \in [0, \Delta t], \\ f(0, x, v) = f_h^n(x, v). \end{cases} \quad (5.-9)$$

Nous posons alors $f^*(x, v) = f(\Delta t, x, v)$, puis résolvons la partie collisions en utilisant un algorithme rapide,

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} Q(\bar{f}, \bar{f}), & \text{pour } t \in [0, \Delta t], \\ \bar{f}(0, x, v) = f^*(x, v). \end{cases} \quad (5.-8)$$

La solution au temps t^{n+1} est finalement donnée par $f^{n+1}(x, v) = \bar{f}(\Delta t, x, v)$. Lorsque le nombre de Knudsen ε tend vers zéro, les collisions dominent la partie transport, il faut donc diminuer le pas de temps ce qui rend la discrétisation de l'équation FPL plus coûteuse. À partir des tests présentés dans la partie précédente, la méthode multigrille paraît mieux adaptée pour les calculs non homogènes dans l'espace des vitesses en

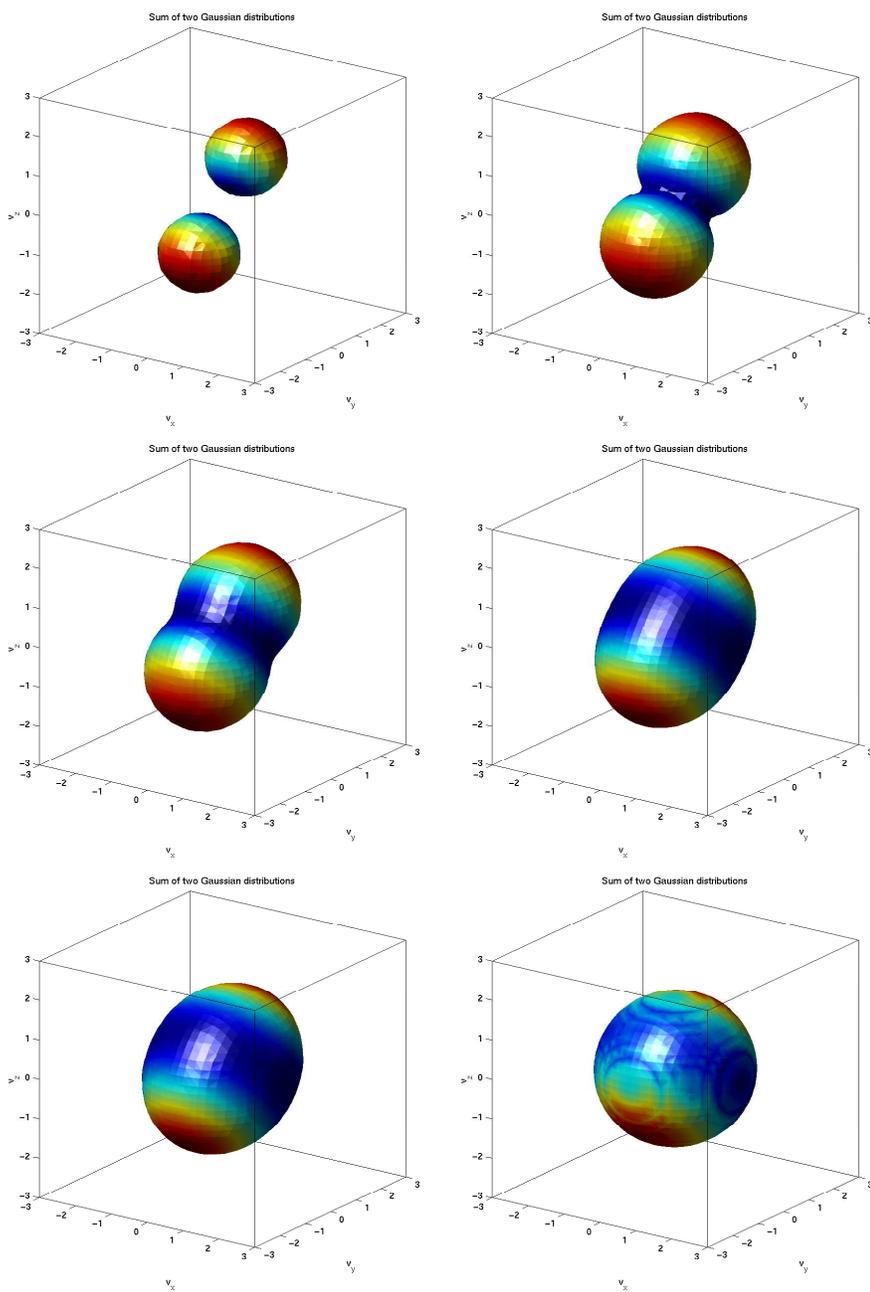


Figure 5.8: Évolution au cours du temps de l'isovaleur $f(t, v_x, v_y, v_z)=0.02$ dans l'espace des vitesses 3D (TEST C).

dimension trois. La méthode spectrale est plus précise, mais le temps de calcul reste trop élevé. D'autre part, la méthode multigrille qui est seulement d'ordre un, a un coût de calcul beaucoup plus abordable et l'algorithme de sous-cyclage permet d'utiliser un pas de temps plus grand. Ainsi, il est possible de réaliser des simulations sur des temps longs avec un nombre de Knudsen petit. Pour la discrétisation de l'équation de transport, nous utilisons la méthode de conservation des flux, présentée au Chapitre 2. Celle-ci paraît bien appropriée puisqu'elle permet la préservation de la positivité, la décroissance de l'entropie (qui est théoriquement constante), puis de conserver la masse, l'impulsion et l'énergie

$$\sum_i f_i^{n+1}(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} = \sum_i f_i^n(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

Le couplage de ces deux algorithmes convient très bien pour la discrétisation dans le cas non homogène puisque la plupart des propriétés sont conservées au niveau discret.

5.2.4 Tests numériques dans le cas non homogène $1D \times 3D$.

A. Le cas d'une bi-Maxwellienne. Nous considérons d'abord une donnée initiale bi-Maxwellienne en v , avec une forte modulation de la densité

$$f_0(x, v) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{M}_{\rho, v_1, T}(v) + \mathcal{M}_{\rho, v_2, T}(v) \right) \left(1 + 0.5 \cos(k_0 x) \right),$$

avec $k_0 = 0.3$. Pour simplifier, nous imposons des conditions aux limites périodiques en la variable x ,

$$f(t, 0, v) = f(t, L, v), \quad \forall (t, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3.$$

Avec ces hypothèses, la masse, l'impulsion et l'énergie sont conservées au cours du temps et l'état stationnaire est donné par le produit d'une fonction constante en x et Maxwellienne en v calculée à partir de la masse, de l'impulsion et de la température de la donnée initiale. La température et l'entropie sont présentées dans la Fig. 5.9. La température totale est bien conservée et l'entropie décroît exponentiellement, puis se stabilise. Nous observons aussi que la valeur de l'entropie finale correspond précisément à celle donnée par la solution stationnaire. Dans la Fig. 5.10, l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases (x, v_x) obtenue par l'intégration de la fonction de distribution en (v_y, v_z) est présentée : l'équation de transport avec les conditions aux limites périodiques provoquent des oscillations dans l'espace des vitesses. Cependant, après quelques itérations, l'opérateur de collisions agit comme une équation de diffusion qui élimine les oscillations et homogénéise la fonction de distribution jusqu'à atteindre l'état stationnaire.

B. Le tube à choc : Du transport libre aux modèles hydrodynamiques.

Dans cet exemple, nous nous intéressons aux problèmes de la dynamique des gaz. C'est pourquoi, nous observons l'évolution des quantités macroscopiques : $\rho(t, x)$

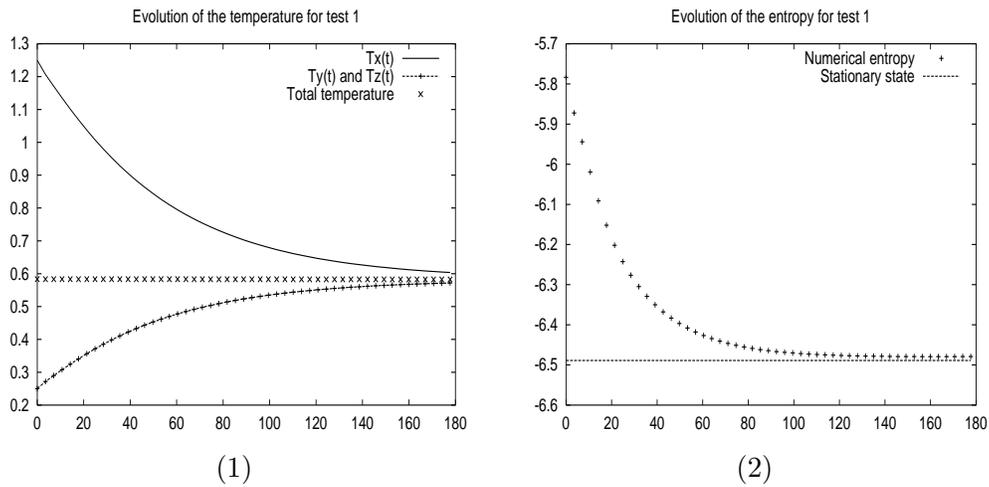


Figure 5.9: Évolution au cours du temps (1) de la température et (2) de l'entropie dans le cas non homogène (TEST A).

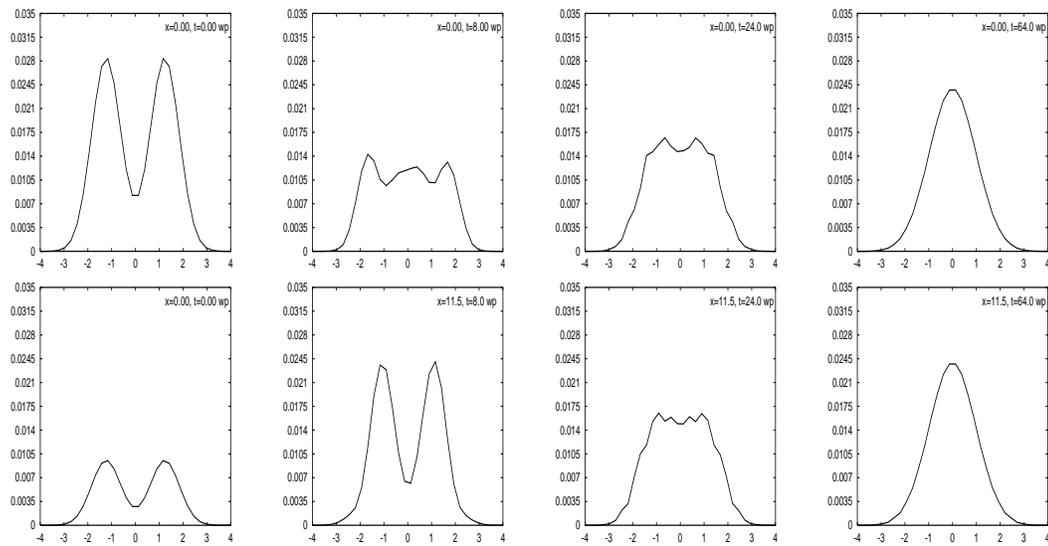


Figure 5.10: Évolution au cours du temps de la fonction de distribution dans le cas non homogène dans l'espace des phases en $x = 0$ et $x = \pi/k_0$ (TEST A).

représente la densité du gaz, $u(t, x)$ la vitesse moyenne et $T(t, x)$ la température totale. Ces quantités sont obtenues en calculant les moments de la fonction de distribution $f(t, x, v)$ par rapport à la variable de vitesse v .

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv, \quad u(t, x) = \frac{1}{\rho(t, x)} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) v dv$$

et la température

$$T(t, x) = \frac{1}{3\rho(t, x)} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v)(u(t, x) - v)^2 dv.$$

Nous discrétisons alors l'équation de Landau non homogène :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f),$$

où ε est le nombre de Knudsen, qui détermine la fréquence de collisions. Lorsque le nombre de Knudsen tend vers zéro, les collisions dominent la partie transport et les quantités macroscopiques $(\rho(t, x), u(t, x), T(t, x))$ correspondent de manière formelle avec la solution des équations d'Euler compressibles pour la dynamique des gaz :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u \rho) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho e + p) u = 0. \end{cases}$$

Pour fermer le système, nous considérons l'équation d'état d'un gaz parfait.

Nous choisissons maintenant une donnée initiale pour le problème du tube à choc de Sod :

$$\begin{cases} (\rho_l, u_l, T_l) = (1, 0, 1) & \text{si } 0 \leq x \leq 0.5, \\ (\rho_r, u_r, T_r) = (0.125, 0, 0.25) & \text{si } 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$

À partir de ces quantités, nous calculons la condition initiale pour l'équation de Landau non homogène donnée par

$$\begin{cases} f_0(x, v) = M_{\rho_l, u_l, T_l} & \text{si } 0 \leq x \leq 0.5, \\ f_0(x, v) = M_{\rho_r, u_r, T_r} & \text{si } 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Nous présentons des simulations pour des nombres de Knudsen différents et comparons les valeurs macroscopiques (ρ, u, T) obtenues en discrétisant FPL à partir de

la méthode multigrille avec la solution numérique de l'équation de transport libre (sans collision) et avec la solution numérique des équations d'Euler. La solution débute avec un gaz de forte densité et à température élevée dans la région $0 \leq x \leq 0.5$ et avec une densité et une température faibles dans la région $0.5 \leq x \leq 1$. Le gaz est initialement au repos. À $t = 0$, le diaphragme séparant les deux régions est ouvert. Ceci provoque une onde de choc qui se propage dans le milieu à faible densité et une onde de raréfaction dans le milieu à forte densité.

Nous observons que lorsque le nombre de Knudsen ε tend vers zéro, les valeurs macroscopiques (ρ, u, T) se rapprochent de la solution des équations d'Euler. D'autre part, la solution de l'équation de transport libre ($\varepsilon = +\infty$) développe de forts gradients par rapport à la variable des vitesses. Cependant, lorsque la fréquence de collisions augmente, c'est-à-dire lorsque ε tend vers zéro, l'opérateur de Landau agit comme une équation de diffusion et le profil de la fonction de distribution en v devient plus régulier (voir Fig. 5.11).

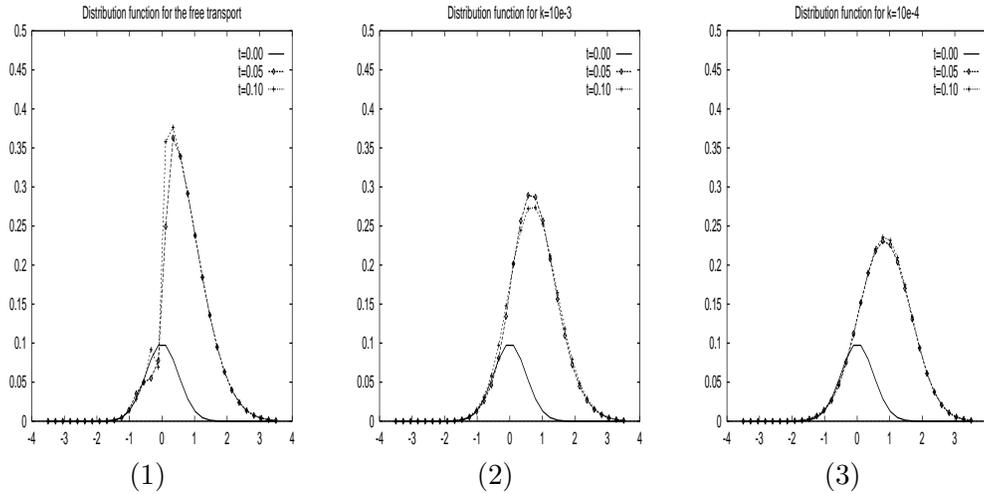


Figure 5.11: Évolution au cours du temps de la fonction de distribution à $x = 1/2$ pour (1) le transport libre, (2) l'équation FPL avec $\varepsilon=10^{-3}$ et (3) $\varepsilon=10^{-4}$ (TEST B).

5.2.5 Conclusion.

Dans cette partie, nous avons revu et comparé les méthodes spectrale et multigrille, puis introduit une nouvelle méthode pour approcher l'opérateur FPL lorsque la fonction de distribution est presque isotrope. Cette dernière méthode réduit sensiblement le temps de calcul, mais ne peut pas être utilisée lorsque la fonction de distribution est loin d'être isotrope.

La méthode spectrale conserve seulement la masse globale, mais donne une approximation des moments et de l'énergie avec la précision spectrale. Un compromis

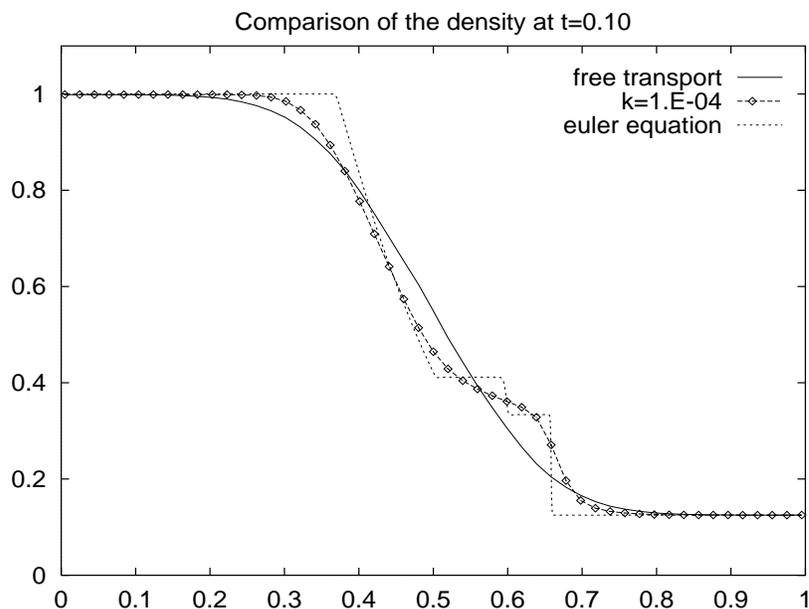


Figure 5.12: Densité pour l'équation de transport libre, l'opérateur FPL avec $\varepsilon=10^{-4}$ et le système d'Euler au temps $t = 0.10$ (TEST B).

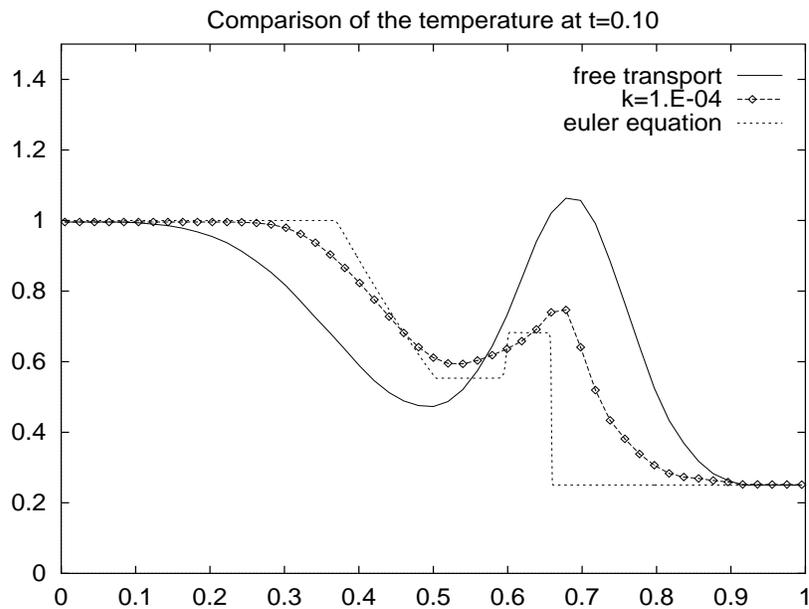


Figure 5.13: Température pour l'équation de transport libre, l'opérateur FPL avec $\varepsilon=10^{-4}$ et le système d'Euler au temps $t = 0.10$ (TEST B).

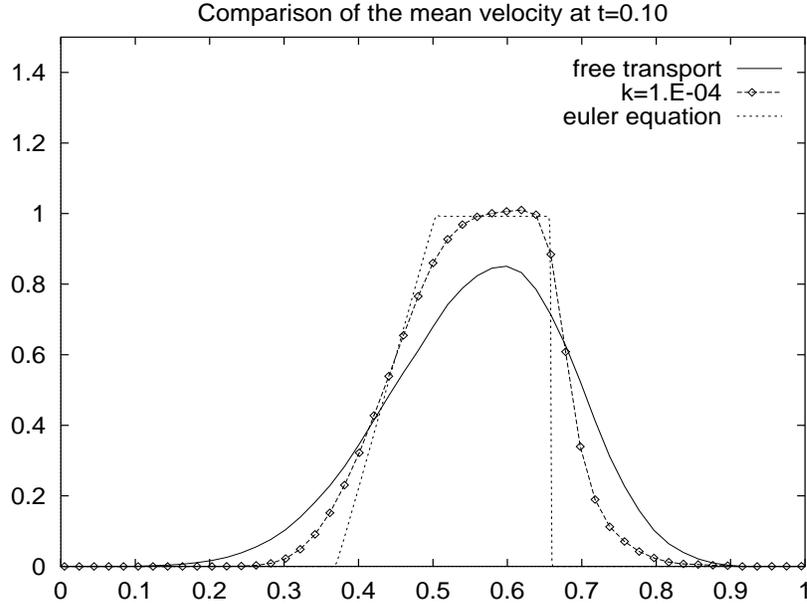


Figure 5.14: *Vitesse moyenne pour l'équation de transport libre, l'opérateur FPL avec $\varepsilon=10^{-4}$ et le système d'Euler au temps $t = 0.10$ (TEST B).*

doit être trouvé sur la taille du support pour éviter l'effet d'“aliasing” tout en conservant une bonne description de la fonction de distribution. Les tests numériques montrent que les variations des moments sont négligeables, mais le coût de calcul reste trop élevé pour utiliser un nombre de modes suffisamment grand et traiter le cas non homogène en dimension trois en vitesse. De plus, la condition de stabilité sur le pas de temps est de l'ordre de $O(1/N^2)$, où N représente le nombre total d'inconnues en v .

Concernant la méthode multigrille couplée avec le schéma aux différences finies préservant les moments de la fonction de distribution, elle donne des résultats satisfaisants avec un nombre d'inconnues peu élevé et un coût de calcul raisonnable. En effet, l'algorithme de sous-cyclage évite une condition de stabilité globale sur le pas de temps et réduit considérablement le temps de calcul. L'utilisation de formules de quadrature de type Monte-Carlo diminue la précision du schéma, mais donne néanmoins des résultats suffisamment précis sur la relaxation de la température et de l'entropie. De plus, la conservation des moments et la préservation de la positivité sont un avantage pour la simulation en temps long, ce qui permet le couplage avec la méthode à flux conservatif (PFC) pour le traitement de l'équation non homogène.

5.3 Discrétisation de l'équation de Landau non homogène $2D \times 2D$.

Dans la partie précédente, nous avons vu que la méthode spectrale donne des résultats très précis pourvu que le nombre d'inconnues soit suffisamment élevé. Cependant, le coût de calcul augmente sensiblement avec le nombre de modes puisque l'utilisation d'un schéma explicite pour la discrétisation en temps implique une condition de stabilité très pénalisante sur le pas de temps. En dimension deux, il est possible de traiter l'opérateur de collision avec un nombre suffisamment élevé d'inconnues tout en conservant un temps de calcul abordable.

L'objectif de cette partie est donc de développer un algorithme pour la discrétisation de l'équation de Landau dans l'espace des phases $(x, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ couplant la méthode spectrale pour les collisions et le schéma à flux conservatif pour le transport. Notre méthode est basée sur un schéma de "splitting" en temps permettant de découpler la partie collisions et la partie transport. Dans le couplage, un schéma de type Runge-Kutta adapté pour la phase de collisions est utilisé et permet d'éviter partiellement des pas de temps trop petits lorsque le problème devient raide. Les principales propriétés de notre méthode peuvent être résumées ainsi

- Précision spectrale pour l'évaluation de $Q(f, f)$ avec $N \log(N)$ opérations.
- Précision d'ordre deux en temps évitant une condition de stabilité trop restrictive sur le pas de temps due à la raideur de l'opérateur de collisions.
- Reconstruction d'ordre trois pour la discrétisation de l'équation de transport avec correcteurs de pentes.
- Possibilité d'utiliser des grilles différentes pour les phases transport et collisions.
- Possibilité de parallélisation grâce au schéma de "splitting".

Cette partie est organisée comme suit. D'une part, nous rappelons brièvement le schéma spectral en dimension quelconque. Nous montrons que l'utilisation d'un schéma explicite en temps pour la résolution du système différentiel implique une condition sur le pas de temps du type

$$\Delta t \leq C \varepsilon / N^2,$$

où ε est le nombre de Knudsen et N le nombre d'inconnues. Nous rappelons ensuite le schéma à flux conservatif (PFC) et introduisons la discrétisation de différentes conditions aux limites.

5.3.1 La méthode numérique.

Pour le traitement numérique des équations cinétiques du type (5.1), un simple schéma de "splitting" d'ordre un est obtenu en considérant les deux étapes successives. Entre

le temps $t^n = n \Delta t$ et t^{n+1} , nous approchons l'opérateur de collisions $S_2(\Delta t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f), \\ f(0, x, v) = f^n(x, v). \end{cases} \quad (5.-10)$$

Puis, nous posons $f^*(x, v) = f(\Delta t, x, v)$ et résolvons l'équation de transport $S_1(\Delta t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \bar{f} + F(t, x, v) \cdot \nabla_v \bar{f} = 0, \\ \bar{f}(0, x, v) = f^*(x, v). \end{cases} \quad (5.-9)$$

Finalemnt, la nouvelle valeur au temps t^{n+1} est donnée par $f^{n+1}(x, v) = \bar{f}(\Delta t, x, v)$. Alors, un schéma d'ordre deux peut être facilement dérivé en symétrisant le schéma d'ordre un :

$$f^{n+1} = S_1(\Delta t/2) \circ S_2(\Delta t) \circ S_1(\Delta t/2) f^n.$$

Dans la suite, nous présentons d'abord la discrétisation de l'opérateur de collisions en utilisant la méthode spectrale. Puis, nous donnons un algorithme de discrétisation de l'équation de transport avec des conditions aux limites diffusives ou spéculaires.

A. Un algorithme rapide pour l'étape de collisions.

Nous rappelons brièvement les principales étapes de la discrétisation de l'équation de Landau (5.1) par une méthode spectrale.

Nous écrivons d'abord l'opérateur de collisions

$$Q(f, f) = \nabla_v \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(v - v^*) \left[(\nabla_v f(t, v)) f(t, v^*) - (\nabla_{v^*} f(t, v^*)) f(t, v) \right] dv^*. \quad (5.-8)$$

Nous approchons ensuite la fonction de distribution par une somme partielle d'une série de Fourier

$$f_N(t, v) = \sum_{k \in \{-N, \dots, N\}} \hat{f}_k(t) e^{i \frac{\pi}{R} k \cdot v}, \quad (5.-8)$$

où $k = (k_1, \dots, k_d)$, N est le multi-entier (n, \dots, n) , n représente le nombre de demi-modes dans chaque direction et le k -ème mode est donné par

$$\hat{f}_k(t) = \frac{1}{(2R)^d} \int_{B_d(0, R)} f(t, v) e^{-i k \cdot v} dv.$$

Nous calculons l'opérateur de collisions pour f_N ,

$$Q(f_N, f_N) = \left[\frac{\pi}{R} \right]^{\gamma+d} \sum_{l, m \in \{-N, \dots, N\}^2} \hat{f}_l(t) \hat{f}_m(t) \hat{\beta}_L(l, m) e^{i \frac{\pi}{R} (l+m) \cdot v},$$

avec

$$\hat{\beta}_L(l, m) = \int_{B(0, \pi)} |w|^{\gamma+2} \left[(l+m)(l-m) - (l+m) \cdot \frac{w}{|w|} (l-m) \cdot \frac{w}{|w|} \right] e^{i w \cdot m} dw.$$

Nous obtenons finalement le système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}_k}{dt} &= \left[\frac{\pi}{R} \right]^{\gamma+d} \sum_{m \in \{-N, \dots, N\}} \hat{f}_{k-m} \hat{f}_m \left[(k-m)^2 F(m) - \hat{B}(m, m) \right] \\ &\quad - \left[\frac{\pi}{R} \right]^{\gamma+3} \sum_{i,j=1}^d \sum_{m \in \{-N, \dots, N\}} \hat{f}_{k-m} \hat{f}_m (k_i - m_i)(k_j - m_j) I_{i,j}(m), \end{aligned} \quad (5.-8)$$

avec

$$F(m) = \int_{B(0, \pi)} |w|^{\gamma+2} e^{i w \cdot m} dw \quad (5.-8)$$

$$I_{i,j}(m) = \int_{B(0, \pi)} |w|^{\gamma+2} \frac{w_i w_j}{|w|^2} e^{i w \cdot m} dw. \quad (5.-7)$$

L'opérateur est approché par un algorithme en $N \log(N)$ basé sur la Transformation de Fourier Rapide (FFT).

B. Discrétisation en temps.

La comparaison des méthodes multigrille et spectrale montre qu'un schéma de base pour la résolution du système différentiel (5.-8) n'est pas bien adapté puisque l'augmentation du nombre d'inconnues conduit à la résolution d'un système de plus en plus raide. Ainsi, la forte non linéarité du système d'équations et le nombre important d'inconnues rendent l'utilisation d'un schéma implicite très coûteuse. D'autre part, la structure "diffusive" de l'opérateur de collisions entraîne une condition de stabilité sur le pas de temps de l'ordre du carré du pas des vitesses pour un schéma explicite.

Proposition 5.3 *Soit \hat{f}_k^{n+1} l'approximation du k -ème mode de \hat{f} au temps t^{n+1} , utilisant une méthode spectrale couplée avec un schéma d'Euler explicite pour la discrétisation en temps de l'équation de Landau homogène. Alors, le pas de temps Δt doit satisfaire la condition de stabilité suivante*

$$\exists C(\gamma, d, f) > 0, \quad \Delta t \leq C(\gamma, d, f) \frac{\varepsilon}{N^2},$$

où $N^2 = \sum_{k=1}^d n^2$ et n est le nombre de modes dans chaque direction.

Preuve : posons $FP_k(\hat{f})$, tel que

$$\begin{aligned} FP_k(\hat{f}) &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\pi}{R} \right]^{\gamma+d} \sum_{m \in \{-N, \dots, N\}} \hat{f}_{k-m} \hat{f}_m \left[(k-m)^2 F_2(m) - m^2 F_1(m) \right] \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\pi}{R} \right]^{\gamma+d} \sum_{i,j=1}^d \sum_{m \in \{-N, \dots, N\}} \hat{f}_{k-m} \hat{f}_m (k_i - m_i)(k_j - m_j) I_{i,j}(m). \end{aligned}$$

Alors, en utilisant un schéma d'Euler explicite d'ordre un, nous avons

$$\forall k \in \{-N, \dots, N\}, \quad \hat{f}_k^{n+1} = \hat{f}_k^n + \Delta t FP_k(\hat{f}^n).$$

La condition de stabilité sur le pas de temps est donnée par

$$\forall k \in \{-N, \dots, N\}, \quad \Delta t \leq 1/Lip(FP_k(.)),$$

où $Lip(FP_k(.))$ est la constante de Lipschitz de $FP_k(.)$, qui peut être évaluée en calculant le jacobien $\mathcal{J}_{k,l}$

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_{k,l}| = \left| \frac{dFP_k}{dg_l}(\hat{f}^n) \right| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\pi}{R} \right]^{\gamma+d} \max(\hat{f}_{k-l}^n, \hat{f}_l^n) \left[|k-l|^2 (|F_2(l)| + F_1(k-l)) \right. \\ &\quad \left. + l^2 (|F_1(l)| + F_2(k-l)) + \sum_{i,j=1}^d |k-l|^2 |I_{i,j}(l)| + |l|^2 |I_{i,j}(k-l)| \right]. \end{aligned}$$

Or, les coefficients $F_1(m)$, $F_2(m)$ et $I_{i,j}$ sont uniformément bornés par rapport à f , puisqu'ils ne dépendent que de γ et de la dimension de l'espace des vitesses.

$$|F_1(m)|, |F_2(m)|, |I_{i,j}(m)| \leq 2 \frac{\pi^{\gamma+2+d}}{\gamma+2+d}.$$

Alors, il existe une constante strictement positive $C(\gamma, d, R)$, telle que

$$|\mathcal{J}_{k,l}| = \left| \frac{dFP_k}{dg_l}(\hat{f}^n) \right| \leq \frac{C(\gamma, d, R)}{\varepsilon} \hat{f}_0^n N^2.$$

Finalement, le pas de temps est borné par

$$\Delta t \leq \frac{1}{Lip(FP_k)} \leq C(\gamma, d, R) \hat{f}_0^n \frac{\varepsilon}{N^2}, \quad \forall k \in \{-N, \dots, N\}.$$

□

À partir de la Proposition 5.3, nous observons que le pas de temps décroît lorsque le nombre de modes croît ou lorsque le nombre de Knudsen tend vers zéro. Cet inconvénient peut être partiellement évité en utilisant un schéma d'ordre élevé explicite avec un large intervalle de stabilité. Pour les tests numériques présentés dans la suite, nous utilisons le schéma d'ordre trois DUMKA récemment proposé par A.-A. Medovikov dans [18]. Cette méthode est directement inspirée des schémas de Runge-Kutta et le polynôme de stabilité est calculé de sorte que le domaine de stabilité soit optimal. Ainsi, grâce au large domaine de stabilité, ce schéma permet de résoudre des problèmes relativement raides et puisque il est explicite, le coût de calcul reste raisonnable. L'efficacité de la méthode peut être fortement améliorée en utilisant un procédé de pas de temps adaptatif.

C. Discrétisation de l'équation de transport.

Cette partie est consacrée à la résolution numérique de l'équation de Vlasov caractérisant la partie transport. Ainsi, nous utilisons une méthode eulérienne qui consiste à discrétiser la fonction de distribution f sur une grille de l'espace des phases. Considérons l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x \cdot (v f) + \nabla_v \cdot (E(t, x) f) = 0 \quad (5.-12)$$

couplée avec l'équation de Poisson normalisée

$$E(t, x) = -\nabla_x \phi(t, x), \quad -\Delta \phi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv. \quad (5.-12)$$

La procédure de discrétisation en temps est basée sur un schéma de décomposition d'opérateurs. Pour passer de l'étape t^n au temps t^{n+1} ,

- 1. réalisation d'une première étape d'advection le long de l'axe x pour un demi pas de temps : $f^*(x, v) = f(t^n, x - v\Delta t/2, v)$.
- 2. calcul du champ électrique au temps $t^{n+1/2}$ en utilisant f^* pour le calcul de la charge dans l'équation de Poisson.
- 3. réalisation d'une étape d'advection le long de l'axe des vitesses v pour un pas de temps : $f^{**} = f^*(x, v - E(t^{n+1/2}, x)\Delta t)$.
- 4. réalisation d'une seconde étape d'advection le long de l'axe x pour un demi pas de temps : $f(t^{n+1}, x, v) = f^{**}(x - v\Delta t/2, v)$.

En utilisant cette procédure, nous pouvons nous restreindre, sans perte de généralité, à la résolution d'une équation de transport en dimension une

$$\partial_t f + \partial_x (u f) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [x_{min}, x_{max}], \quad (5.-12)$$

où u est une vitesse constante. Alors, la solution de l'équation de transport au temps t^{n+1} est donnée par

$$f(t^{n+1}, x) = f(t^n, x - u \Delta t), \quad \forall x \in [x_{min}, x_{max}].$$

Nous introduisons une suite de points $(x_{i+1/2})_{i \in I}$ du domaine de calcul $[x_{min}, x_{max}]$ et posons $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Nous supposons que les valeurs de la fonction de distribution sont connues au temps $t^n = n \Delta t$ et calculons les nouvelles valeurs au temps t^{n+1} en intégrant l'équation de Vlasov sur chaque intervalle discret. Ainsi, en utilisant la solution explicite de l'équation, nous avons

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t^{n+1}, x) dx = \int_{x_{i-1/2}-u \Delta t}^{x_{i+1/2}-u \Delta t} f(t^n, x) dx.$$

En posant

$$\Phi_{i+1/2}(t^n) = \int_{x_{i+1/2}-u\Delta t}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x) dx,$$

nous obtenons la conservation du nombre de particules

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t^{n+1}, x) dx = \Phi_{i-1/2}(t^n) + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x) dx - \Phi_{i+1/2}(t^n). \quad (5.12)$$

À partir de cette reconstruction nous obtenons le schéma suivant

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1/2}(t^n) &= \int_{x_{j+1/2}-\alpha_i}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x) dx \\ &= \Delta x \sum_{k=j+1}^i f_k + \alpha_i \left[f_j + \frac{\epsilon_j^+}{6} \left(1 - \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) \left(2 - \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) (f_{j+1} - f_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon_j^-}{6} \left(1 - \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) \left(1 + \frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) (f_j - f_{j-1}) \right]. \end{aligned}$$

D. Discrétisation des conditions aux limites.

Nous considérons l'équation de Landau non homogène (5.1) avec des conditions aux limites supplémentaires en la variable de l'espace physique.

$$|v \cdot n| f(x, v, t) = \int_{v_* \cdot n < 0} |v_* \cdot n(x)| K(v_* \rightarrow v, x, t) f(x, v_*, t) dv_* \text{ for } v \cdot n \geq 0, x \in \partial\Omega, \quad (5.15)$$

où $n(x)$ représente la normale unitaire intérieure au domaine Ω . Le flot entrant est défini en fonction du flot sortant modifié par le noyau des conditions aux limites linéaire K donné par l'intégrale (5.3.1). Ce noyau est tel que la positivité et la conservation de la masse soient assurées.

$$K(v_* \rightarrow v, x, t) \geq 0, \quad \int_{v \cdot n(x) \geq 0} K(v_* \rightarrow v, x, t) dv = 1. \quad (5.15)$$

D'un point de vue physique, nous supposons qu'à la frontière du domaine Ω , une fraction α des particules est absorbée par le mur. Ces particules sont ensuite ré-émises à la vitesse correspondant à celle se trouvant dans le plasma et à la température du mur. Quant à la fraction restante $(1 - \alpha)$, elle est parfaitement réfléchi. Ceci nous conduit à imposer pour les vitesses entrantes

$$f(x, v, t) = (1 - \alpha)Rf(x, v, t) + \alpha Mf(x, v, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad v \cdot n(x) \geq 0, \quad (5.15)$$

avec $0 \leq \alpha \leq 1$, et

$$Rf(x, v, t) = f(x, v - 2n(n \cdot v), t), \quad (5.14)$$

$$Mf(x, v, t) = \mu(x, t) f_s(v). \quad (5.13)$$

où f_s est donnée par

$$f_s(v) = 2\pi T_s M_{1,0,T_s}(v) = \exp\left(-\frac{v^2}{2k_B T_s}\right),$$

où k_B représente la constante de Boltzmann et T_s la température du bord $\partial\Omega$.

Dans l'équation (5.-13), la valeur $\mu(t, x)$ est déterminée par la conservation de la masse sur la surface

$$2\pi T_s \mu(x, t) \int_{v \cdot n \geq 0} M_{1,0,T_s}(v) |v \cdot n| dv = \int_{v \cdot n < 0} f(x, v, t) |v \cdot n| dv. \quad (5.-13)$$

La discrétisation des réflexions spéculaires est évidente pour des géométries simples, mais est plus difficile pour des géométries complexes, par exemple, lorsque le domaine n'est pas symétrique. Ici, nous nous plaçons dans $\Omega = [0, L]^2$, le flot est alors donné par

$$\Phi_{i+1/2}(t^n, v \cdot n \leq 0) = \Phi_{i+1/2}(t^n, v \cdot n \geq 0), \quad \forall (t, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d.$$

La discrétisation des conditions aux limites diffusives est plus difficile à mettre en œuvre. Pour simplifier, nous présentons le schéma pour une équation de transport en dimension une sur l'intervalle (x_{min}, x_{max}) . Supposons que les valeurs de la fonction de distribution au temps t^n , $(f_i^n)_{i \in I}$, soient connues. D'une part, lorsque l'origine de la courbe caractéristique se trouve à l'intérieur du domaine, la valeur de f au temps t^{n+1} est calculée à l'aide du schéma PFC présenté précédemment. D'autre part, lorsque l'origine de la courbe caractéristique est à l'extérieur du domaine, par exemple à gauche du point $x = x_{min}$, nous calculons la valeur $\mu^{n+1/2}(x_{min})$ qui représente une approximation de $\mu(t, x_{min})$ sur l'intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$ par

$$2\pi T_s \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mu(t, x_{min}) \int_{v \geq 0} \mathcal{M}_{1,u_s,T_s}(v) v dv dt = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{v \leq 0} f(t, x_{min}, v) v dv dt.$$

Ainsi, lorsque la vitesse v est négative, la fonction de distribution sur l'intervalle $[t^n, t^{n+1}]$ est calculée à partir des courbes caractéristiques

$$\frac{dX}{ds}(s) = v, \quad X(t) = x_{min}.$$

L'origine de la caractéristique au temps t^n peut être facilement localisée $X(t^n, t, x_{min}) = x_{min} + v(t^n - t)$. En exprimant la conservation de la masse, nous calculons alors

$$\begin{aligned} & 2\pi T_s \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mu(t, x_{min}) \int_{v \geq 0} \mathcal{M}_{1,0,T_s}(v) v dv dt \\ &= - \int_{v \leq 0} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t^n, X(t^n, t, x_{min}), v) v dt dv \\ &= - \int_{v \leq 0} \int_{x_{min}}^{x_{min} - v \Delta t} f(t^n, x, v) dx dv. \end{aligned}$$

Finalement, la valeur $\mu^{n+1/2}(x_{min})$ correspond à la moyenne de $\mu(t, x_{min})$ sur $[t^n, t^{n+1}]$:

$$\mu^{n+1/2}(x_{min}) = \frac{\int_{v \leq 0} \int_{x_{min}}^{x_{min} - v \Delta t} f(t^n, x, v) dx dv}{2 \pi T_s \Delta t \int_{v \geq 0} \mathcal{M}_{1,0,T_s}(v) v dv}.$$

Ainsi, à partir de $\mu^{n+1/2}$, nous pouvons approcher le flot de particules lorsque l'origine de la courbe caractéristique est à l'extérieur du domaine. Lorsque la vitesse v_j est positive, nous notons par $\bar{t} \in [t^n, t^{n+1}]$, le temps tel que $x_{min} = X(\bar{t}, t^{n+1}, x_{i+1/2})$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1/2,j}(t^n) &= \int_{X(\bar{t}, t^{n+1}, x_{i+1/2})}^{x_{i+1/2}} f(t^n, x, v_j) dx + \int_{t^n}^{\bar{t}} f(t, x_{min}, v_j) v_j dt \\ &= \Delta x \sum_{k=0}^i f_{i,j}^n + (\bar{t} - t^n) \mu^{n+1/2}(x_{min}) \mathcal{M}_{1,0,T_s}(v_j). \end{aligned}$$

5.3.2 Tests numériques.

TEST 1 : le cas Maxwellien $d = 2$.

La donnée initiale est choisie dans la classe des solutions exactes isotropes [4]: nous posons $S = 0.5$ et considérons

$$f_0(v) = \frac{1}{2 \pi S} \left(1 - \frac{1-S}{S} \left(1 - \frac{|v|^2}{2S} \right) \right) \exp\left(-\frac{|v|^2}{2S}\right).$$

Les résultats numériques sont comparés avec la solution explicite

$$f(v, t) = \frac{1}{2 \pi S} \left(1 - \frac{1-S}{S} \left(1 - \frac{|v|^2}{2S} \right) \right) \exp\left(-\frac{|v|^2}{2S}\right),$$

où $S = 1 - 0.5 \exp(-2t)$. Dans ce cas les températures $T_1(t)$, $T_2(t)$ sont égales puisque la solution reste isotrope. Ce test est effectué pour comparer l'efficacité du schéma d'ordre trois DUMKA avec le schéma d'Euler explicite standard. La simulation est stoppée lorsque l'état stationnaire est atteint ce qui correspond à la stabilisation de l'entropie cinétique. Nous utilisons un nombre de modes $n = 16, 32$ et 64 dans chaque direction, tandis que le pas de temps Δt et le support de la fonction de distribution dépendent du nombre de points de la grille. D'une part, le temps total de calcul est présenté dans le tableau 5.5 en fonction du nombre de modes. Il montre que le schéma DUMKA utilisant une procédure de pas de temps adaptatif permet de réduire sensiblement le temps de calcul lorsque le nombre d'inconnues augmente. En effet, l'utilisation de la méthode spectrale avec 64^2 modes et du schéma DUMKA est pratiquement quatre fois plus rapide que l'algorithme utilisant le schéma d'Euler. D'autre part, la norme de l'erreur quadratique est tracée dans la Fig. 5.15. Le schéma

Nombre d'inconnues	DUMKA adaptatif	DUMKA Δt fixé	EULER Δt fixé
16×16	000.6 sec	001.6 sec	001.2 sec
32×32	005.0 sec	013.0 sec	012.0 sec
64×64	143.0 sec	515.0 sec	512.0 sec

Table 5.5: Temps de calcul total pour les schémas DUMKA et Euler en fonction du nombre de modes (TEST 1).

d'Euler donne bien évidemment une approximation à l'ordre deux $O(\Delta v^2)$ puisque il satisfait une condition de stabilité du type $\Delta t \leq C \Delta v^2$. En outre, la solution numérique obtenue par le schéma DUMKA est bien plus précise. Le schéma DUMKA semble donc être prometteur pour la discrétisation d'ordre élevé de l'équation de Landau par la méthode spectrale.

La Fig. 5.16 représente l'évolution du pas de temps Δt lorsque le schéma DUMKA est utilisé avec une procédure de pas de temps adaptatif. Nous constatons que lorsque la fonction de distribution devient proche de l'équilibre, il est possible de choisir un pas de temps beaucoup plus grand.

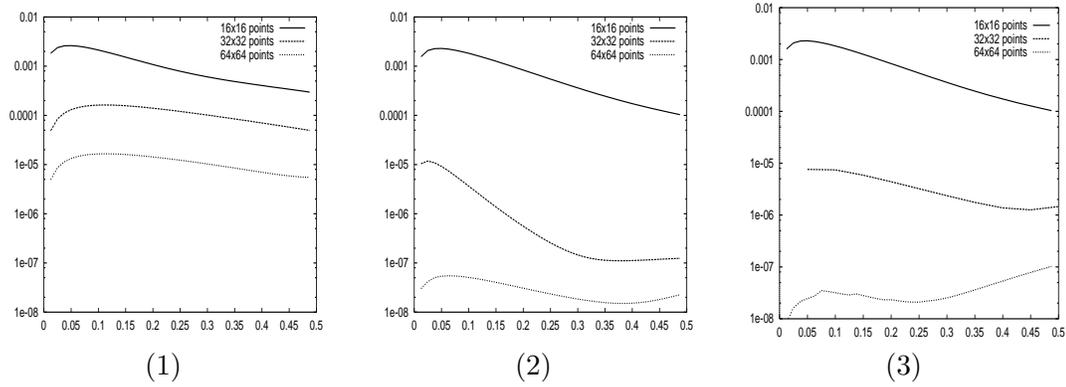


Figure 5.15: Évolution au cours du temps de l'erreur quadratique relative pour le schéma (1) Euler (2) DUMKA et (3) DUMKA avec pas de temps adaptatif en utilisant 16, 32 et 64 modes dans chaque direction (TEST 1).

TEST 2: l'amortissement Landau dans le cas non homogène.

Nous considérons maintenant le système de Vlasov-Poisson couplé avec l'équation de Landau :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + E(t, x) \frac{\partial f}{\partial v_x} = \frac{1}{\epsilon} Q(f, f). \quad (5.-17)$$

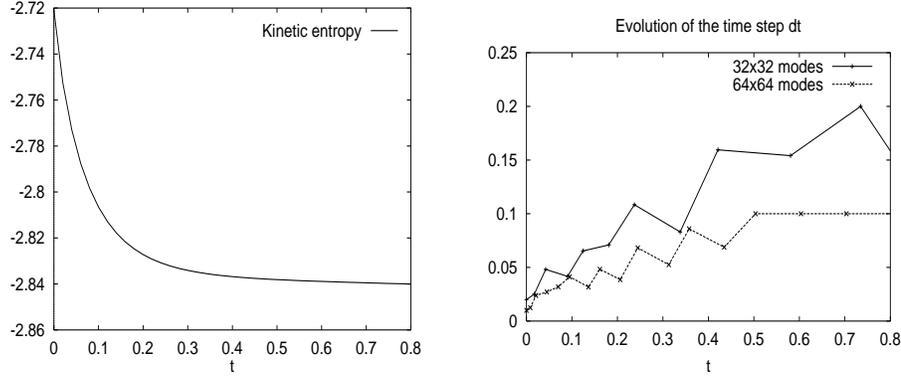


Figure 5.16: *Évolution au cours du temps de l'entropie numérique et du pas de temps pour le schéma DUMKA (TEST 1).*

La donnée initiale est donnée par

$$f(0, x, v_x, v_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-(v_x^2+v_y^2)/2\sigma^2} (1 + \alpha \cos(kx)), \quad \forall (x, v_x, v_y) \in (0, L) \times \mathbb{R}^2,$$

où $\sigma=0.24$, $\alpha=0.5$, la période en espace est $L=4$ et $k=2\pi/L$. L'équation de Vlasov développe de la filamentation dans l'espace des phases et de larges gradients en v sont générés. Ainsi, un nombre important de points est nécessaire pour discrétiser la partie transport. C'est pourquoi, nous utilisons une grille dans l'espace des phases composée de $N_x=32$ dans l'espace physique et $N_{v_x}=N_{v_y}=64$ dans la direction des vitesses. D'autre part, l'équation FPL agit sur des échelles plus lentes en temps et le coût de calcul de l'opérateur de collisions augmente sensiblement lorsque le nombre d'inconnues est accru. Nous utilisons alors une grille plus grossière (32×32) pour l'évaluation de l'opérateur FPL. Les deux grilles de l'espace des vitesses sont liées par une interpolation par polynômes trigonométriques. L'évolution de l'énergie électrique discrète, $\sum_i \Delta x E_i^2(t)$, est tracée à l'échelle logarithmique dans la Fig. 5.17 en fonction du nombre de Knudsen ε . La valeur $\varepsilon = +\infty$ correspond à l'équation de Vlasov-Poisson sans collision. Dans ce cas, l'amplitude de l'énergie électrique décroît d'abord de façon exponentielle et oscille ensuite autour d'une constante. Par contre, en présence de collisions, l'amplitude de l'énergie électrique continue de décroître en fonction du temps. De plus, lorsque la fréquence de collisions est suffisamment élevée, la décroissance reste exponentielle. Concernant l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases (x, v_x) , sans collision, les variations de l'énergie électrique créent des bosses autour de la vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$, où ω est la fréquence d'oscillations et k le nombre d'ondes. Par contre, lorsque la fréquence de collisions est suffisamment importante, l'opérateur de collisions agit comme une équation de diffusion et les oscillations générées par le couplage avec le système de Vlasov-Poisson diminuent (voir Fig. 5.18). Finalement, lorsque la fréquence de collisions croît, l'énergie électrique tend vers zéro et la fonction de distribution est stabilisée à

l'équilibre. Dans la Fig. 5.18, nous reportons l'évolution de la quantité

$$F(t, v_x) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(t, x, v_x, v_y) dx dv_y.$$

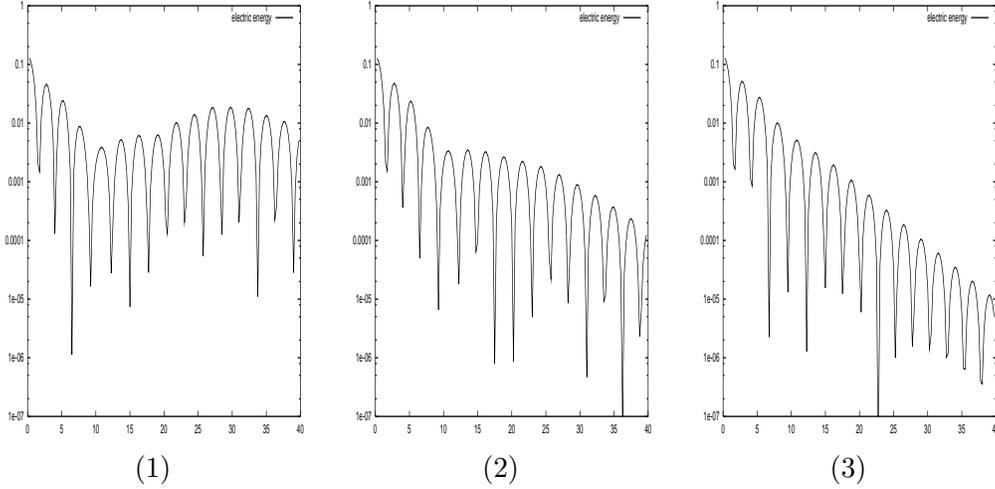


Figure 5.17: Évolution au cours du temps de l'énergie électrique en échelle logarithmique en fonction du nombre de Knudsen, (1) $\epsilon = +\infty$, (2) $\epsilon = 200$ et (3) $\epsilon = 50$.

TEST 3: Les conditions aux limites de réflexion.

Nous considérons ici l'équation de Landau non homogène (5.1) dans l'espace des phases de dimension quatre $2D \times 2D$. Nous notons l'espace physique $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = \frac{1}{\epsilon} Q(f, f), & \forall (t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^2, \\ f(t = 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}), & \forall (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \Omega \times \mathbb{R}^2, \\ f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mu(t) \exp(-\mathbf{v}^2/2\sigma_w(x)), & \forall (t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq 0, \end{cases}$$

où \mathbf{n} représente la normale extérieure au domaine. La quantité $\mu(t)$ est calculée de sorte que le nombre total de particules soit conservé, $\sigma_w(x)$ représente la température imposée à la frontière. On prend

$$\sigma_w(\mathbf{x}) = \begin{cases} 3\sigma & \text{si } x = 0, y \in (0, 1), \\ \sigma & \text{sinon} \end{cases}$$

et la donnée initiale est

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\left(\frac{(v_x + 1)^2 + v_y^2}{2\sigma}\right)\right),$$

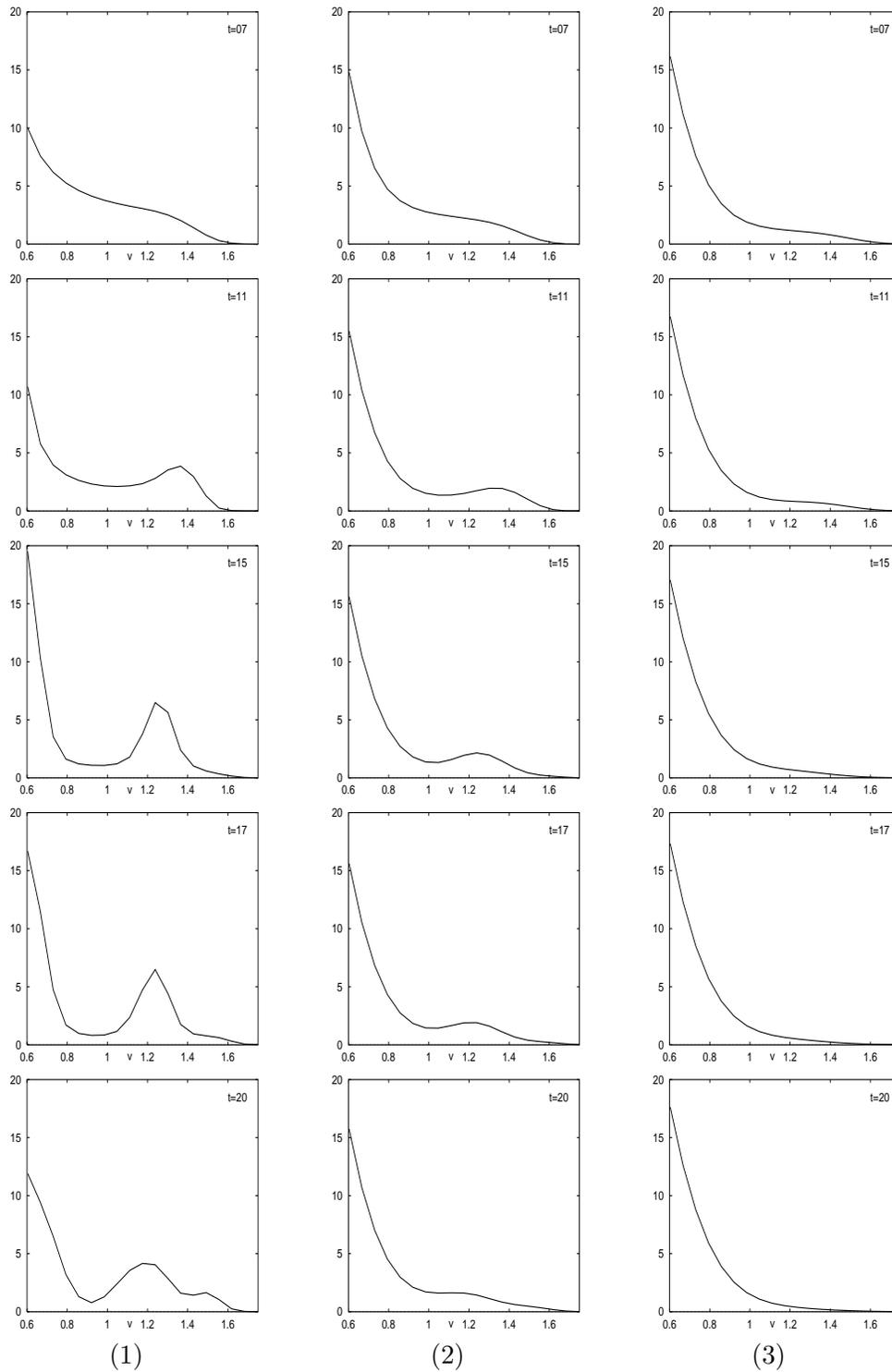


Figure 5.18: Évolution au cours du temps de la queue de la fonction de distribution intégrée par rapport à x , en fonction du nombre de Knudsen, (1) $\epsilon = +\infty$, (2) $\epsilon = 200$ et (3) $\epsilon = 50$.

avec $\sigma = 0.25$ et l'espace des vitesses est tronqué à $v_{max} = 4.5$. La fonction de distribution initiale représente la densité d'un gaz dont la vitesse initiale moyenne est $u(x, y) = (-1, 0)$ et la température initiale est constante $T(x, y) = (0.5, 0.5)$.

Dans la suite, nous considérons l'évolution des quantités macroscopiques : la densité ρ , la vitesse moyenne u , la température T du plasma et des quantités suivantes

$$\begin{aligned} F_y(t, x, v_x) &= \int_{[0,1] \times \mathbb{R}} f(t, x, y, v) dv_y dy, \\ F_x(t, y, v_y) &= \int_{[0,1] \times \mathbb{R}} f(t, x, y, v) dv_x dx, \\ F(t, v) &= \int_{\Omega} f(t, x, y, v) dx dy. \end{aligned}$$

D'une part, nous présentons les résultats pour $\varepsilon=1$, le nombre de cellules en \mathbf{x} est $N_x=64$, $N_y=32$ et $N_{v_x}=N_{v_y}=32$ modes dans chaque direction pour la discrétisation dans l'espace des vitesses (Fig. 5.19). D'autre part, pour $\varepsilon=0.1$, nous utilisons seulement 16^2 modes pour la discrétisation de l'opérateur de Landau et $N_{v_x}=N_{v_y}=32$ points pour la résolution de l'étape de transport. Ceci pour éviter une condition de stabilité trop pénalisante sur le pas de temps. Le lien entre les deux grilles se fait par une interpolation par polynômes trigonométriques (voir Fig. 5.21).

Les Figures montrent les isovalues de la vitesse moyenne et de la température pour différentes valeurs du nombre de Knudsen $\varepsilon=0.1$ et 1 . Le front de la vitesse moyenne et de la température se déplace le long de l'axe des x et est réfléchi à la frontière $x=1$. Pour de petites valeurs du nombre de Knudsen, la température et la vitesse moyenne développent de forts gradients. Concernant les projections (v_x, v_y) , la fonction de distribution intégrée en (x, y) est initialement une Maxwellienne centrée en $u=(-1, 0)$ et se déplace ensuite jusqu'à atteindre un état stationnaire $u_{end}=(0, 0)$, avec une température différente. La projection en (x, v_x) montre que lorsque la partie transport domine les collisions ($\varepsilon = 1$), de forts gradients dans l'espace des vitesses sont générés. Ceci nécessite l'utilisation d'un nombre important de points dans l'espace des vitesses. En outre, pour de petites valeurs du nombre de Knudsen ($\varepsilon = 0.1$), les collisions sont dominantes. Ainsi, l'opérateur FPL introduit plus de diffusion et la fonction de distribution f dans l'espace des vitesses est plus régulière.

5.3.3 Conclusion.

Nous avons introduit une méthode efficace pour l'approximation de l'opérateur (5.1) dans le cas non homogène. L'opérateur de collisions est résolu en utilisant une méthode spectrale qui consiste seulement à approcher la fonction de distribution par une série de Fourier et à discrétiser l'opérateur FPL dans l'espace de Fourier. Cette méthode conserve la masse et donne une approximation de l'impulsion et de l'énergie avec une précision spectrale pourvu que le support soit suffisamment grand. Pour la discrétisation en temps, un schéma d'ordre élevé est nécessaire pour préserver la haute précision de la méthode, mais la condition de stabilité de l'ordre de $O(1/N^2)$ est très

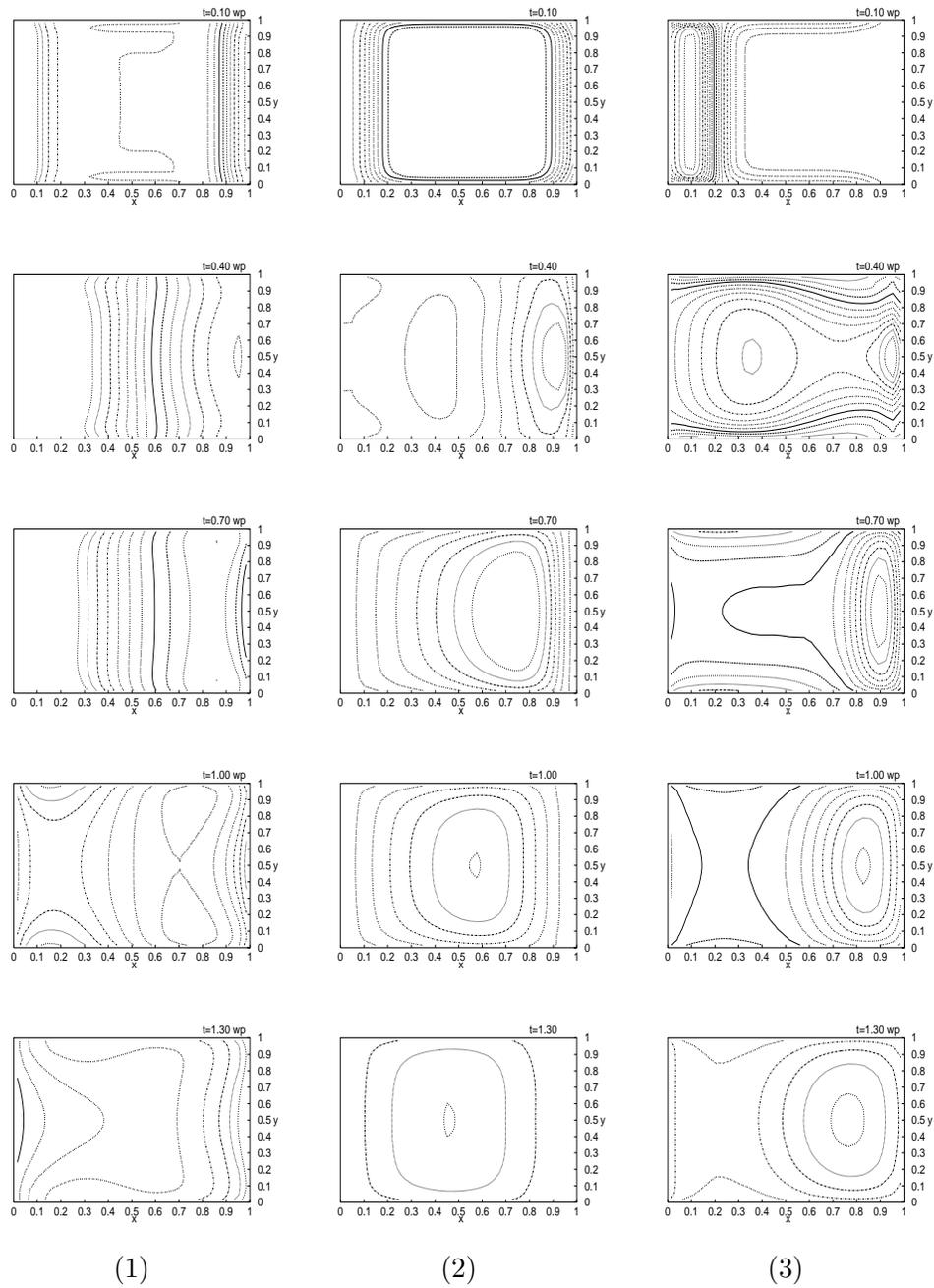


Figure 5.19: Évolution au cours du temps de (1) de la densité ρ (2) de la première composante de la vitesse moyenne, (3) de la température pour $\varepsilon = 1$ (TEST 3).

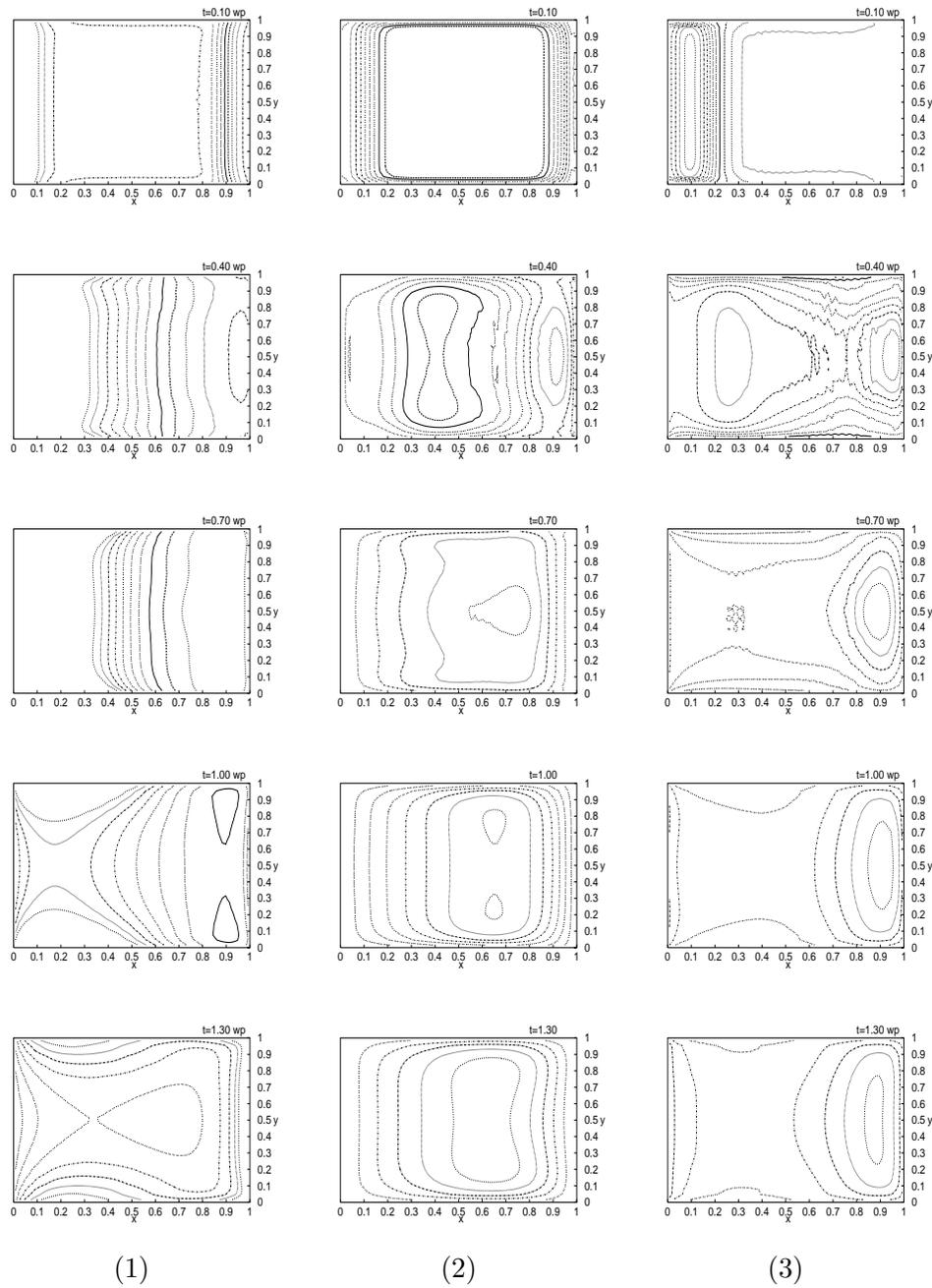


Figure 5.21: Évolution au cours du temps de (1) de la densité ρ (2) de la première composante de la vitesse moyenne, (3) de la température pour $\varepsilon = 0.1$ (TEST 3).

restrictive. Le schéma d'ordre trois DUMKA améliore sensiblement les résultats en terme de précision et de vitesse de calcul lorsque nous utilisons une procédure de pas de temps adaptatif. Pour conserver la précision spectrale de la méthode, il faudrait utiliser un schéma de type spectral pour la résolution numérique de l'équation de Vlasov. Mais, ceci ne permettrait pas de traiter des problèmes dans l'espace physique avec des conditions aux limites réalistes. Ainsi, nous avons préféré le couplage avec un schéma conservatif pour la phase de transport.

Finalement, cette méthode donne de bons résultats avec un nombre de modes dans l'espace des vitesses relativement peu élevé. La méthode multirésolution consiste à discrétiser la partie transport avec un nombre de points élevé, dans l'espace des vitesses, tandis que l'opérateur de collisions est approché avec une résolution plus grossière. Une interpolation par polynômes trigonométriques fait le lien entre les deux grilles. Cette approche numérique se justifie d'un point de vue physique par la différence d'échelles entre les deux opérateurs. En effet, les collisions coulombiennes agissent sur des temps plus longs, alors que le transport crée de fortes variations dans l'espace des phases sur des temps brefs.

Bibliography

- [1] R. Alexandre et C. Villani, On the Landau approximation in plasma physic. *preprint ENS Ulm.* (2000).
- [2] A.A. Arsenev et N.V. Peskov, On the existence of a generalized solution of Landau equation. *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.* **17** (1977), 241–246.
- [3] A.V. Bobylev, I.F. Potapenko et V.A. Chuyanov, Kinetic equations of the Landau type as a model of the Boltzmann equation and completely conservative difference schemes. *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.* **20** (1981), 190–201.
- [4] A.V. Bobylev, Exact solutions of the Boltzmann equation. *Sov. Phys. Dokl.* **20** (1976), 822–824.
- [5] A.V. Bobylev et V.V. Vedenyapin, The Fourier transform of Boltzmann and Landau collision integrals. *Akad. Nauk SSSR Inst. Prikl. Mat. Preprint* **125** (1981) (Russian).
- [6] A.V. Bobylev et K. Nanbu, Theory of collision algorithms for gases and plasmas based on the Boltzmann equation and the Landau-Fokker-Planck equation. *Physical Review E* **61** (2000), 4576–4586.
- [7] C. Buet, S. Cordier, P. Degond et M. Lemou, Fast algorithms for numerical conservative and entropy approximations of the Fokker-Planck equation. *J. Comp. Phys.* **133** (1997), 310–322.
- [8] C. Buet et S. Cordier, Numerical analysis of conservative and entropy schemes for the Fokker-Planck-Landau equation. *SIAM J. Numer. Anal.* **36** (1999), 953–973.
- [9] C. Buet et S. Cordier, Conservative and entropy decaying numerical schemes for the isotropic Fokker-Planck-Landau equation. *J. Comp. Phys.* **145** (1988), 228–245.
- [10] C. Cercignani, R. Illner et M. Pulvirenti, The mathematical theory of dilute gases. *Springer-Verlag, New York*, (1994).
- [11] P. Degond et B. Lucquin-Desreux, An entropy scheme for the Fokker-Planck collision of plasma kinetic theory. *Num. Math.* **68** (1994), 239–262.
- [12] P. Degond et B. Lucquin-Desreux, The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* **2** (1992), 167–182.
- [13] L. Desvillettes, On asymptotics of the Boltzmann equation when collisions become grazing. *Transport Theory Statist. Phys.* **21** (1992), 259–276.
- [14] F. Filbet et L. Pareschi, A numerical method for the accurate solution of the fokker-Planck-Landau equation in the non homogeneous case. *Soumis à J. Comp. Phys.*

- [15] V.I. Lebedev, Explicit difference schemes with time variable steps for the solution of stiff system of equations. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Model.* **4** (1989), 111–135.
- [16] M. Lemou, Multipole expansions for the Fokker-Planck-Landau operator. *Num. Math.* **68** (1998), 597–618.
- [17] M. Lemou, Opérateur de Fokker-Planck-Landau axisymétrique, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **68** (1998), 597–618.
- [18] A.A. Medovikov, High order explicit methods for parabolic equations *BIT* **38** (1998), 372–390.
- [19] K. Nanbu et S. Yonemura, Weighted particles in Coulomb collision simulations based on the theory of a cumulative scattering angle. *J. Comp. Phys.* **145** (1998), 639–654.
- [20] L. Pareschi, G. Russo et G. Toscani, Méthode spectrale pour l'équation de Fokker-Planck-Landau. *C.R.A.S. de Paris Sér.I Math.* **330** (2000), 517–522.
- [21] L. Pareschi et G. Russo, Numerical solution of the Boltzmann equation I: Spectrally accurate approximation of the collision operator. *SIAM J. Numer. Anal.* **37** (2000), 1217–1275.
- [22] L. Pareschi, G. Russo et G. Toscani, Fast spectral methods for the Fokker-Planck-Landau collision operator. *J. Comp Phys.* **165** (2000), 216–236.
- [23] M.S. Pekker et V.N. Khudik, Conservative difference schemes for the Fokker-Planck equation. *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.* **24** (1984), 206–210.
- [24] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni et A.T. Zang, Spectral methods in fluid dynamics. *Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, New York* (1988).
- [25] M.N. Rosenbluth, W. Macdonald et D.L. Judd, Fokker-Planck equation for an inverse-square force. *Phys. Rev. II* **107** (1957), 1–6.
- [26] C. Villani, Contribution à l'étude mathématique des équations de Boltzmann et Landau en théorie cinétique des gaz et plasmas. *Thèse de l'Université de Paris-Dauphine* (1998).
- [27] C. Villani, On the Cauchy problem for Landau equations: Sequential stability, global existence. *J. Adv. Differ. Equ.* **1** (1996), 793–816.
- [28] C. Villani, A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *Handbook of Fluid Mechanics*, S. Frielander and D. Serre, Editors, (à paraître).

Chapter 6

Existence de solutions pour Vlasov-Darwin.

6.1 Introduction.

Le modèle de Darwin a été présenté par le physicien C. G. Darwin dans la revue *Philosophical Magazine* dans un article intitulé “*The dynamical motion of particles*” [8]. Ce système est une approximation des équations de Maxwell écrites sous la forme d’un Lagrangien avec un potentiel retardé, lorsque la vitesse des particules est petite devant la vitesse de la lumière, mais pas négligeable. Nous pouvons aussi obtenir le modèle de Darwin à partir des équations de Maxwell écrites sous la forme habituelle. Nous rappelons d’abord le système de Maxwell pour une densité de charge ρ et une densité de courant j données; les champs électrique E et magnétique B vérifient

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -\mu_0 j, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \quad (6.3)$$

où ϵ_0 représente la permittivité du vide, c la vitesse de la lumière et μ_0 la perméabilité du vide, laquelle est reliée à ϵ_0 et c par la relation $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$.

Pour obtenir le modèle de Darwin à partir des équations de Maxwell, il est nécessaire de décomposer le champ électrique en deux parties : une partie longitudinale ou irrotationnelle, c’est-à-dire à rotationnel nul, qui sera notée E_L et une partie transverse ou solénoïdale, c’est-à-dire à divergence nulle, notée E_T

$$E(t, x) = E_L(t, x) + E_T(t, x), \quad \nabla \times E_L = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot E_T = 0.$$

L’approximation de Darwin consiste alors à négliger les variations en temps de la partie transverse devant les variations de la composante longitudinale. Ainsi, l’équation

d'Ampère du système de Maxwell devient

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_L}{\partial t} - \nabla \times B = -\mu_0 j, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3. \quad (6.3)$$

D'un point de vue mathématique, cette approximation change la structure hyperbolique des équations de Maxwell, en effet le système approché est elliptique. Puisque d'une part $\nabla \times E_L = 0$, il existe une fonction scalaire ϕ (dès que E_L est suffisamment régulier), telle que $E_L = -\nabla\phi$. D'autre part, $\nabla \cdot E_T = 0$, alors l'équation $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$ du système de Maxwell peut être remplacée par

$$E_L = -\nabla\phi \quad \text{et} \quad -\Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Ensuite, en prenant le rotationnel de l'équation (6.1), il vient

$$\nabla \times \nabla \times B = \mu_0 \nabla \times j$$

et puisque $\nabla \cdot B = 0$, le champ magnétique satisfait l'équation suivante

$$-\Delta B = \mu_0 \nabla \times j.$$

Enfin, compte tenu de la loi de Faraday (6.2), nous établissons l'équation vérifiée par le champ transverse E_T

$$-\Delta E_T = \nabla \times \nabla \times E_T = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times B = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_L}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial j}{\partial t}.$$

L'utilisation du modèle de Darwin se justifie aussi du point de vue de la simulation numérique. En effet, la discrétisation du système hyperbolique de Maxwell entraîne des problèmes liés d'une part à la condition CFL et d'autre part au transport des erreurs numériques lorsque le maillage est trop grossier. La discrétisation des équations de Darwin sous sa forme elliptique semble être plus stable numériquement, puisque la condition de stabilité disparaît et la dissipation est contenue dans les équations. Des schémas numériques discrétisant le système de Darwin ont été implantés et semblent donner des résultats satisfaisants (voir par exemple [24]). Ce modèle présente également un "avantage" sur le modèle électrostatique, où la seule équation de Poisson est considérée, car il prend en compte les effets induits par les champs magnétiques.

Lorsque l'on souhaite décrire l'évolution d'un plasma non collisionnel, il faut coupler les équations des champs avec l'équation de Vlasov relativiste

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(\xi) \cdot \nabla_x f + q(E(t, x) + v(\xi) \times B(t, x)) \cdot \nabla_\xi f = 0,$$

où f représente la fonction distribution d'une espèce de particule (ions, électrons,...) et q la charge d'une particule. La variable ξ désigne l'impulsion et $v(\xi)$ est la vitesse relativiste des particules

$$v(\xi) = \frac{\xi/m}{\sqrt{1 + |\xi|^2/m^2 c^2}}.$$

où m représente la masse d'une particule. Ainsi, les densités de charge ρ et de courant j , nécessaires pour la résolution des équations de Maxwell ou de Darwin, sont calculées à partir de la fonction de distribution solution de l'équation de Vlasov

$$\rho(t, x) = 4\pi q \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) d\xi, \quad j(t, x) = 4\pi q \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) f(t, x, \xi) d\xi.$$

Le couplage des équations des champs et de l'équation de Vlasov donne un système non linéaire quadratique en f . Le problème de l'existence de solutions faibles et classiques pour le modèle simplifié de Vlasov-Poisson est bien compris dans la plupart des cas [3, 18, 21, 23]. La question de l'unicité est résolue pour les solutions classiques et en partie pour les solutions faibles. Nous mentionnons par exemple le résultat d'unicité de R. Robert pour les solutions faibles à support compact [22] et celui de P.-L. Lions et B. Perthame pour les solutions fortes avec une condition sur l'expansion du support [20]. Concernant le système de Vlasov-Maxwell, R. Glassey et J. Schaeffer ont traité le cas des solutions classiques en dimension $1D^{1/2}$ et $2D^{1/2}$, mais le problème en dimension trois n'est que partiellement résolu [10, 2, 14]. Pour les solutions faibles, R. DiPerna et P.-L. Lions ont donné un résultat d'existence de solutions pour le système de Vlasov-Maxwell classique lorsque la donnée initiale f_0 appartient à $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)$ et a une énergie finie (non relativiste)

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0 |v|^2 dx dv + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E(0)|^2 + |B(0)|^2 dx < +\infty. \quad (6.3)$$

Ce résultat est particulièrement intéressant puisqu'il n'utilise que les estimations naturelles sur la solution.

Pour le système de Darwin linéaire, P. Degond et P.-A. Raviart ont montré l'existence et l'unicité d'une solution lorsque les densités de charge ρ et de courant j sont suffisamment régulières [11]. Mais, le problème d'existence de solutions du système de Vlasov-Darwin n'a fait l'objet d'aucune étude. La technique mise au point par R. DiPerna et P.-L. Lions pour les systèmes de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell ne s'applique pas directement au système de Vlasov-Darwin. En effet, l'estimation naturelle de l'énergie pour le système de Vlasov-Darwin ne fournit aucune information sur la composante transverse du champ électrique E_T .

Dans cette partie, nous traitons le modèle de Vlasov-Darwin et prouvons l'existence de solutions faibles sous une condition de petitesse sur la donnée initiale.

Nous présentons également un résultat de convergence de la solution du modèle de Vlasov-Darwin vers la solution du système électrostatique de Vlasov-Poisson, lorsque la vitesse des particules est négligeable devant la vitesse de la lumière.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans un premier temps, nous précisons l'adimensionnement du système de Vlasov-Darwin en vue du résultat de convergence. Ensuite, nous donnons les estimations *a priori* naturelles sur les champs E_L et B dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}_t^+, L^2(\mathbb{R}_x^3))$, puis sur les moments en ξ de f . Sous une condition de petitesse sur l'énergie et la taille de la donnée initiale, nous établissons l'existence d'une

borne sur le champ électrique transverse E_T dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}_t^+, L_{loc}^2(\mathbb{R}_x^3))$. Puis, nous étudions un problème régularisé et le passage à la limite qui permet d'obtenir l'existence d'une solution faible pour Vlasov-Darwin. Dans la dernière partie, nous montrons que lorsque le ratio de la vitesse des particules sur la vitesse de la lumière tend vers zéro, le système de Vlasov-Darwin peut être remplacé par le modèle simplifié de Vlasov-Poisson.

6.2 Adimensionnement des équations de Vlasov-Darwin.

Pour distinguer les fonctions scalaires et à valeurs vectorielles, nous introduisons la notation :

$$\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^3) = (L^p(\mathbb{R}^3))^3, \quad p \geq 1.$$

Compte tenu des observations de la partie précédente, l'équation de Vlasov relativiste s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(\xi) \cdot \nabla_x f + q (E + v(\xi) \times B) \cdot \nabla_\xi f = 0,$$

couplée avec le système de Darwin pour le calcul des champs (E, B)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_L}{\partial t} - \nabla \times B = -\mu_0 j, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E_T = 0, \\ \nabla \cdot E_L = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot B = 0, \\ E = E_T + E_L \text{ et } \quad \nabla \cdot E_T = 0, \quad \nabla \times E_L = 0, \end{array} \right.$$

où les inconnues sont (f, E_L, E_T, B) .

Dans le but d'étudier la convergence de la solution du modèle de Vlasov-Darwin, lorsque la vitesse des particules devient petite par rapport à la vitesse de la lumière, nous réalisons un adimensionnement des équations basé sur les échelles caractéristiques :

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \text{longueur caractéristique de l'espace physique,} \\ \bar{t} &= \text{temps caractéristique,} \\ \bar{\xi} &= \text{impulsion caractéristique,} \\ \bar{v} &= \text{vitesse caractéristique,} \\ \bar{\rho}, \bar{j} &= \text{densités de charge et de courant caractéristiques,} \\ \bar{E}, \bar{B} &= \text{champs électrique et magnétique caractéristiques,} \\ \bar{f} &= \text{fonction distribution caractéristique.} \end{aligned}$$

Les inconnues s'expriment alors en fonction des valeurs caractéristiques, par exemple

$$f = f' \bar{f}, \quad E = E' \bar{E}, \quad B = B' \bar{B}.$$

Pour alléger les notations nous notons encore f' par f , E' par E , etc. Les équations de Vlasov-Darwin s'écrivent alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\bar{v} \bar{t}}{\bar{L}} v(\xi) \cdot \nabla_x f + q \bar{B} \bar{t} \left(\frac{c}{\bar{\xi}} \frac{\bar{E}}{c \bar{B}} E + \frac{\bar{v}}{\bar{\xi}} v(\xi) \times B \right) \cdot \nabla_\xi f = 0,$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\bar{L}}{c \bar{t}} \frac{\bar{E}}{c \bar{B}} \frac{\partial E_L}{\partial t} - \nabla \times B = - \frac{\bar{j} \bar{L}}{\bar{B}} \mu_0 j, \\ \frac{\bar{L}}{c \bar{t}} \frac{c \bar{B}}{\bar{E}} \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E_T = 0, \\ \epsilon_0 \frac{\bar{E}}{\bar{L} \bar{\rho}} \nabla \cdot E_L = \rho, \end{cases}$$

où

$$v(\xi) = \frac{\bar{\xi}}{m \bar{v}} \frac{\xi}{\sqrt{1 + \bar{\xi}^2 |\xi|^2 / m^2 c^2}}$$

et l'équation de continuité devient

$$\frac{\bar{\rho} \bar{L}}{\bar{j} \bar{t}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0.$$

Notons par ε le ration de la vitesse caractéristique des particules sur la vitesse de la lumière, nous avons

$$\varepsilon = \frac{\bar{v}}{c}, \quad \frac{\bar{L}}{\bar{t}} = \bar{v}, \quad \frac{\bar{\xi}}{m \bar{v}} = 1, \quad \frac{c \bar{B}}{\bar{E}} = 1, \quad \bar{j} = \bar{v} \bar{\rho}, \quad \epsilon_0 \frac{\bar{E}}{\bar{L} \bar{\rho}} = 1 \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{q}{m} \bar{B}.$$

La quantité ω_c s'appelle la fréquence cyclotronique et nous la supposons de l'ordre de ε/\bar{t} . L'équation de Vlasov adimensionnée est alors donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(\xi) \cdot \nabla_x f + (E(t, x) + \varepsilon v(\xi) \times B(t, x)) \cdot \nabla_\xi f = 0, \quad (6.-7)$$

où la vitesse relativiste est donnée par

$$v(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\xi|^2}} \quad (6.-7)$$

et les champs électromagnétiques vérifient le modèle de Darwin adimensionné

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial E_L}{\partial t} - \nabla \times B = -\varepsilon j, \\ \varepsilon \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E_T = 0, \\ \nabla \cdot E_L = \rho, \quad \nabla \cdot B = 0, \\ E = E_T + E_L \text{ et } \nabla \cdot E_T = 0, \quad \nabla \times E_L = 0 \end{array} \right. \quad (6.-6)$$

Les densités de charge ρ et de courant j sont calculées à partir de la fonction de distribution f

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) d\xi, \quad j(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) f(t, x, \xi) d\xi.$$

Enfin au temps $t = 0$, la fonction de distribution est donnée par une fonction f_0

$$f(t = 0, x, \xi) = f_0(x, \xi), \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \quad (6.-6)$$

Dans la suite nous montrons que le système de Vlasov-Darwin adimensionné admet une solution faible sous une condition de petitesse sur la donnée initiale. La fonction de distribution $f(t, x, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^6))$ et satisfait au sens des distributions l'équation de Vlasov (6.-7). Les densités de charge ρ et de courant j sont telles que

$$\rho, \quad j \in L^\infty(\mathbb{R}_t^+; L^{4/3}(\mathbb{R}_x^3)).$$

Les champs E_T, E_L, B vérifient au sens des distributions les équations de Darwin (6.-6) avec

$$(E_T, E_L, B) \in L^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6(\mathbb{R}_x^3)) \times L^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_x^3)) \times L^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_x^3)).$$

Dans la suite, nous noterons

$$\gamma(\xi) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\xi|^2}. \quad (6.-6)$$

Théorème 6.1 Soit f_0 une fonction positive, appartenant à $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\gamma(\xi) - 1}{\varepsilon^2} f_0 dx d\xi < +\infty, \quad \frac{x}{|x|^3} * \int_{\mathbb{R}^3} f_0(x, \xi) d\xi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_x^3),$$

De plus, nous posons

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_2 + \varepsilon \mathcal{A}_1^{2/3} \mathcal{A}_2^{1/3}$$

où \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont donnés par

$$\mathcal{A}_1 = \|f_0\|_{L^1} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2 = \|f_0\|_{L^\infty}^{1/2} (\|f_0\|_{L^1} + \varepsilon^2 \mathcal{E}(0))^{1/2},$$

où

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\gamma(\xi) - 1}{\varepsilon^2} f(t) dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E_L(t)|^2 + |B(t)|^2 dx.$$

Supposons qu'il existe une constante $\sigma > 0$, indépendante de f_0 , $E_L(0)$ et $B(0)$, telle que

$$\sigma \varepsilon^{1/2} \mathcal{A}_0 < 1,$$

Alors, le système de Vlasov-Darwin (6.-7)-(6.-6) admet une solution faible.

La preuve de ce théorème sera faite en plusieurs étapes : nous recherchons d'abord des estimations *a priori* sur la fonction de distribution f et les champs électriques E_T et E_L et magnétique B . Nous étudions ensuite un problème régularisé pour lequel nous montrons l'existence d'une solution globale régulière. Puis par passage à la limite dans le problème régularisé, nous prouvons que le système de Vlasov-Darwin admet bien une solution faible.

6.3 Estimations a priori.

Dans cette partie, nous noterons par $C(f_0, \varepsilon)$, les constantes ne dépendant que de la donnée initiale f_0 et de ε . Puis, par $C(f_0)$, les constantes ne dépendant que de la donnée initiale f_0 .

La première estimation *a priori* est la préservation de la positivité de la fonction de distribution f et la conservation des normes L^p , c'est-à-dire pour toute fonction convexe $\Phi \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \Phi(f(t, x, \xi)) dx d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \Phi(f_0(x, \xi)) dx d\xi. \quad (6.-7)$$

Nous établissons ensuite la conservation de l'énergie.

Proposition 6.1 *Soit (f, E_T, E_L, B) une solution régulière du système de Vlasov-Darwin. Alors, l'énergie totale, qui s'écrit*

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\gamma(\xi) - 1}{\varepsilon^2} f(t) dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E_L(t)|^2 + |B(t)|^2 dx, \quad (6.-7)$$

est conservée au cours du temps.

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{|\xi| \leq 1/\varepsilon} f(t) |\xi|^2 d\xi dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{|\xi| > 1/\varepsilon} f(t) |\xi| d\xi dx \leq (1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(t). \quad (6.-7)$$

Preuve : compte tenu des définitions de $\gamma(\xi)$ donné par (6.2) et de $v(\xi)$ introduit dans (6.2), nous avons

$$\nabla_{\xi} \gamma(\xi) = \frac{\varepsilon^2 \xi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\xi|^2}} = \varepsilon^2 v(\xi).$$

Nous multiplions l'équation de Vlasov (6.-7) par $\gamma(\xi)$ et intégrons en (x, ξ) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \gamma(\xi) f \, d\xi \, dx - \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \varepsilon^2 v(\xi) \cdot (E_T + E_L) f \, d\xi \, dx = 0.$$

Ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \gamma(\xi) f \, d\xi \, dx - \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3} j \cdot (E_T + E_L) \, dx = 0. \quad (6.-7)$$

Ensuite, nous considérons les équations de Darwin (6.-6), multiplions la première équation par $\varepsilon(E_T + E_L)$ et la deuxième par εB et intégrons sur \mathbb{R}_x^3 :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |E_L|^2 \, dx - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times B \cdot (E_T + E_L) \, dx &= -\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3} j \cdot (E_T + E_L) \, dx, \\ \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |B|^2 \, dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times E_T \cdot B \, dx &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, en additionnant ces deux égalités, nous obtenons

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |E_L|^2 \, dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |B|^2 \, dx = -\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3} j \cdot (E_T + E_L) \, dx. \quad (6.-9)$$

Alors, les égalités (6.3) et (6.-9) impliquent la conservation au cours du temps de la quantité suivante

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\gamma(\xi)}{\varepsilon^2} f \, d\xi \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |B|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E_L|^2 \, dx.$$

Enfin, la conservation de la masse totale donne la conservation de l'énergie :

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\gamma(\xi) - 1}{\varepsilon^2} f \, d\xi \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |B|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E_L|^2 \, dx.$$

Pour montrer l'inégalité (6.1), il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \frac{|\xi|^2}{\max(1, \varepsilon |\xi|)} \leq \frac{|\xi|^2}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\xi|^2}} = \frac{\gamma(\xi) - 1}{\varepsilon^2} \leq |\xi|^2.$$

□

Corollaire 6.1 *Nous supposons que la donnée initiale f_0 est positive et telle qu'il existe une constante $C(f_0, \varepsilon)$ strictement positive vérifiant*

$$f_0 \in L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^6), \quad \int_{\mathbb{R}^6} f_0 \gamma(\xi) d\xi dx + \int_{\mathbb{R}^3} |E_L(0)|^2 + |B(0)|^2 dx \leq C(f_0, \varepsilon). \quad (6.-9)$$

Alors,

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\gamma(\xi) - 1}{\varepsilon^2} f_0 dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|E_L(0)|^2 + |B(0)|^2) dx \leq C(f_0, \varepsilon).$$

Nous donnons maintenant un deuxième Corollaire qui établit une borne sur (f, E_L, B) uniforme par rapport à ε .

Corollaire 6.2 *Nous supposons que la donnée initiale f_0 est positive et telle qu'il existe une constante $C(f_0)$ strictement positive vérifiant*

$$f_0 \in L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^6), \quad \int_{\mathbb{R}^6} f_0 |\xi|^2 d\xi dx + \int_{\mathbb{R}^3} |E_L(0)|^2 + |B(0)|^2 dx \leq C(f_0). \quad (6.-9)$$

Alors, l'énergie $\mathcal{E}(t)$ est uniformément bornée par rapport à ε et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{|\xi| \leq 1/\varepsilon} f(t) |\xi|^2 d\xi dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{|\xi| > 1/\varepsilon} f(t) |\xi| d\xi dx \leq (1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(t) \leq C(f_0).$$

L'estimation de l'énergie donne à la fois des estimations sur les champs (E_L, B) et sur les moments en ξ de la fonction de distribution. Ceci permettra d'obtenir des estimations sur les densités ρ et j .

Nous rappelons maintenant un lemme d'interpolation classique qui nous sera utile tout au long de ce chapitre [6].

Lemme 6.1 *Si la fonction de distribution satisfait*

$$f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^6), \quad \int_{\mathbb{R}^3} f |\xi|^m d\xi \in L^1(\mathbb{R}^3), \quad m \geq 0.$$

Alors, il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{L^{1+m/3}} &\leq C \|f\|_{L^\infty}^{m/(m+3)} \left(\int_{\mathbb{R}^6} |\xi|^m f dx d\xi \right)^{3/(3+m)}, \\ \varepsilon \|j\|_{L^{1+m/3}} &\leq C \|f\|_{L^\infty}^{m/(m+3)} \left(\int_{\mathbb{R}^6} |\xi|^m f dx d\xi \right)^{3/(3+m)}. \end{aligned}$$

Preuve : nous observons d'abord que les densités $\rho(t)$ et $\varepsilon j(t)$ sont homogènes par rapport à la variable ξ , puisque $\varepsilon |v(\xi)| \leq 1$, nous avons effectivement $|\varepsilon j| \leq \rho$. Ainsi, il suffit d'estimer $\rho(x)$:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x, \xi) d\xi = \int_{|\xi| \leq R} f(x, \xi) d\xi + \int_{|\xi| > R} f(x, \xi) d\xi \\ &\leq C R^3 \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{R^m} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^m f(x, \xi) d\xi, \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de trouver le rayon R pour lequel cette inégalité est optimale. Nous posons alors $a = C \|f\|_{L^\infty}$ et $b = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^m f(x, \xi) d\xi$ et minimisons

$$\psi(r) = a r^3 + b \frac{1}{r^m}.$$

Le minimum de ψ est atteint pour la valeur $r = \left[\frac{m}{3} \frac{b}{a}\right]^{1/(m+3)}$, ce qui donne l'inégalité optimale

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, \xi) d\xi \leq C \|f\|_{L^\infty}^{m/(m+3)} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^m f(x, \xi) d\xi \right)^{3/(m+3)}.$$

□

Pour le système de Vlasov-Darwin, l'estimation de l'énergie permet d'obtenir une majoration des moments en ξ de f . Ces estimations donnent plus de régularité sur les densités de charge $\rho(t)$ et de courant $j(t)$ dans les espaces $L^p(\mathbb{R}_x^3)$, pour p strictement supérieur à un.

Proposition 6.2 *Sous l'hypothèse (6.1) ou (6.2), les densités de charge et de courant satisfont*

$$\|\rho(t)\|_{L^{4/3}} + \varepsilon \|j(t)\|_{\mathbb{L}^{4/3}} \leq C \|f_0\|_{L^\infty}^{1/4} (\|f_0\|_{L^1} + \mathcal{E}(0))^{3/4}, \quad (6.-13)$$

$$\|j(t)\|_{\mathbb{L}^1} \leq C (\|f_0\|_{L^1} + \mathcal{E}(0)). \quad (6.-12)$$

Preuve : nous montrons d'abord que le premier moment en ξ de f est borné dans $L^1(\mathbb{R}_x^3)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi| f(t, x, \xi) d\xi &= \int_{|\xi| \leq \frac{1}{\varepsilon}} |\xi| f(t, x, \xi) d\xi + \int_{|\xi| > \frac{1}{\varepsilon}} |\xi| f(t, x, \xi) d\xi, \\ &\leq \int_{|\xi| \leq \frac{1}{\varepsilon}} (1 + |\xi|^2) f(t, x, \xi) d\xi + \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{|\xi| > \frac{1}{\varepsilon}} |\xi| f(t, x, \xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant en x , il vient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^6} |\xi| f(t, x, \xi) dx d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^6} f(t, x, \xi) d\xi dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{|\xi| \leq \frac{1}{\varepsilon}} |\xi|^2 f(t, x, \xi) d\xi dx \\ &+ \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{|\xi| > \frac{1}{\varepsilon}} |\xi| f(t, x, \xi) d\xi dx \right). \end{aligned}$$

Enfin, en appliquant le résultat de la Proposition 6.1 sur la conservation de l'énergie et la conservation de la moyenne, nous établissons

$$\int_{\mathbb{R}^6} |\xi| f(t, x, \xi) dx d\xi \leq \|f_0\|_{L^1} + (1 + \varepsilon)(1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(0).$$

Ce qui montre que le premier moment en ξ de f est borné dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$.

Ensuite, nous appliquons le lemme d'interpolation (Lemme 6.1) pour $m = 1$ et montrons le résultat

$$\begin{aligned} \|\rho(t)\|_{L^{4/3}}, \quad \varepsilon \|j(t)\|_{\mathcal{L}^{4/3}} &\leq C \|f(t)\|_{L^\infty}^{1/4} \left(\int_{\mathbb{R}^6} |\xi| f(t, x, \xi) d\xi dx \right)^{3/4}, \\ &\leq C \|f(t)\|_{L^\infty}^{1/4} \left(\|f_0\|_{L^1} + (1 + \varepsilon)(1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(0) \right)^{3/4}. \end{aligned}$$

Pour conclure la preuve, nous estimons $j(t)$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_x^3)$:

$$|j(t, x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\xi|^2}} f(t, x, \xi) d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi| f(t, x, \xi) d\xi.$$

Ainsi,

$$\|j(t)\|_{\mathcal{L}^1} \leq \int_{\mathbb{R}^6} |\xi| f(t, x, \xi) d\xi dx \leq \left(\|f_0\|_{L^1} + (1 + \varepsilon)(1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(0) \right).$$

□

Estimations sur le champ E_T .

L'estimation de l'énergie (6.1) ne fournit aucune information sur la composante transverse du champ électrique E_T . À partir du système de Darwin, nous dérivons l'équation suivante sur E_T

$$-\Delta E_T + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 E_L}{\partial t^2} = -\varepsilon^2 \frac{\partial j}{\partial t}. \quad (6.-21)$$

Ensuite, l'équation de Vlasov (6.-7) permet d'exprimer $\frac{\partial j}{\partial t}$, lequel dépend implicitement de E_T ,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial j}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) \otimes v(\xi) \nabla_x f d\xi \\ &- \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} (Id - \varepsilon^2 v(\xi) \otimes v(\xi)) (E_L + E_T + \varepsilon v(\xi) \times B) f d\xi, \end{aligned}$$

où

$$v(\xi) \otimes v(\xi) = (v_i(\xi) v_j(\xi))_{1 \leq i, j \leq 3}$$

puisque

$$\partial_j v_i(\xi) = \frac{1}{(1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{1/2}} (\delta_{i,j} - \varepsilon^2 v_i(\xi) v_j(\xi)).$$

Étant donné que le terme source $\frac{\partial j}{\partial t}$ de l'équation (6.3) n'est pas suffisamment régulier, nous ne pouvons pas appliquer une méthode variationnelle classique pour établir une estimation sur E_T . Notre démonstration est donc basée sur une technique de dualité. Pour ce faire, nous avons besoin d'imposer une condition de petitesse sur la donnée initiale. Afin d'introduire cette condition, posons

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_2 + \varepsilon \mathcal{A}_1^{2/3} \mathcal{A}_2^{1/3}, \quad (6.-23)$$

où \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont donnés par

$$\mathcal{A}_1 = \|f_0\|_{L^1} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2 = \|f_0\|_{L^\infty}^{1/2} (\|f_0\|_{L^1} + \varepsilon^2 \mathcal{E}(0))^{1/2}. \quad (6.-22)$$

Le résultat suivant donne une estimation sur le champ électrique transverse E_T sous une condition de petitesse sur \mathcal{A}_0 .

Proposition 6.3 *Nous supposons qu'il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de la donnée initiale, telle que*

$$\sigma \varepsilon^{1/2} C \mathcal{A}_0 < 1. \quad (6.-22)$$

Alors, il existe une constante $C(f_0, \sigma)$ strictement positive, telle que

$$\|E_T(t)\|_{\mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6} \leq C(f_0, \sigma) \varepsilon^{1/2},$$

où l'espace fonctionnel $\mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6$ est muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6}$ définie par

$$\|E_T\|_{\mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6} = \inf \{ \|a\|_{\mathbb{L}^2} + \|b\|_{\mathbb{L}^6}, \quad E_T = a + b, \quad a \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), \quad b \in \mathbb{L}^6(\mathbb{R}^3) \}.$$

Nous montrons d'abord des lemmes intermédiaires pour préparer la démonstration. Commençons par le Lemme de Mih'lin qui concerne l'équation de Poisson.

Lemme 6.2 *Soit $p \in]1, +\infty[$, $a \in C^3(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ telle que*

$$\exists C > 0, \quad |s|^{|\alpha|} |D^\alpha a(s)| \leq C,$$

où α est un multi entier tel que $|\alpha| \leq 3$. Alors, l'opérateur linéaire $g \rightarrow \mathcal{F}^{-1} a \mathcal{F} g$ est continu de L^p dans L^p , où \mathcal{F} représente la Transformation de Fourier.

En appliquant ce Lemme à l'équation de Poisson, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 6.3 Soit $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$, avec $1 < p < +\infty$, considérons l'équation de Poisson,

$$-\Delta u = D_k g,$$

où $D_k g$ indique la première dérivée partielle de g selon la k -ème composante. Alors,

$$\|D_j u\|_{L^p} = \|\mathcal{F}^{-1} \frac{y_j y_k}{|y|^2} \mathcal{F} g\|_{L^p} \leq C_0 \|g\|_{L^p},$$

où y_k désigne le k -ème coefficient de Fourier.

Pour la preuve du résultat, nous renvoyons par exemple à [15] ou [16].

Lemme 6.3 Soit $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{L}^{6/5}(\mathbb{R}^3)$. Alors, la fonction g peut être décomposée de manière unique dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ par

$$g = g_T + g_L, \quad g_T, g_L \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), \quad \nabla \times g_L = 0, \quad \nabla \cdot g_T = 0.$$

De plus, nous avons $g_T, g_L \in \mathbb{L}^{6/5}(\mathbb{R}^3)$ et il existe une constante C ne dépendant pas de g telle que

$$\|g_T\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \leq C \|g\|_{\mathbb{L}^{6/5}}, \quad \|g_T\|_{\mathbb{L}^2} \leq C \|g\|_{\mathbb{L}^2}.$$

Preuve : puisque la fonction g appartient à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$, nous pouvons appliquer la décomposition de Hodge [5] : la fonction g peut donc s'écrire comme la somme directe de g_T et de g_L avec

$$g = g_T + g_L, \quad g_T, g_L \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), \quad \nabla \times g_L = 0, \quad \nabla \cdot g_T = 0.$$

Puisque g_T vérifie $\nabla \cdot g_T = 0$, il existe une unique fonction $\psi_g \in Y$ telle que $g_T = \nabla \times \psi_g$ et l'espace Y est défini par la complétion de

$$\left\{ u \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^3))^3; \quad \nabla \cdot u = 0 \right\}, \quad (6.-22)$$

pour la norme du gradient $u \rightarrow \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}$ (voir par exemple [9, Chapitre IX] ou [5]). De plus, ψ_g est solution de l'équation suivante au sens des distributions

$$-\Delta \psi_g = \nabla \times g.$$

En appliquant le Lemme de Lax-Milgram, nous montrons que ce problème admet une solution unique $\psi_g \in Y$. De plus, nous savons que $g \in \mathbb{L}^{6/5}(\mathbb{R}^3)$, alors en appliquant le Corollaire 6.3, nous établissons l'existence d'une constante $C > 0$, telle que

$$\nabla \psi_g \in (\mathbb{L}^{6/5}(\mathbb{R}^3))^3, \quad \|\nabla \psi_g\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \leq C \|g\|_{\mathbb{L}^{6/5}}.$$

Ainsi,

$$\|g_T\|_{\mathbb{L}^{6/5}} = \|\nabla \times \psi_g\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \leq C \|\nabla \psi_g\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \leq C \|g\|_{\mathbb{L}^{6/5}}.$$

Nous déduisons alors que $g_L = g - g_T \in \mathbb{L}^{6/5}(\mathbb{R}^3)$. Ce qui conclut la démonstration.

□

Lemme 6.4 Soit $g_T \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{L}^{6/5}(\mathbb{R}^3)$, tel que $\nabla \cdot g_T = 0$. Alors, le problème

$$-\Delta \psi = g_T \quad \text{et} \quad \psi \in Y \quad (6.-22)$$

admet une solution unique dans l'espace Y défini par (6.3). De plus, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de g_T , telle que

$$\|\psi\|_{\mathbb{L}^\infty} + \|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^6} \leq C \max \{ \|g_T\|_{\mathbb{L}^2}, \|g_T\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \}.$$

Preuve : la démonstration de l'existence et de l'unicité d'une solution de (6.4) se fait par une méthode variationnelle classique dans l'espace de Hilbert Y muni de la norme du gradient $u \rightarrow \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}$.

D'une part, à l'aide des inégalités de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, nous établissons [25]

$$\|\psi\|_{\mathbb{L}^6} \leq C \|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^2} \leq C \|D^2 \psi\|_{\mathbb{L}^{6/5}}. \quad (6.-22)$$

D'autre part, l'inégalité de Calderón-Zygmund appliquée à l'équation de Poisson donne, puisque $g_T \in \mathbb{L}^{6/5}(\mathbb{R}^3)$

$$\|D^2 \psi\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \leq C \|g_T\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \quad (6.-21)$$

et puisque $g_T \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$\|D^2 \psi\|_{\mathbb{L}^2} \leq C \|g_T\|_{\mathbb{L}^2} \quad (6.-20)$$

Ensuite, en rappelant que l'injection de l'espace $W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{L}^6(\mathbb{R}^3)$ est continue, nous montrons une estimation sur $\nabla \psi$ dans $\mathbb{L}^6(\mathbb{R}^3)$

$$\|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^6} \leq C (\|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^2} + \|D^2 \psi\|_{\mathbb{L}^2}). \quad (6.-20)$$

Alors, en regroupant les inégalités (6.3), (6.-21), (6.-20) et (6.3), nous obtenons la première estimation

$$\|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^6} \leq C (\|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^2} + \|D^2 \psi\|_{\mathbb{L}^2}) \leq C \max \{ \|g_T\|_{\mathbb{L}^2}, \|g_T\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \}. \quad (6.-20)$$

Ensuite, les inégalités (6.3) et (6.3) indiquent que ψ appartient à $W^{1,6}(\mathbb{R}^3)$, dont l'injection dans l'espace $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ est continue. Nous montrons donc

$$\|\psi\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq C (\|\psi\|_{\mathbb{L}^6} + \|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^6}) \leq C \max \{ \|g_T\|_{\mathbb{L}^2}, \|g_T\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \}. \quad (6.-20)$$

À partir des inégalités (6.3) et (6.3), nous concluons la démonstration

$$\|\psi\|_{\mathbb{L}^\infty} + \|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^6} \leq C \max \{ \|g_T\|_{\mathbb{L}^2}, \|g_T\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \}.$$

□

Lemme 6.5 Soit (f, E, B) une solution régulière du système de Vlasov-Darwin relativiste. Posons

$$\mathcal{M}_{-1}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} f(t, x, \xi) d\xi.$$

Alors, nous avons

$$\varepsilon^2 \|\mathcal{M}_{-1}(t)\|_{L^2} \leq \varepsilon^{1/2} C \|f_0\|_{L^\infty}^{1/2} (\|f_0\|_{L^1} + \varepsilon^2 \mathcal{E}(0))^{1/2}. \quad (6.-20)$$

Preuve : il suffit de considérer un réel $R > 0$ et de décomposer $\mathcal{M}_{-1}(t)$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} d\xi \\ &= \varepsilon^2 \int_{|\xi| \leq R} f(t, x, \xi) (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} d\xi + \varepsilon^2 \int_{|\xi| > R} f(t, x, \xi) (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} d\xi, \\ &\leq \varepsilon^2 \|f(t)\|_{L^\infty} \int_{|\xi| \leq R} (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} d\xi + \frac{1}{R^2} \int_{|\xi| > R} f(t, x, \xi) (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{1/2} d\xi. \end{aligned}$$

Puisque,

$$\varepsilon^2 \int_{|\xi| \leq R} (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} d\xi = |S^2| \int_0^R \frac{\varepsilon^2 r^2 dr}{(1 + \varepsilon^2 r^2)^{1/2}} \leq \frac{\varepsilon |S^2|}{2} R^2,$$

nous avons,

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} d\xi \\ &\leq \|f(t)\|_{L^\infty} \frac{\varepsilon |S^2|}{2} R^2 + \frac{1}{R^2} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{1/2} d\xi. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant

$$a = \frac{1}{2} \|f(t)\|_{L^\infty} |S^2| \varepsilon \quad \text{et} \quad b = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{1/2} d\xi,$$

nous minimisons la fonction $\varphi(r) = ar + b/r$ et obtenons

$$\varepsilon^2 \mathcal{M}_{-1}(t, x) \leq \varepsilon^{1/2} C \|f(t)\|_{L^\infty}^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{1/2} d\xi \right)^{1/2}.$$

Il reste donc à estimer l'intégrale du second membre. D'une part, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{1/2} d\xi \\ &= \int_{|\xi| \leq 1/\varepsilon} f(t, x, \xi) (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{1/2} d\xi + \int_{|\xi| > 1/\varepsilon} f(t, x, \xi) (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{1/2} d\xi \\ &\leq C \left(\rho(t, x) + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{|\xi| > 1/\varepsilon} |\xi| f(t, x, \xi) d\xi \right) \right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\|f(t)\|_{L^\infty} \leq \|f_0\|_{L^\infty}.$$

Ce qui permet d'estimer la norme L^2 de la quantité \mathcal{M}_{-1} , en appliquant le résultat de la Proposition 6.1 sur l'estimation de l'énergie,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|\mathcal{M}_{-1}(t)\|_{L^2} &\leq \varepsilon^{1/2} C \|f(t)\|_{L^\infty}^{1/2} (\|f(t)\|_{L^1} + \varepsilon^2 (\mathcal{E}(t)))^{1/2}, \\ &\leq \varepsilon^{1/2} C \|f_0\|_{L^\infty}^{1/2} (\|f_0\|_{L^1} + \varepsilon^2 \mathcal{E}(0))^{1/2} = \varepsilon^{1/2} \mathcal{A}_2. \end{aligned}$$

□

Nous présentons maintenant la démonstration de la Proposition 6.3. Compte tenu du peu d'information que nous possédons sur $\frac{\partial j}{\partial t}$, nous ne pouvons pas appliquer les méthodes variationnelles classiques pour obtenir une estimation sur le champ transverse E_T . Cette preuve est donc basée sur une méthode de dualité. Nous montrons une estimation sur le champ électrique transverse E_T en imposant une condition de petitesse sur la donnée initiale.

Preuve de la Proposition 6.3 : soit $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{L}^{6/5}(\mathbb{R}^3)$. D'une part, grâce au Lemme 6.3, la fonction g peut être décomposée suivant sa composante longitudinale et transverse

$$g = g_T + g_L, \quad \nabla \times g_L = 0, \quad \nabla \cdot g_T = 0.$$

D'autre part, grâce au Lemme 6.4, il existe une unique fonction $\psi \in Y$ solution du problème suivant

$$-\Delta \psi = g_T, \quad \psi \in Y. \quad (6.31)$$

Étant donné que les champs $E_L(t)$ et $B(t)$ appartiennent à l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_x^3)$ et $j(t)$ à l'espace $\mathbb{L}^{4/3}(\mathbb{R}_x^3)$ et compte tenu de l'équation donnant le champ électrique transverse E_T (6.3) et de (6.3), nous avons

$$\langle -\Delta E_T + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 E_L}{\partial t^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial j}{\partial t}, \psi \rangle = 0.$$

Les trois termes de ce produit de dualité donnent

$$\langle -\Delta E_T, \psi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^3} E_T \cdot \Delta \psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} E_T \cdot g_T \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} E_T \cdot g \, dx. \quad (6.31)$$

Puisque $\nabla \times E_L = 0$, nous avons $E_L = -\nabla \phi$ et $\nabla \cdot \psi = 0$, nous obtenons donc

$$\varepsilon^2 \langle \frac{\partial^2 E_L}{\partial t^2}, \psi \rangle = -\varepsilon^2 \langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \phi, \psi \rangle = \varepsilon^2 \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \nabla \cdot \psi \rangle = 0. \quad (6.31)$$

Il reste donc à estimer le produit de dualité suivant

$$\langle \varepsilon^2 \frac{\partial j}{\partial t}, \psi \rangle. \quad (6.31)$$

À partir de l'équation de Vlasov, nous pouvons calculer le terme $\frac{\partial j}{\partial t}$

$$-\frac{\partial j}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) (v(\xi) \cdot \nabla_x f) d\xi \quad (6.-30)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} (Id - \varepsilon^2 v(\xi) \otimes v(\xi)) (E_L + \varepsilon v(\xi) \times B) f d\xi, \quad (6.-29)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} (Id - \varepsilon^2 v(\xi) \otimes v(\xi)) E_T f d\xi. \quad (6.-28)$$

Cette estimation sera faite en plusieurs étapes.

Étape I. Nous commençons par estimer

$$\varepsilon^2 \langle \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) (v(\xi) \cdot \nabla_x f) d\xi, \psi \rangle.$$

Compte tenu des régularités de la densité de charge $\rho(t) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{L}^{4/3}(\mathbb{R}^3)$ et de la fonction $\psi \in W^{1,6}(\mathbb{R}^3)$ obtenue dans le Lemme 6.4, nous obtenons

$$\varepsilon^2 \langle \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) (v(\xi) \cdot \nabla_x f) d\xi, \psi \rangle = -\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) {}^t v(\xi) (\nabla \psi) v(\xi) dx d\xi. \quad (6.-29)$$

Posons alors

$$\mathcal{K}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) |v(\xi)|^2 d\xi.$$

À l'aide de l'inégalité de Hölder, il vient

$$\varepsilon^2 \left| \langle \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) (v(\xi) \cdot \nabla_x f) d\xi, \psi \rangle \right| \leq \varepsilon^2 C \|\mathcal{K}(t)\|_{L^{6/5}} \|\nabla \psi\|_{L^6}. \quad (6.-29)$$

Il faut donc estimer la norme $L^{6/5}(\mathbb{R}^3)$ de $\mathcal{K}(t, x)$. D'une part, nous avons

$$\varepsilon^2 \mathcal{K}(t, x) = \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) \frac{|\xi|^2}{(1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)} d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) d\xi,$$

ainsi,

$$\varepsilon^2 \|\mathcal{K}(t)\|_{L^{4/3}} \leq \|\rho(t)\|_{L^{4/3}}. \quad (6.-29)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \mathcal{K}(t, x) &= \varepsilon^2 \int_{|\xi| \leq 1/\varepsilon} f(t, x, \xi) |v(\xi)|^2 d\xi + \varepsilon^2 \int_{|\xi| > 1/\varepsilon} f(t, x, \xi) |v(\xi)|^2 d\xi, \\ &\leq \varepsilon^2 \int_{|\xi| \leq 1/\varepsilon} f(t, x, \xi) |\xi|^2 d\xi + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{|\xi| > 1/\varepsilon} f(t, x, \xi) |\xi| d\xi \right). \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité (6.1), nous avons alors

$$\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{K}(t, x) dx \leq \varepsilon^2 (1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(t). \quad (6.30)$$

Enfin, en utilisant une inégalité d'interpolation entre les espaces $L^1(\mathbb{R}^3)$ et $L^{4/3}(\mathbb{R}^3)$, puis les inégalités (6.-29) et (6.-30), nous concluons

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|\mathcal{K}(t)\|_{L^{6/5}} &\leq \|\varepsilon^2 \mathcal{K}(t)\|_{L^1}^{1/3} \|\varepsilon^2 \mathcal{K}(t)\|_{L^{4/3}}^{2/3} \\ &\leq \varepsilon^{2/3} \left((1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(t) \right)^{1/3} \|\rho(t)\|_{L^{4/3}}^{2/3}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

En regroupant les inégalités (6.3), (6.-29) et (6.-30), nous obtenons l'estimation suivante

$$|\varepsilon^2 \langle \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) (v(\xi) \cdot \nabla_x f) d\xi, \psi \rangle| \leq \varepsilon^{2/3} C (\mathcal{E}(t))^{1/3} \|\rho(t)\|_{L^{4/3}}^{2/3} \|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^6}. \quad (6.30)$$

Enfin, compte tenu de (6.3), de la conservation de l'énergie (6.1) et l'estimation de la densité de charge ρ (6.-13), nous concluons la première étape

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left| \langle \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) (v(\xi) \cdot \nabla_x f) d\xi, \psi \rangle \right| \\ \leq C \varepsilon^{2/3} (\mathcal{E}(0))^{1/3} \|f_0\|_{L^\infty}^{1/6} (\|f_0\|_{L^1} + \mathcal{E}(0))^{1/2} \|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^6}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Étape II. Nous allons traiter le terme (6.-29) ne contenant pas la composante E_T .

$$\langle \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} (Id - \varepsilon^2 v(\xi) \otimes v(\xi)) f (E_L + \varepsilon v(\xi) \times B) d\xi, \psi \rangle. \quad (6.29)$$

D'une part, en appliquant l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \left| \int_{\mathbb{R}^6} f \left((1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} (Id - \varepsilon^2 v(\xi) \otimes v(\xi)) E_L \right) \cdot \psi dx d\xi \right| \\ &\leq \varepsilon^2 C \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M}_{-1}(t, x) |E_L| |\psi| dx. \\ &\leq \varepsilon^2 C \|\mathcal{M}_{-1}(t)\|_{L^2} \|E_L\|_{\mathbb{L}^2} \|\psi\|_{\mathbb{L}^\infty}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

D'autre part, en procédant de la même manière pour le terme comprenant le champ magnétique B et en observant que $\varepsilon |v(\xi)| \leq 1$, nous établissons

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left| \int_{\mathbb{R}^6} f (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} ((Id - \varepsilon^2 v(\xi) \otimes v(\xi)) \varepsilon v(\xi) \times B) \cdot \psi d\xi dx \right| \\ \leq \varepsilon^2 C \|\mathcal{M}_{-1}(t)\|_{L^2} \|B(t)\|_{\mathbb{L}^2} \|\psi\|_{\mathbb{L}^\infty}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

En regroupant les inégalités (6.-30), (6.-30), nous utilisons l'estimation de \mathcal{M}_{-1} donnée par (6.-20) et de l'énergie fournie par (6.1) et obtenons ainsi l'inégalité ci-dessous

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^6} (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} (Id - \varepsilon^2 v(\xi) \otimes v(\xi)) f (E_L + \varepsilon v(\xi) \times B) \psi d\xi dx \right| \\ & \leq \varepsilon^{1/2} C \|f_0\|_{L^\infty}^{1/2} (\|f_0\|_{L^1} + \varepsilon^2 \mathcal{E}(0))^{1/2} \mathcal{E}(0)^{1/2} \|\psi\|_{\mathbb{L}^\infty}. \end{aligned} \quad (6.-30)$$

Étape III. Il reste à estimer le terme contenant E_T (6.-28). Celui-ci vérifie

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} (Id - \varepsilon^2 v(\xi) \otimes v(\xi)) f E_T d\xi, \psi \right\rangle \right| \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M}_{-1}(t, x) |E_T| |\psi| dx. \end{aligned} \quad (6.-30)$$

Compte tenu des égalités (6.3), (6.3) et (6.3), nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} E_T g dx = -\varepsilon^2 \left\langle \frac{\partial j}{\partial t}, \psi \right\rangle. \quad (6.-30)$$

Puis, les trois étapes (6.-29), (6.-30), (6.-30) ci-dessus ont permis d'établir l'existence d'une constante $C(f_0) > 0$ et d'une constante $C > 0$ ne dépendant pas de f_0 , telles que : pour toute fonction $g \in \mathbb{L}^{6/5} \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} E_T g dx \right| & \leq C(f_0) (\|\psi\|_{\mathbb{L}^\infty} \varepsilon^{1/2} + \|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^6} \varepsilon^{2/3}) \\ & + \varepsilon^2 C \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M}_{-1}(t, x) |E_T| dx \|\psi\|_{\mathbb{L}^\infty}. \end{aligned}$$

Ensuite, grâce aux Lemmes 6.3 et 6.4, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} E_T g dx \right| & \leq C(f_0) \varepsilon^{1/2} (1 + \varepsilon^{1/6}) \|g\|_{\mathbb{L}^{6/5} \cap \mathbb{L}^2} \\ & + \varepsilon^2 C \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M}_{-1}(t, x) |E_T| dx \|g\|_{\mathbb{L}^{6/5} \cap \mathbb{L}^2}. \end{aligned} \quad (6.-31)$$

Nous rappelons que le dual de l'espace $(\mathbb{L}^2 \cap \mathbb{L}^{6/5})$ est $\mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6$ (voir par exemple [4, Théorème 2.7.1]). Donc, pour tout $a \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et $b \in \mathbb{L}^6(\mathbb{R}^3)$, tels que $E_T = a + b$, nous avons

$$\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M}_{-1}(t, x) |E_T| dx \leq \|\varepsilon^2 \mathcal{M}_{-1}(t)\|_{L^2} \|a\|_{\mathbb{L}^2} + \|\varepsilon^2 \mathcal{M}_{-1}(t)\|_{L^{6/5}} \|b\|_{\mathbb{L}^6}. \quad (6.-31)$$

Grâce à (6.-20), nous obtenons

$$\varepsilon^2 \|\mathcal{M}_{-1}(t)\|_{L^2} \leq \varepsilon^{1/2} C \|f_0\|_{L^\infty}^{1/2} (\|f_0\|_{L^1} + \varepsilon^2 \mathcal{E}(0))^{1/2} = \varepsilon^{1/2} C \mathcal{A}_2, \quad (6.-30)$$

où \mathcal{A}_2 est défini par (6.-22). Observons aussi que

$$\varepsilon^2 \|\mathcal{M}_{-1}(t)\|_{L^1} = \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^6} (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{-1/2} f \, dx \, d\xi \leq \varepsilon^2 \|\rho(t)\|_{L^1} \leq \varepsilon^2 \|f_0\|_{L^1} = \varepsilon^2 \mathcal{A}_1, \quad (6.-30)$$

où \mathcal{A}_1 est défini par (6.-22). Ainsi, par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|\mathcal{M}_{-1}(t)\|_{L^{6/5}} &\leq (\varepsilon^2 \|\mathcal{M}_{-1}(t)\|_{L^1})^{2/3} (\varepsilon^2 \|\mathcal{M}_{-1}(t)\|_{L^2})^{1/3}, \\ &\leq (\varepsilon^2 \mathcal{A}_1)^{2/3} (\varepsilon^{1/2} C \mathcal{A}_2)^{1/3}, \\ &\leq C \varepsilon^{3/2} \mathcal{A}_1^{2/3} \mathcal{A}_2^{1/3}. \end{aligned}$$

Nous rappelons que \mathcal{A}_0 est défini par (6.3)

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_2 + \varepsilon \mathcal{A}_1^{2/3} \mathcal{A}_2^{1/3}.$$

Ainsi, en regroupant (6.-31), (6.-31), (6.-30) et (6.3), pour tout $a \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et $b \in \mathbb{L}^6(\mathbb{R}^3)$, avec $E_T = a + b$, il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} E_T g \, dx \right| &\leq C(f_0) \varepsilon^{1/2} (1 + \varepsilon^{1/6}) \|g\|_{\mathbb{L}^{6/5} \cap \mathbb{L}^2} \\ &+ \sigma \varepsilon^{1/2} \mathcal{A}_0 (\|a\|_{\mathbb{L}^2} + \|b\|_{\mathbb{L}^6}) \|g\|_{\mathbb{L}^{6/5} \cap \mathbb{L}^2}. \end{aligned}$$

En prenant l'infimum de $\|a\|_{\mathbb{L}^2} + \|b\|_{\mathbb{L}^6}$, tels que $E_T = a + b$, nous obtenons alors pour tout $g \in \mathbb{L}^{6/5} \cap \mathbb{L}^2$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} E_T g \, dx \right| \leq C(f_0) \varepsilon^{1/2} (1 + \varepsilon^{1/6}) \|g\|_{\mathbb{L}^{6/5} \cap \mathbb{L}^2} + \sigma \varepsilon^{1/2} \mathcal{A}_0 \|E_T\|_{\mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6} \|g\|_{\mathbb{L}^{6/5} \cap \mathbb{L}^2}.$$

Par dualité, nous avons

$$\|E_T\|_{\mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6} \leq C(f_0) (1 + \varepsilon^{1/6}) \varepsilon^{1/2} + \sigma \varepsilon^{1/2} \mathcal{A}_0 \|E_T\|_{\mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6}.$$

Donc, sous la condition de petitesse sur la donnée initiale :

$$\sigma \varepsilon^{1/2} \mathcal{A}_0 < 1,$$

nous établissons une majoration uniforme : il existe une constante $C(f_0, \sigma)$ strictement positive, telle que

$$\|E_T(t)\|_{\mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6} \leq C(f_0, \sigma) (1 + \varepsilon^{1/6}) \varepsilon^{1/2}.$$

Ce qui achève la démonstration de la Proposition 6.3. □

6.4 Étude d'un problème régularisé.

L'objectif de cette partie est la construction d'une suite de solutions régulières approchant la solution du système de Vlasov-Darwin. Nous étudions alors un problème régularisé pour lequel les estimations données dans la partie précédente restent valides. Le paramètre ε n'intervient pas, nous prendrons donc $\varepsilon = 1$.

D'abord, nous régularisons la donnée initiale f_0 et supposons

$$\text{supp } f_0(x, \cdot) \subset B(0, R_0) \quad \text{et} \quad f_0 \in C^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3). \quad (6.-37)$$

Ensuite, nous considérons $\theta_n(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, radiale telle que

$$\text{supp } \theta_n \subset B(0, 1/n), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \theta_n dx = 1, \quad \theta_n \geq 0.$$

Nous nous intéressons alors au système de Vlasov-Darwin régularisé [6] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(\xi) \cdot \nabla_x f + (E_L + E_T + v(\xi) \times B) * \theta_n \cdot \nabla_\xi f = 0, \quad (6.-37)$$

et au temps $t = 0$, la fonction de distribution f vérifie

$$f(0, x, \xi) = f_0(x, \xi), \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

et les champs $(E_T(t, x), E_L(t, x), B(t, x))$ sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_L}{\partial t} - \nabla \times B = -j * \theta_n, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E_T = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \\ \nabla \cdot E_L = \rho * \theta_n, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \\ E = E_T + E_L \text{ et } \nabla \cdot E_T = 0, \quad \nabla \times E_L = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \quad (6.-36)$$

avec

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) d\xi, \quad j(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) f(t, x, \xi) d\xi.$$

Proposition 6.4 *Sous les hypothèses mentionnées ci-dessus, le système de Vlasov-Darwin régularisé (6.4)-(6.-36) admet une solution (f^n, E_T^n, E_L^n, B^n) vérifiant*

$$f^n \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3),$$

$$E_L^n, B^n \in C^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3)) \text{ et } E_T^n \in L^\infty(\mathbb{R}^+; Y),$$

où Y est défini par (6.3).

En appliquant une démarche similaire à la partie précédente, nous vérifions facilement que les estimations précédentes restent valides pour le problème régularisé (6.4)-(6.-36) et grâce à l'inégalité de Young

$$\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

Ces estimations sont donc uniformes par rapport à n . En effet, nous avons

- conservation de l'énergie :

$$\mathcal{E}^n(t) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} (\gamma(\xi) - 1) f^n(t, x, \xi) dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E_L^n(t, x)|^2 + |B^n(t, x)|^2 dx = \mathcal{E}(0),$$

- inégalité d'interpolation :

$$\|\rho^n(t)\|_{L^{4/3}} + \|j^n(t)\|_{\mathbb{L}^{4/3}} \leq \|f_0\|_{L^\infty}^{1/4} \left(\|f_0\|_{L^1} + (1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(0) \right)^{3/4},$$

- estimation $\mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6$ de $E_T^n(t)$ sous la condition de petitesse :

$$\exists C > 0, \quad \|E_T^n(t)\|_{\mathbb{L}^2 + \mathbb{L}^6} \leq C,$$

- conservation des normes L^p : pour toute fonction $\beta \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$,

$$\int_{\mathbb{R}^6} \beta(f^n(t, x, \xi)) dx d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^6} \beta(f_0(x, \xi)) dx d\xi.$$

De plus, la solution du problème régularisé satisfait les propriétés suivantes, mais non uniformément par rapport à n :

$$\exists C(\theta_n) > 0, \quad \frac{d}{dt} \|D f^n(t)\|_p \leq C(\theta_n) \|D f^n(t)\|_p, \quad \forall p \in [1, +\infty],$$

où $D f^n(t) = (\nabla_x f^n(t), \nabla_\xi f^n(t))$. Enfin, la solution $f^n(t)$ reste à support compact en (x, ξ) et le support est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon $R^n(t)$ défini par

$$R^n(t) = R_0 + \int_0^t \max(1, \|(E_T^n(s) + E_L^n(s)) \star \theta_n\|_{\mathbb{L}^\infty}) ds.$$

Nous montrons aussi que $E_T^n(t)$ est borné dans $\mathbb{L}^6(\mathbb{R}^3)$ sans restriction sur la taille de f_0 et sur l'énergie initiale.

Le paragraphe suivant est consacré à la démonstration de l'existence d'une solution du système régularisé. La preuve est basée sur la linéarisation du problème.

6.5 Preuve de la Proposition 6.4.

Dans cette partie, nous montrons que le problème régularisé (6.4), (6.-36) admet une solution. Les estimations qui suivent sont valables pour un n fixé. Ainsi, pour alléger les notations nous ne marquerons pas la dépendance de la solution en n .

La démonstration est basée sur la linéarisation du problème (6.4)-(6.-36). Nous désignons par f^1 la solution du problème de transport libre ($E^0=B^0=0$),

$$f^1(t, x, \xi) = f_0(x - v(\xi)t, \xi)$$

L'équation de Vlasov relativiste linéarisée s'écrit alors pour la $(k+1)$ -ème itération, $k \geq 0$,

$$\frac{\partial f^{k+1}}{\partial t} + v(\xi) \cdot \nabla_x f^{k+1} + (E_L^k + E_T^k + v(\xi) \times B^k) * \theta_n \cdot \nabla_\xi f^{k+1} = 0, \quad (6.-37)$$

où les champs (E_T^k, E_L^k, B^k) sont supposés connus. Ainsi, à partir de la solution f^{k+1} , nous calculons les nouveaux champs $(E_T^{k+1}, E_L^{k+1}, B^{k+1})$. Le champ magnétique B^{k+1} vérifie une équation elliptique

$$\nabla \times \nabla \times B^{k+1}(t, x) = \left(\nabla \times j^{k+1} * \theta_n \right) (t, x), \quad \nabla \cdot B^{k+1}(t, x) = 0. \quad (6.-36)$$

Ensuite, le champ longitudinal E_L^{k+1} satisfait l'équation de Poisson

$$\nabla \cdot E_L^{k+1}(t, x) = \left(\rho^{k+1} * \theta_n \right) (t, x), \quad \nabla \times E_L^{k+1}(t, x) = 0. \quad (6.-35)$$

Enfin, E_T^{k+1} est solution du problème variationnel suivant : $E_T^{k+1}(t) \in Y$ et $\forall w \in Y$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla E_T^{k+1}(t, x) \nabla w(x) + \left(A^{k+1} \left(E_T^{k+1} * \theta_n \right) (t, x) \right) \cdot w * \theta_n(x) dx \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\mathcal{I}^{k+1} * \theta_n \right) (t, x) \cdot w(x) dx, \end{aligned} \quad (6.-34)$$

où pour simplifier l'écriture, nous avons d'une part posé,

$$\mathcal{I}^{k+1}(t, x) = \mathcal{I}_1^{k+1}(t, x) + \mathcal{I}_2^{k+1}(t, x), \quad (6.-35)$$

avec

$$\mathcal{I}_1^{k+1}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) \nabla_x f^{k+1}(t, x, \xi) \cdot v(\xi) d\xi$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2^{k+1}(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{-1/2} (Id - v(\xi) \otimes v(\xi)) f^{k+1}(t, x, \xi) E_L^{k+1}(t, x) * \theta_n(x) d\xi \\ - \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{-1/2} (Id - v(\xi) \otimes v(\xi)) f^{k+1}(t, x, \xi) v(\xi) \times B^{k+1}(t, x) * \theta_n(x) d\xi. \end{aligned}$$

Puis, d'autre part la matrice A^{k+1} est donnée par

$$A^{k+1}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{-1/2} (Id - v(\xi) \otimes v(\xi)) f^{k+1}(t, x, \xi) d\xi. \quad (6.-37)$$

Étude de l'équation de Vlasov linéaire.

Proposition 6.5 *Nous supposons que la donnée initiale f_0 vérifie les hypothèses (6.4) et que $(B^k(t), E_L^k(t), E_T^k(t))$ sont donnés et appartiennent à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{L}^6(\mathbb{R}^3)$.*

Alors, l'équation de Vlasov linéarisée (6.5) admet une solution unique classique et reste à support compact contenu dans $B(0, R^{k+1}(t))$ avec

$$R^{k+1}(t) \leq R_0 + \int_0^t \max \left(1, \|(E_T^k(s) + E_L^k(s)) * \theta_n\|_{\mathbb{L}^\infty} \right) ds.$$

Preuve : nous utilisons les propriétés de la convolution, pour obtenir des estimations uniformes à partir d'une régularité minimale sur les champs $(E_T^k(t), E_L^k(t), B^k(t))$.

En effet, l'équation (6.5) est une équation de transport linéaire avec des champs de vecteurs réguliers. Le système définissant les courbes caractéristiques

$$\begin{cases} \frac{dX(s)}{ds} = v(\Xi(s)), \\ \frac{d\Xi(s)}{ds} = \left(E_L^k(s, X(s)) + E_T^k(s, X(s)) + v(\Xi(s)) \times B^k(s, X(s)) \right) * \theta_n, \\ X(t) = x, \quad \Xi(t) = \xi \end{cases} \quad (6.-37)$$

admet donc une unique solution globale, $s \rightarrow (X(s, t, x, \xi), \Xi(s, t, x, \xi))$ et la solution de l'équation de Vlasov linéaire (6.5) est donnée par

$$f^{k+1}(t, x, \xi) = f_0(X(0), \Xi(0)),$$

où $X(0) = X(0, t, x, \xi)$ et $\Xi(0) = \Xi(0, t, x, \xi)$. De plus, en dérivant une fois l'équation de Vlasov (6.5) en (x, ξ) , nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t} D f^{k+1} + v(\xi) \cdot \nabla_x D f^{k+1} + (E_L^k + E_T^k + v(\xi) \times B^k) * \theta_n \cdot \nabla_\xi D f^{k+1} = -G^{k+1},$$

où

$$G^{k+1} = (D v(\xi)) \nabla_x f^{k+1} + D(E_L^k + E_T^k + v(\xi) \times B^k) * \theta_n \cdot \nabla_\xi f^{k+1}.$$

Nous déduisons que pour tout $p \in [1, +\infty]$,

$$\frac{d}{dt} \|D f^{k+1}(t)\|_{L^p} \leq \left(1 + \|D(E_L^k(t) + E_T^k(t) + v(\xi) \times B^k(t)) * \theta_n\|_{\mathbb{L}^\infty} \right) \|D f^{k+1}(t)\|_{L^p}.$$

Par un lemme de Gronwall, nous montrons que la quantité $\|D f^{k+1}(t)\|_{L^p}$ est bornée par $C(\theta_n)$.

Enfin, la solution $f^{k+1}(t)$ reste à support compact et $\text{supp } f^{k+1}(t) \subset B(0, R^{k+1}(t))$ où

$$R^{k+1}(t) \leq R_0 + \int_0^t \max \left(1, \|(E_L^k(s) + E_T^k(s)) * \theta_n\|_{\mathbb{L}^\infty} \right) ds.$$

□

Étude du système de Darwin linéaire.

La fonction de distribution $f^{k+1}(t)$ est solution de l'équation de Vlasov linéaire. Elle vérifie donc la propriété suivante

$$\|f^{k+1}(t)\|_{L^p} \leq \|f^{k+1}(0)\|_{L^p} = \|f_0\|_{L^p}, \quad \forall p \in [1, +\infty]. \quad (6.-39)$$

Proposition 6.6 *Si la donnée initiale vérifie les hypothèses (6.4). Alors, les champs B^{k+1} , E_L^{k+1} et E_T^{k+1} vérifient :*

$$\exists C(\theta_n) > 0, \quad \forall k \geq 0, \quad \|E_T^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^6} + \|E_L^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2} + \|B^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C(\theta_n).$$

Preuve : nous donnons d'abord une estimation du champ magnétique B^{k+1} , lequel vérifie

$$-\Delta B^{k+1}(t, x) = \left(\nabla \times j^{k+1} * \theta_n \right) (t, x).$$

Grâce aux propriétés de la convolution et par application du Corollaire 6.3, nous avons

$$\|\nabla B^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \leq C \|j^{k+1} * \theta_n(t)\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \leq C \|f_0\|_{L^1} \|\theta_n\|_{L^{6/5}}.$$

Ensuite, à l'aide de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, nous savons que

$$\|B^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C \|\nabla B^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^{6/5}}.$$

Ainsi, en regroupant les deux inégalités précédentes, nous obtenons une première estimation de B^{k+1} ,

$$\|B^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C \|f_0\|_{L^1} \|\theta_n\|_{L^{6/5}}. \quad (6.-39)$$

De la même manière, il existe une constante $C > 0$, indépendante de k , telle que

$$\|E_L^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C \|f_0\|_{L^1} \|\theta_n\|_{L^{6/5}}. \quad (6.-39)$$

Enfin, nous traitons le champ transverse E_T^{k+1} , lequel vérifie le problème variationnel : $E_T^{k+1} \in Y$ et pour tout $w \in Y$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla E_T^{k+1}(t, x) \nabla w(x) + \left(A^{k+1}(t, x) \left(E_T^{k+1} * \theta_n \right) (t, x) \right) \cdot w * \theta_n(x) dx \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\mathcal{I}^{k+1} * \theta_n \right) (t, x) \cdot w(x) dx, \end{aligned} \quad (6.-39)$$

où le vecteur \mathcal{I}^{k+1} et la matrice A^{k+1} sont respectivement définis par (6.5) et (6.-37).

La démonstration de l'existence d'une solution est basée sur le Lemme de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert Y . La coercivité provient de la positivité de la

matrice A^{k+1} . Enfin, la régularité du terme source provient du produit de convolution. De plus, nous obtenons une borne uniforme : prenons dans la formulation variationnelle la fonction test $w = E_T^{k+1}$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla E_T^{k+1}|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left(\mathcal{I}_1^{k+1} + \mathcal{I}_2^{k+1} \right) * \theta_n E_T^{k+1} dx. \quad (6.-38)$$

Ainsi, en décomposant le terme de droite et en rappelant que $|v(\xi)| \leq 1$, nous avons d'une part

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{I}_1^{k+1} * \theta_n \cdot E_T^{k+1} dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) \cdot \nabla_x f^{k+1} v(\xi) d\xi \right) * \theta_n \cdot E_T^{k+1} dx \right|, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \rho^{k+1} * \theta_n |\nabla E_T^{k+1}| dx, \\ &\leq \|f_0\|_{L^1} \|\theta_n\|_{L^2} \|\nabla E_T^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2}. \end{aligned} \quad (6.-39)$$

D'autre part, puisque B^{k+1} et E_L^{k+1} sont uniformément bornés dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$, nous établissons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{I}_2^{k+1} \cdot E_T^{k+1} dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^6} (1 + |\xi|^2)^{-1/2} (Id - v(\xi) \otimes v(\xi)) f^{k+1} \times \right. \\ &\quad \left. \times (E_L^{k+1} + v(\xi) \times B^{k+1}) * \theta_n \cdot E_T^{k+1} * \theta_n dx d\xi \right|, \\ &\leq \|f^{k+1}\|_{L^1} \|(E_L^{k+1} + B^{k+1}) * \theta_n\|_{\mathbb{L}^\infty} \|E_T^{k+1} * \theta_n\|_{\mathbb{L}^\infty}, \\ &\leq \|f_0\|_{L^1} (\|E_L^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2} + \|B^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2}) \|\theta_n\|_{\mathbb{L}^2} \|E_T^{k+1}\|_{\mathbb{L}^6} \|\theta_n\|_{\mathbb{L}^{6/5}}. \end{aligned}$$

Compte tenu de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, nous avons

$$\|E_T^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^6} \leq C \|\nabla E_T^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2},$$

d'où

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{I}_2^{k+1} \cdot E_T^{k+1} dx \right| \leq C \|f_0\|_{L^1} (\|E_L^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2} + \|B^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2}) \|\theta_n\|_{\mathbb{L}^2} \|\theta_n\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \|\nabla E_T^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2}. \quad (6.-43)$$

En regroupant les inégalités (6.-38), (6.-39) et (6.5), nous montrons l'existence d'une constante $C(\theta_n) > 0$, indépendante de k , telle que

$$\|\nabla E_T^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C(\theta_n) \|\nabla E_T^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2},$$

c'est-à-dire,

$$\exists C(\theta_n) > 0, \quad \|\nabla E_T^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C(\theta_n).$$

Par conséquent,

$$\exists C(\theta_n) > 0, \quad \|E_T^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^6} \leq C(\theta_n). \quad (6.-43)$$

□

Remarque 6.1 *L'estimation uniforme des champs $(E_T^k(t), E_L^k(t), B^k(t))$ dans l'espace $\mathbb{L}^6(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et les propriétés du produit de convolution permettent de contrôler le support de la fonction de distribution f^{k+1} uniformément par rapport à k . Ainsi, pour tout $k \geq 0$, le support de la fonction de distribution $f^k(t)$ est inclus dans la boule de centre 0 et de rayon $R(t)$, tel que*

$$\exists C(\theta_n) > 0, \quad R(t) \leq R_0 + C(\theta_n) t. \quad (6.-43)$$

Pour achever la démonstration de la Proposition 6.4, il suffit de montrer que la solution du problème linéarisé converge vers la solution du problème régularisé lorsque k tend vers l'infini.

Passage à la limite : $k \rightarrow +\infty$.

Soit $(f^k, E_L^k, E_T^k, B^k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de solutions de l'équation de Vlasov linéaire (6.5), (6.-36), (6.-35), (6.-34). D'une part, la majoration (6.5) donne une borne de la fonction de distribution f^k dans $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^6)$. Il existe donc une sous suite de $(f^k)_{k \geq 0}$ et une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^6)$, telles que

$$f^k \rightharpoonup f \quad \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^6), \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, les majorations (6.5), (6.5) et (6.5) donnent des estimations uniformes des champs électromagnétiques (E_T^k, E_L^k, B^k) . Il existe donc une sous suite de $(E_T^k, E_L^k, B^k)_{k \geq 0}$ et (E_T, E_L, B) , tels que

$$\begin{aligned} B^k &\rightharpoonup B \quad \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3), \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty, \\ E_L^k &\rightharpoonup E_L \quad \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3), \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty, \\ E_T^k &\rightharpoonup E_T \quad \text{faiblement dans } L^6(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3), \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que la limite (f, E_T, E_L, B) est solution du problème de Vlasov-Darwin régularisé (6.4)-(6.-36).

Nous estimons d'abord, la différence des champs magnétiques $B^{k+1} - B^k$,

$$\nabla \times \nabla \times (B^{k+1} - B^k)(t, x) = -\Delta (B^{k+1} - B^k)(t, x) = \nabla \times (j^{k+1} - j^k) * \theta_n(t, x).$$

Donc, à partir de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, nous avons

$$\begin{aligned} \|(B^{k+1} - B^k)(t)\|_{\mathbb{L}^2} &\leq C \|\nabla(B^{k+1} - B^k)(t)\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \\ &\leq C \|(j^{k+1} - j^k) * \theta_n(t)\|_{\mathbb{L}^{6/5}}, \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |(f^{k+1} - f^k)(t)| d\xi dx \right) \|\theta_n\|_{\mathbb{L}^{6/5}}, \\ &\leq C R(t)^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |(f^{k+1} - f^k)(t)|^2 d\xi dx \right)^{1/2} \|\theta_n\|_{\mathbb{L}^{6/5}}, \end{aligned}$$

où le rayon $R(t)$ est défini par (6.1). Nous en déduisons alors que

$$\|B^{k+1} - B^k(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C(\theta_n) \|(f^{k+1} - f^k)(t)\|_{L^2}. \quad (6.49)$$

Nous procédons de la même manière pour la différence des champs longitudinaux $E_L^{k+1} - E_L^k$. Il vient alors

$$\|(E_L^{k+1} - E_L^k)(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C(\theta_n) \|(f^{k+1} - f^k)(t)\|_{L^2}. \quad (6.48)$$

Nous faisons la différence des équations (6.-39) relatives à E_T^k et E_T^{k+1} , puis prenons $E_T^{k+1} - E_T^k$ pour fonction test. Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(E_T^{k+1} - E_T^k)(t)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} {}^t(E_T^{k+1} - E_T^k)(t) * \theta_n A^{k+1}(t) (E_T^{k+1} - E_T^k)(t) * \theta_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{I}^{k+1} - \mathcal{I}^k)(t) * \theta_n \cdot (E_T^{k+1} - E_T^k)(t) dx \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^3} {}^t(E_T^{k+1} - E_T^k)(t) * \theta_n (A^k - A^{k+1})(t) E_T^k(t) * \theta_n dx. \quad (6.46)$$

Dans la suite, nous estimons les termes (6.-47) et (6.-46) en fonction de la quantité $\|\nabla(E_T^{k+1} - E_T^k)\|_{\mathbb{L}^2}$.

D'abord, puisque $|v(\xi)| \leq 1$, nous vérifions

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{I}_1^{k+1} - \mathcal{I}_1^k)(t) * \theta_n \cdot (E_T^{k+1} - E_T^k)(t) dx \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^6} |(f^{k+1} - f^k)(t) * \theta_n| \left| \nabla(E_T^{k+1} - E_T^k)(t) \right| dx d\xi, \\ & \leq \|(\rho^{k+1} - \rho^k)(t) * \theta_n\|_{L^2} \|\nabla(E_T^{k+1} - E_T^k)(t)\|_{\mathbb{L}^2}, \\ & \leq R(t)^{3/2} \|(f^{k+1} - f^k)(t)\|_{L^2} \|\theta_n\|_1 \|\nabla(E_T^{k+1} - E_T^k)(t)\|_{\mathbb{L}^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante $C > 0$, dépendant de θ_n , telle que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{I}_1^{k+1} - \mathcal{I}_1^k) * \theta_n \cdot (E_T^{k+1} - E_T^k)(t) dx \right| \leq C \|(f^{k+1} - f^k)(t)\|_{L^2} \|\nabla(E_T^{k+1} - E_T^k)(t)\|_{\mathbb{L}^2}. \quad (6.50)$$

De la même manière, nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{I}_2^{k+1} - \mathcal{I}_2^k)(t) * \theta_n \cdot (E_T^{k+1} - E_T^k)(t) dx \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^6} |(f^{k+1} - f^k)(t)| |(E_L^{k+1}(t) + v(\xi) \times B^{k+1}(t)) * \theta_n| |(E_T^{k+1} - E_T^k)(t) * \theta_n| d\xi dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^6} f^k(t) |(E_L^{k+1} - E_L^k)(t) * \theta_n| |(E_T^{k+1} - E_T^k)(t) * \theta_n| d\xi dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^6} f^k(t) |v(\xi) \times (B^{k+1} - B^k)(t) * \theta_n| |(E_T^{k+1} - E_T^k)(t) * \theta_n| d\xi dx. \end{aligned}$$

En utilisant les majorations obtenues précédemment sur $B^{k+1} - B^k$ données par (6.-49) et sur $E_L^{k+1} - E_L^k$ dans (6.-48) et les bornes uniformes sur B^k dans (6.5) et E_L^k données par (6.5), nous montrons l'existence d'une constante $C(\theta_n) > 0$, indépendante de k , telle que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{I}_2^{k+1} - \mathcal{I}_2^k) * \theta_n \cdot (E_T^{k+1} - E_T^k)(t) dx \right| \leq C(\theta_n) \|f^{k+1} - f^k\|_{L^2} \|E_T^{k+1} - E_T^k\|_{\mathbb{L}^6}. \quad (6.-54)$$

En regroupant les inégalités (6.5) et (6.5), nous obtenons une majoration du terme (6.-47)

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{I}^{k+1} - \mathcal{I}^k) * \theta_n \cdot (E_T^{k+1} - E_T^k) dx \right| \leq C(\theta_n) \|f^{k+1} - f^k\|_{L^2} \|\nabla(E_T^{k+1} - E_T^k)\|_{\mathbb{L}^2}. \quad (6.-54)$$

Il reste à obtenir une estimation de (6.-46) : puisque le support de f^k est uniformément borné, il existe une constante $C(\theta_n) > 0$, telle que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} {}^t(E_T^{k+1} - E_T^k)(t) * \theta_n (A^k - A^{k+1})(t) E_T^k(t) * \theta_n dx \right| & \quad (6.-53) \\ & \leq C(\theta_n) \|(E_T^{k+1} - E_T^k)(t)\|_{\mathbb{L}^6} \|(f^{k+1} - f^k)(t)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

En regroupant les inégalités (6.5) et (6.-53), nous avons,

$$\begin{aligned} \|\nabla(E_T^{k+1} - E_T^k)(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 & \leq C(\theta_n) \|(E_T^{k+1} - E_T^k)(t)\|_{\mathbb{L}^6} \|(f^{k+1} - f^k)(t)\|_{L^2} \\ & + C(\theta_n) \|\nabla(E_T^{k+1} - E_T^k)(t)\|_{\mathbb{L}^2} \|(f^{k+1} - f^k)(t)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev,

$$\|(E_T^{k+1} - E_T^k)(t)\|_{\mathbb{L}^6} \leq \|\nabla(E_T^{k+1} - E_T^k)(t)\|_{\mathbb{L}^2},$$

nous obtenons la majoration suivante

$$\|(E_T^{k+1} - E_T^k)(t)\|_{\mathbb{L}^6} \leq C(\theta_n) \|(f^{k+1} - f^k)(t)\|_{L^2}. \quad (6.-55)$$

Pour achever la démonstration de la convergence, il faut estimer la différence $(f^{k+1} - f^k)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (f^{k+1} - f^k) + v(\xi) \cdot \nabla_x (f^{k+1} - f^k) \\ & + \left(E_L^k + E_T^k + v(\xi) \times B^k \right) * \theta_n \cdot \nabla_\xi (f^{k+1} - f^k) \\ & = - \left\{ (E_L^k - E_L^{k-1}) + (E_T^k - E_T^{k-1}) + v(\xi) \times (B^k - B^{k-1}) \right\} * \theta_n \cdot \nabla_\xi f^k. \end{aligned}$$

Nous multiplions alors l'équation par $(f^{k+1} - f^k)$ et intégrons en (x, ξ) , il vient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |f^{k+1} - f^k|^2 dx d\xi + \int_{\mathbb{R}^6} (f^{k+1} - f^k) v(\xi) \cdot \nabla_x (f^{k+1} - f^k) dx d\xi \\
& + \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^{k+1} - f^k) \left(E_L^k + E_T^k + v(\xi) \times B^k \right) * \theta_n \cdot \nabla_\xi (f^{k+1} - f^k) dx d\xi \\
& = - \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^{k+1} - f^k) \left\{ (E_L^k - E_L^{k-1}) + (E_T^k - E_T^{k-1}) \right\} * \theta_n \cdot \nabla_\xi f^k dx d\xi \\
& - \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^{k+1} - f^k) \left\{ v(\xi) \times (B^k - B^{k-1}) \right\} * \theta_n \cdot \nabla_\xi f^k dx d\xi.
\end{aligned}$$

En utilisant les estimations d'erreurs sur les champs (6.-49), (6.-48), (6.-55), nous obtenons finalement l'existence d'une constante $C(\theta_n) > 0$, indépendante de k , telle que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |f^{k+1} - f^k|^2 dx d\xi \\
& \leq \|\nabla_\xi f^k\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f^{k+1} - f^k| d\xi \right) \times \\
& \quad \times \left\{ |E_L^k - E_L^{k-1}| + |E_T^k - E_T^{k-1}| + |B^k - B^{k-1}| \right\} * \theta_n dx, \\
& \leq C(\theta_n) \|f^{k+1} - f^k\|_{L^2} \|f^k - f^{k-1}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous établissons l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dt} \|(f^{k+1} - f^k)(t)\|_{L^2} \leq C(\theta_n) \|f^k - f^{k-1}(t)\|_{L^2}.$$

Par récurrence, nous en déduisons l'estimation suivante de $f^{k+1} - f^k$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$

$$\|f^{k+1} - f^k(t)\|_{L^2} \leq \frac{(C(\theta_n)t)^k}{k!}.$$

Ce qui prouve la convergence forte pour tout $T > 0$ dans $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^6)$ de la suite $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers f et compte tenu de (6.-49), (6.-48) et (6.-55), la convergence forte de $(B^k(t), E_L^k(t), E_T^k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{L}^6(\mathbb{R}^3)$ vers (B, E_L, E_T) .

La limite ainsi obtenue satisfait les équations suivante au sens des distributions

$$-\Delta B(t, x) = (\nabla \times j * \theta_n)(t, x), \quad \nabla \cdot B(t, x) = 0. \quad (6.-66)$$

Puis, sur le champ électrique longitudinal

$$-\Delta \phi(t, x) = (\rho * \theta_n)(t, x), \quad E_L(t, x) = -\nabla \phi(t, x). \quad (6.-65)$$

De plus, $E_T \in L^\infty([0, T]; Y)$ est solution du problème variationnel,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla E_T(t) \nabla w dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial j}{\partial t}(t) * \theta_n \cdot w dx, \quad \forall w \in Y. \quad (6.-64)$$

En utilisant la régularité des champs, la fonction f vérifie $f \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, avec $f(t)$ à support compact et $\rho, j \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3)$,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(\xi) \cdot \nabla_x f + (E_L + E_T + v(\xi) \times B) * \theta_n \cdot \nabla_\xi f = 0.$$

Étant donné que les termes sources des équations (6.-66), (6.-65) et (6.-64) sont régularisés en espace et dérivable pour chaque t à dérivée continue en temps, nous avons $B, E_L \in C^1([0, T]; C^\infty(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3))$.

Montrons maintenant que (E_T, E_L, B) vérifient le système de Darwin régularisé (6.-36). Nous remarquons d'abord que $\nabla \times (\nabla \times B(t) - j * \theta_n(t)) = 0$ et $\nabla \times B(t) - j * \theta_n(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, il existe donc une unique fonction $p \in Y$ telle que

$$\nabla \times B(t) + \nabla p = j * \theta_n(t). \quad (6.-64)$$

De plus, en prenant la divergence de l'équation (6.5) et compte tenu de (6.-65), il vient

$$\nabla \cdot (\nabla p) = \Delta p = \nabla \cdot j * \theta_n = -\frac{\partial \rho}{\partial t} * \theta_n = \frac{\partial}{\partial t} \Delta \phi.$$

Nous avons donc

$$\Delta(p - \frac{\partial \phi}{\partial t}) = 0.$$

Puisque les terme sources $\rho(t)$ et $j(t)$ sont à support compact et $\nabla p, \frac{\partial E_L}{\partial t} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, nous établissons que

$$\nabla p + \frac{\partial E_L}{\partial t} = 0,$$

ce qui donne la première équation du système (6.-36)

$$-\frac{\partial E_L}{\partial t} + \nabla \times B = j * \theta_n. \quad (6.-64)$$

Ensuite, à partir de l'équation (6.-64) vérifiée par E_T , nous considérons $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^3))^3$ et posons $w = \nabla \times \varphi$, alors $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla \cdot w = 0$. Nous pouvons donc prendre w comme fonction test

$$\langle \nabla \times \left(-\Delta E_T + \frac{\partial j}{\partial t} * \theta_n \right), \varphi \rangle = 0.$$

Il existe donc une fonction scalaire $p_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, telle que

$$\nabla \times \nabla \times E_T + \nabla p_2 = \frac{\partial j}{\partial t} * \theta_n, \quad \text{dans } H^{-1}(\mathbb{R}^3).$$

Or en dérivant par rapport au temps l'équation (6.5), nous obtenons

$$\nabla p_2 = -\frac{\partial^2 E_L}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E_T = 0.$$

Ce qui montre que les champs (E_T, E_L, B) sont solutions du système de Darwin régularisé (6.-36).

6.6 Étude de l'existence de solutions faibles.

Dans cette partie, nous supposons que f_0 vérifie les hypothèses suivantes

$$f_0 \in L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0 \gamma(\xi) d\xi dx < +\infty.$$

Considérons une suite de fonction (E_T^n, E_L^n, B^n, f^n) solution du problème régularisé (6.4)-(6.-36) et rappelons l'estimation de l'énergie sur le problème régularisé qui est uniforme par rapport à n :

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\gamma(\xi) - 1}{\varepsilon^2} f^n d\xi dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |B^n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E_L^n|^2 dx \leq C(f_0, \varepsilon) \quad (6.-65)$$

et l'estimation sur la composante transverse du champ électrique E_T sous une condition de petitesse sur la donnée initiale (6.3), puisque l'injection de $\mathcal{L}^2 + \mathcal{L}^6$ dans \mathcal{L}_{loc}^2 est continue

$$\forall R > 0, \quad \exists C_R > 0, \quad \int_{B(0,R)} |E_T^n|^2 dx \leq C_R \varepsilon. \quad (6.-65)$$

Les estimations (6.6) et (6.6) donnent le bon cadre fonctionnel pour décrire le produit $(E_L + E_T + v(\xi) \times B) f$ dans L_{loc}^1 , puisque les termes sont dans L_{loc}^2 .

En effet, ces estimations permettent d'extraire des sous suites faiblement convergentes dans l'espace $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$. Cependant, comme nous n'avons pas d'information sur les dérivées nous ne pouvons pas garantir l'égalité des deux quantités

$$(E_L + E_T + v(\xi) \times B) f \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (E_L^n + E_T^n + v(\xi) \times B^n) f^n.$$

Pour cela, nous utilisons le Théorème suivant, démontré dans [6, 19]

Théorème 6.2 Soient $\Omega = (0, T) \times \mathbb{R}^3$ et $v(\xi) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, satisfaisant

$$\forall \sigma \in S^2, \quad \forall u \in \mathbb{R}; \quad |\{\xi \in \mathbb{R}^3; \quad v(\xi) \cdot \sigma = u\}| = 0$$

et une suite f^n bornée dans $L_{loc}^2(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ qui satisfait pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, la suite

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial f^n}{\partial t} + \nabla_x \cdot v(\xi) f^n \right) \psi(v) dv \right\} \quad (6.-65)$$

est compacte dans $H_{loc}^{-1}(\Omega)$. Alors, la suite

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^3} f^n(t, x, \xi) \psi(\xi) d\xi \right\}$$

est compacte dans $L_{loc}^2(\Omega)$.

À l'aide de ce Théorème, il reste à montrer que la limite du problème régularisé converge bien vers la solution faible de Vlasov-Darwin. Ce qui achèvera la démonstration du Théorème 6.1.

À partir des estimations L^2_{loc} sur la suite $(f^n, E_L^n, E_T^n, B^n)_{n>0}$, nous déduisons qu'il existe une sous-suite qui converge faiblement dans L^2_{loc} vers (f, E_L, E_T, B) .

De plus, les normes L^p de f^n sont également bornées car

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \beta(f^n(t, x, \xi)) dx d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \beta(f_0(x, \xi)) dx d\xi, \quad \forall \beta \in C(\mathbb{R}^+).$$

Ainsi, la solution du problème régularisé vérifie au sens des distributions : $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial f^n}{\partial t} + v(\xi) \cdot \nabla f^n \right) \psi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} g^n \cdot \nabla \psi(\xi) d\xi,$$

avec $g^n = (E_L^n + E_T^n + v(\xi) \times B^n) * \theta_n f^n$. Nous savons que E_L^n, E_T^n et B^n sont bornés dans $L^2_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^3)$ et f^n est bornée dans $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, donc le terme $g^n \cdot \nabla \psi(\xi)$ est borné dans $L^2_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^3 \times B(0, R))$, pour tout $T, R \leq +\infty$. De plus, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in S^2$, en appliquant le théorème des fonction implicites à la fonction $\beta_0(\cdot)$ définie par

$$\beta_0(\xi) = v(\xi) \cdot \sigma - u,$$

nous avons

$$|\{\xi \in \mathbb{R}^3, \quad v(\xi) \cdot \sigma = u\}| = 0.$$

Grâce au Théorème 6.2, nous obtenons alors

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} f^n(t, x, \xi) \psi(\xi) d\xi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) \psi(\xi) d\xi, \quad \text{dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3).$$

Ainsi, nous montrons que $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi^3), \forall \varphi \in \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}_x^3)$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (E_L^n + E_T^n) \varphi(t, x) \left(\int_{\mathbb{R}^3} f^n(t, x, \xi) \psi(\xi) d\xi \right) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (E_L + E_T) \varphi(t, x) \left(\int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) \psi(\xi) d\xi \right) dx dt, \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty$$

et de la même manière, $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi^3), \forall \varphi \in \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}_x^3)$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f^n(t, x, \xi) \psi(\xi) v(\xi) d\xi \right) \times B^n \varphi(t, x) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) \psi(\xi) v(\xi) d\xi \right) \times B \varphi(t, x) dx dt, \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Nous obtenons donc un quadruplet (f, E_L, E_T, B) solution au sens des distributions du problème de Vlasov-Darwin

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(\xi) \cdot \nabla_x f + (E_L + E_T + \varepsilon v(\xi) \times B) \cdot \nabla_\xi f = 0$$

et les champs électromagnétiques vérifient au sens des distributions

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial E_L}{\partial t} - \nabla \times B = \varepsilon j, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E_T = 0, \\ \nabla \cdot B = 0, \quad \nabla \cdot E_L = \rho, \\ \nabla \times E_L = 0, \quad \nabla \cdot E_T = 0. \end{array} \right.$$

À l'aide de (6.-7)-(6.-6), nous montrons les propriétés suivantes

$$f \in C(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) - w^*), \quad E_L, B \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3) - w).$$

6.7 Convergence de Vlasov-Darwin pour des petites vitesses.

Dans cette partie, nous supposons que la donnée initiale est uniformément bornée par rapport à ε , nous considérons les hypothèses suivantes.

$$f_0 \in L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0 |\xi|^2 d\xi dx < +\infty.$$

Nous notons par $(f^\varepsilon, E_L^\varepsilon, E_T^\varepsilon, B^\varepsilon)$ la solution du système de Vlasov-Darwin (6.-7), (6.-6).

Nous nous intéressons à la convergence des solutions du système de Vlasov-Darwin adimensionné lorsque le paramètre ε tend vers zéro. Nous prouvons alors

Théorème 6.3 *Soit f_0 une fonction positive, appartenant à $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et vérifiant*

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0 |\xi|^2 dx d\xi + \int_{\mathbb{R}^3} |E_L(0)|^2 + |B(0)|^2 dx < C_0,$$

où C_0 est une constante strictement positive indépendante de ε et f_0 satisfait la condition de petitesse (6.3).

Alors, la suite de solutions du système de Vlasov-Darwin relativiste (6.-7)-(6.-6) converge vers la solution faible du système de Vlasov-Poisson non relativiste, lorsque ε tend vers zéro. De plus, pour ε suffisamment petit, la condition de petitesse sur f_0 devient inutile.

Nous montrons d'abord que la suite $(E_L^\varepsilon(t))_{\varepsilon>0}$ est compacte dans $\mathbb{L}_{loc}^{5/4}(\mathbb{R}^3)$.

Proposition 6.7 *Nous supposons que la donnée initiale vérifie (6.2). Alors, la suite de solution définissant le champ électrique longitudinal $(E_L^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{L}_{loc}^{5/4}(\mathbb{R}^3))$.*

Avant de procéder à la démonstration de la Proposition 6.7, nous montrons le lemme suivant qui donne une majoration de la densité de courant j .

Lemme 6.6 *Sous l'hypothèse (6.2), la densité de courant j vérifie : il existe une constante $C(f_0) > 0$, ne dépendant que de la donnée initiale f_0 , telle que*

$$\|j^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^{5/4}} \leq C(f_0).$$

Preuve : nous définissons d'abord les fonctions de distribution f_1^ε et f_2^ε par

$$f_1^\varepsilon = \begin{cases} f^\varepsilon & \text{si } |\xi| \leq 1/\varepsilon, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $f_2^\varepsilon = f^\varepsilon - f_1^\varepsilon$. Ainsi, nous posons

$$j_1^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi}{(1 + \varepsilon^2|\xi|^2)^{1/2}} f_1^\varepsilon d\xi \quad \text{et} \quad j_2^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi}{(1 + \varepsilon^2|\xi|^2)^{1/2}} f_2^\varepsilon d\xi.$$

D'une part, la conservation de l'énergie énoncée dans le Corollaire 6.2 implique

$$\int_{\mathbb{R}^6} |\xi|^2 f_1^\varepsilon(t) d\xi dx \leq (1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(0) \quad \text{et} \quad \|f_1^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \|f_0\|_{L^\infty}.$$

Par une inégalité d'interpolation, nous avons

$$\|j_1^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^{5/4}} \leq C \|f_1^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^{1/5} \left(\int_{\mathbb{R}^6} |\xi|^2 f_1^\varepsilon(t) d\xi dx \right)^{4/5}.$$

Ce qui montre que j_1^ε est uniformément borné dans $\mathbb{L}^{5/4}(\mathbb{R}^3)$.

D'autre part, la conservation de l'énergie indique que j_2^ε est borné dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)$ de la façon suivante

$$\int_{\mathbb{R}^6} f_2^\varepsilon(t) |\xi| d\xi dx \leq \varepsilon (1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(0) \quad \text{et} \quad \|f_2^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \|f_0\|_{L^\infty}. \quad (6.-75)$$

Ainsi, par application d'une inégalité d'interpolation dans les espaces L^p , nous avons

$$\|j_2^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^{5/4}} \leq \|j_2^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^1}^{1/5} \|j_2^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^{4/3}}^{4/5}. \quad (6.-75)$$

Il faut donc estimer $\|j_2^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^{4/3}}$: nous posons alors

$$\rho_2^\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f_2^\varepsilon(t, x, \xi) d\xi.$$

Par une inégalité d'interpolation et compte tenu de (6.7), nous avons

$$\varepsilon \|j_2^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^{4/3}} \leq \|\rho_2^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^{4/3}} \leq C_3 \|f_2^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^{1/4} \left(\int_{\mathbb{R}^6} f_2^\varepsilon(t) |\xi| d\xi dx \right)^{3/4} \leq C(f_0) \varepsilon^{3/4}.$$

En d'autres termes,

$$\|j_2^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^{4/3}} \leq C(f_0) \varepsilon^{-1/4}.$$

Puis, en substituant cette estimation dans (6.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|j_2^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^{5/4}} &\leq C \|j_2^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^1}^{1/5} \|j_2^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^{4/3}}^{4/5} \leq \left(\varepsilon (1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(0)\right)^{1/5} \left(C(f_0) \varepsilon^{-1/4}\right)^{4/5} \\ &\leq C(f_0)^{4/5} \left((1 + \sqrt{2}) \mathcal{E}(0)\right)^{1/5}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $j^\varepsilon = j_1^\varepsilon + j_2^\varepsilon$ est uniformément borné dans $\mathbb{L}^{5/4}(\mathbb{R}^3)$. \square

Preuve de la Proposition 6.7 : nous rappelons que le champ électrique longitudinal s'écrit $E_L^\varepsilon(t, x) = -\nabla\phi^\varepsilon(t, x)$, où ϕ^ε est solution de l'équation de Poisson

$$-\Delta\phi^\varepsilon = \rho^\varepsilon.$$

De plus, les inégalités d'interpolation, énoncées dans la Proposition 6.2, donnent des estimations sur les densités de charge et de courant : il existe une constante $C(f_0)$, ne dépendant que de la donnée initiale, telle que

$$\|\rho^\varepsilon(t)\|_{L^{4/3}} + \|\rho^\varepsilon(t)\|_{L^1} \leq C, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Ainsi, puisque E_L^ε satisfait l'équation de Poisson, il existe une constante $C(f_0) > 0$, telle que

$$\|E_L^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^p} \leq C(f_0), \quad 3/2 < p \leq 12/5 \text{ et } \|\nabla E_L^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^q} \leq C(f_0), \quad 1 < q \leq 4/3. \quad (6.-76)$$

Pour obtenir la convergence forte de E_L^ε , nous devons maintenant estimer la dérivée par rapport au temps de E_L^ε

$$\varepsilon \frac{\partial E_L^\varepsilon}{\partial t} - \nabla \times B^\varepsilon = -\varepsilon j^\varepsilon. \quad (6.-76)$$

Le champ magnétique vérifie $B^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et

$$-\Delta B^\varepsilon = \varepsilon \nabla \times j^\varepsilon.$$

Or, d'après le Lemme 6.6, $j^\varepsilon(t)$ est uniformément borné dans $\mathbb{L}^{5/4}(\mathbb{R}^3)$ et le Lemme 6.2 permet de montrer que

$$\|\nabla \times B^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^{5/4}} \leq C \varepsilon \|j^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^{5/4}}. \quad (6.-76)$$

Ainsi,

$$\left\| \frac{\partial E_L^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{\mathbb{L}^{5/4}} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla \times B^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^{5/4}} + \|j^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^{5/4}} \leq C \|j^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^{5/4}}$$

Nous avons donc établi la majoration : il existe $C(f_0) > 0$, ne dépendant que de f_0 , telle que

$$\left\| \frac{\partial E_L^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{\mathbb{L}^{5/4}} \leq C \|j^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{L}^{5/4}} \leq C(f_0). \quad (6.-76)$$

Finalement, à partir de (6.-76) et (6.7), nous avons montré

- $E_L^\varepsilon(t, x)$ est borné dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+, W_{loc}^{1,5/4}(\mathbb{R}^3))$,
- $\frac{\partial E_L^\varepsilon}{\partial t}$ est borné dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{L}^{5/4}(\mathbb{R}^3))$.

Donc, par application du théorème d'Aubin, la suite E_L^ε est compacte dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{L}_{loc}^{5/4}(\mathbb{R}^3))$. Ce qui achève la démonstration de la Proposition 6.7 \square

Nous rappelons d'abord les estimations, uniformes par rapport à ε , obtenues dans la première partie sous les hypothèses (6.2) :

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\gamma(\xi) - 1}{\varepsilon^2} f^\varepsilon d\xi dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |B^\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E_L^\varepsilon|^2 dx \leq C(f_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Ensuite, la fonction de distribution est bornée par la donnée initiale pour toute les normes $L^p(\mathbb{R}^6)$

$$\|f^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \|f_0\|_{L^\infty}, \quad \|f^\varepsilon(t)\|_1 \leq \|f_0\|_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Enfin, en reprenant la démonstration de l'estimation sur le champ E_T , nous pouvons nous apercevoir que la condition de petitesse disparaît lorsque ε est suffisamment petit

$$\exists C_0 \in]0, 1[, \quad \varepsilon^{1/2} \mathcal{A}_0 \leq C_0.$$

Ainsi, pour tout $R > 0$, il existe une constante $C_R(f_0)$, ne dépendant que de la donnée initiale f_0 et R , telle que

$$\int_{B(0,R)} |E_T^\varepsilon(t)|^2 dx \leq 2 C_R(f_0) \varepsilon. \quad (6.-76)$$

De plus, le champ magnétique B est solution de l'équation de Poisson suivante au sens des distributions,

$$-\Delta B^\varepsilon = \varepsilon \nabla \times j^\varepsilon, \quad \nabla \cdot B^\varepsilon = 0.$$

En appliquant le Corollaire 6.3 et les inégalités d'interpolation sur la densité de courant j^ε , nous obtenons l'estimation : il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\|B^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \leq C \|\nabla B^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \leq C \|\varepsilon j^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^{6/5}} \leq C \|\varepsilon j^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^1}^{1/6} \|\varepsilon j^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^{5/4}}^{5/6}.$$

Ainsi, en appliquant le résultat de la Proposition 6.2 sur la densité de courant j et le Lemme 6.6, nous montrons l'existence d'une constante $C(f_0) > 0$, telle que

$$\|B^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \leq C(f_0) \varepsilon. \quad (6.-76)$$

À partir de ces estimations, nous montrons l'existence d'une sous suite toujours notée $(f^\varepsilon, E_L^\varepsilon, E_T^\varepsilon, B^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ et un couple (f, E) , tels que

$$f^\varepsilon(t, x, \xi) \rightharpoonup f(t, x, \xi) \text{ faiblement dans } L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)), \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

et en rappelant que la suite $(E_L^\varepsilon(t))_{\varepsilon>0}$ est compacte dans $\mathcal{L}_{loc}^{5/4}(\mathbb{R}^3)$, nous avons pour tout $R > 0$

$$E_L^\varepsilon(t, x) \rightarrow E(t, x) \text{ fortement dans } L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}^{5/4}(B(0, R))), \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

De plus, les estimations sur les champs $(E_T^\varepsilon, B^\varepsilon)$ montrent qu'ils convergent vers zéro fortement dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$.

Le passage à la limite dans les équations de Darwin ne pose pas de problème, puisque la convergence faible suffit. Nous obtenons alors

$$\nabla \cdot E = \rho, \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial t} = -j.$$

Le traitement du terme non linéaire de l'équation de Vlasov est rendu possible par la convergence forte des champs électromagnétiques. En effet, $\varepsilon |v(\xi)| \leq 1$ et d'après l'estimation (6.7) et (6.7) dans l'espace $\mathcal{L}_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ sur E_T^ε et B^ε , nous montrons qu'au sens des distributions

$$(E_T^\varepsilon + \varepsilon v^\varepsilon(\xi) \times B^\varepsilon) \nabla_v f^\varepsilon \rightarrow 0.$$

D'une part, la convergence forte dans $\mathcal{L}_{loc}^{5/4}(\mathbb{R}^3)$ du champ électrique longitudinal E_L^ε vers la limite E et d'autre part la majoration de f^ε pour toute les normes $L^p(\mathbb{R}^6)$ impliquent la convergence au sens des distributions

$$E_L^\varepsilon f^\varepsilon \rightarrow E f, \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Finalement le couple (f, E) est une solution faible de l'équation de Vlasov-Poisson.

Bibliography

- [1] A.A. Arsen'ev, Global Existence of a Weak solution of Vlasov's System of Equation. *Zh. vychisl. Mat. i. Mat. Fiz.* **15** (1975), 136–147.
- [2] K. Asano, On local solutions of the initial value problem for the Vlasov-Maxwell equation. *Comm. Math. Phys.* **106** (1986), 551–568.
- [3] C. Bardos et P. Degond, Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 space variables with small initial data. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **2** (1985), 101–118.
- [4] J. Bergh et J. Löfström. Interpolation spaces- An introduction. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **223**, Springer-Verlag, Berlin-New York (1976).
- [5] A. Bossavit, Electromagnetisme, en vue de la modelisation. *Gauthier-Villars, series in Applied Mathematics* (1994).
- [6] F. Bouchut, F. Golse et M. Pulvirenti, Kinetic equations and asymptotic theory. *Gauthier-Villars, series in Applied Mathematics* (2000).
- [7] J. Cooper et A. Klimas, Boundary Value Problems for the Vlasov-Maxwell Equation in One Dimension. *J. Math. Anal. Appl.* **75** (1980), 306–329.
- [8] C.G. Darwin, The dynamical motion of particles *Philosophical Magazine* **39** (1920), 537–571.
- [9] R. Dautray et J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique : pour les sciences et les techniques. *Masson* (1988).
- [10] P. Degond, Local existence of solutions of the Vlasov-Maxwell equations and convergence to the Vlasov-Poisson equations for infinite light velocity. *Math. Methods Appl. Sci.* **8** (1986), 533–558.
- [11] P. Degond et P.-A. Raviart, An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations. *Forum Math.* **4** (1992), 13–44.
- [12] R. Glassey et J. Schaeffer, On the “one and one-half dimensional” relativistic Vlasov-Maxwell system. *Math. Methods Appl. Sci.* **13** (1990), 169–179.
- [13] R. Glassey et J. Schaeffer, The “Two and one-half dimensional” relativistic Vlasov Maxwell system. *Comm. Math. Phys.* **185** (1997), 257–284.
- [14] R. Glassey et W. Strauss, Large velocities in the relativistic Vlasov-Maxwell equations. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **36** (1989), 615–627.
- [15] P. Grisvard, Elliptic problems in non smooth domains. *Monographs and Studies in Mathematics*, **24**, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA (1985).

- [16] L. Hörmander, Linear partial differential operators. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **116**, Springer-Verlag New York Inc., New York (1969).
- [17] S.V. Iordanskii, The Cauchy Problem for the Kinetic Equation of Plasma. *Amer. Math. Soc. Transl.* **35** (1964), 351–363.
- [18] R.J. DiPerna et P.-L. Lions, Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307** (1988), 306–329.
- [19] R.J. DiPerna et P.-L. Lions, Global existence of weak solution for the Vlasov-Maxwell system. *Comm. Pure Appl. Math.* **42** (1989), 729–757.
- [20] P.-L. Lions, B. Perthame, Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system. *Invent. Math.* **105** (1991), 415–430.
- [21] K. Pfaffelmoser, Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data. *J. Differ. Equations* **95** (1992), 281–303.
- [22] R. Robert, Unicité de la solution faible à support compact de l'équation de Vlasov-Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** (1997), 873–877.
- [23] J. Schaeffer, Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions. *Comm. Partial Differ. Equations* **16** (1991), 1313–1335.
- [24] E. Sonnendrücker, J.J. Ambrosiano et S. T. Brandon, A finite element formulation of the Darwin PIC model for use on unstructured grids. *J. Comput. Phys.* **121** (1995), 281–297.
- [25] R. Temam, Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis. *Studies in mathematics and its applications*, Amsterdam/New York/Oxford (1977).