Université de Rennes 1 **2005-2006**
UFR Mathématiques **Licence L3 – E01**

Feuille d'exercices de TD n°2

Exercice 1. Soit $\varepsilon > 0$, un petit paramètre. Analyser la résolution numérique par la méthode de Gauss, des systèmes suivants :

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon x + y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ \varepsilon x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (3) \quad \begin{cases} x + \dfrac{1}{\varepsilon} y = \dfrac{1}{2\varepsilon} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Conclusion ?

Exercice 2. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(a) \begin{cases} 9x + 8y &= 17 \\ 10x + 9y &= 19 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 9x + 8y &= 17,05 \\ 10x + 9y &= 18,95 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 9x + 8,1y &= 17 \\ 9,9x + 8,9y &= 19 \end{cases}$$

Conclusion ?

Exercice 3.

1) On se donne une matrice diagonale $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que l'on suppose définie positive et une matrice $Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que l'équation

$$DX + XD = Y$$

admet une solution et une seule $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, et que l'on a la majoration

$$\|X\|_F \leq \frac{1}{2} \|D^{-1}\|_2 \|Y\|_F.$$

2) Soit $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice unitaire, et $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Que peut-on dire de $\|UM\|_F$, $\|MU\|_F$ et $\|M\|_F$? Que peut-on dire de $\|UM\|_2$, $\|MU\|_2$ et $\|M\|_2$?

3) On se donne une matrice hermitienne définie positive $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une matrice $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que l'équation

$$HM + MH = B$$

admet une solution et une seule $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, et que l'on a la majoration

$$\|M\|_F \leq \frac{1}{2} \|H^{-1}\|_2 \|B\|_F.$$

4) Soit S et T deux matrices hermitiennes définies positives. Monter que

$$\|S - T\|_F \leq \|(S + T)^{-1}\|_2 \|S^2 - T^2\|_F.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4.}}$
On note $\mathscr{D}_d$ l'ensemble des matrices $A \in \mathbb{R}^{d,d}$ (de coefficient générique a_{ij}) telles que $\forall i = 1, \ldots, d$, on ait $\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{d} |a_{ij}| \leq a_{ii}$. On note $\mathscr{M}_d$ le sous-ensemble des matrices $A \in \mathscr{D}_d$ qui vérifient, pour tout $i \neq j$, $a_{ij} \leq 0$. On s'intéresse à l'équation

$$(1) \qquad\qquad (I + \alpha A)\, x = y, \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R},\ x,\, y \in \mathbb{R}^d.$$

1) Montrer que, si l'on suppose $\alpha \geq 0$ et $A \in \mathscr{D}_d$, alors les solutions de (1) vérifient $\|x\|_\infty \leq \|y\|_\infty$. En déduire que la matrice $(I + \alpha A)$ est inversible.
Que peut-on dire de $\left\|(I + \alpha A)^{-1}\right\|_\infty$?

Indication : on pourra majorer $(1 + \alpha a_{ii})\, |x_i|$ *en fonction de* $\|y\|_\infty$, α, a_{ii} *et* $\|x\|_\infty$.

2) On suppose maintenant que l'on a $\alpha \geq 0$, $A \in \mathscr{M}_d$ et, $\forall i = 1, \ldots, d$, $y_i \geq 0$. Montrer que, si (1) est vérifié, l'on a alors $\forall i = 1, \ldots, d$, $x_i \geq 0$. En déduire que les coefficients de la matrice $(I + \alpha A)^{-1}$ sont positifs.

Indication : en raisonnant par l'absurde, on pourra minorer $(1 + \alpha a_{ii})x_i$ *en fonction de* $m = \min\limits_{1\leq j\leq d} x_j$ *lorsque l'on a* $m < 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5.}}$ Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n. Dans cet exercice, on dit que A admet une décomposition LDL^T si il existe une matrice carrée d'ordre n triangulaire inférieure L telle que $L_{ii} = 1$ pour $i = 1, \cdots, n$, et une matrice diagonale D telle que $D_{ii} = d_i > 0$ pour $i = 1, \cdots, n$, avec $A = LDL^T$.

1) Soit A une matrice admettant une décomposition LDL^T. Vérifier que la matrice A est symétrique. En évaluant $(Ax, x) = x^T Ax$, montrer que A est définie positive.

2) Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n. Elle admet une décomposition de Choleski $A = BB^T$ avec B une matrice triangulaire inférieure. On note Δ la matrice diagonale définie par $\Delta_{ii} = B_{ii}$ pour $i = 1, \cdots, n$.

a) Montrer que Δ est inversible. Calculer les éléments diagonaux de $B\Delta^{-1}$.

b) Montrer que A admet une décomposition LDL^T.

c) Montrer que la décomposition LDL^T est unique.

3-a) En posant le problème sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -2 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & \beta' & 1 & 0 \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \beta' & \gamma' \\ 0 & 0 & 1 & \gamma'' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

déterminer la décomposition LDL^T de A.

b) Utiliser cette décomposition pour résoudre le système :

$$Ax = b \qquad \text{avec} \qquad b = (-2, -6, 5, -16)^T.$$

Exercice 6. On considère la matrice $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $d \geq 3$, définie par

$$\begin{array}{lll}
 & a_{11} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{i,i} = 3 & \text{pour } i = 3, \dots, d \\
 & a_{12} = a_{21} = -1,\ a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 0 & \text{pour } i = 2, \dots, d-1 \\
 & a_{i,i+2} = a_{i+2,i} = -1 & \text{pour } i = 1, \dots, d-2 \\
\text{et} & a_{i,j} = 0 & \text{pour toutes les autres valeurs de } i \text{ et } j.
\end{array}$$

1) Donner de manière précise un algorithme de résolution du système linéaire $Ax = b$. Quel est le nombre d'opérations nécessaires ? Montrer que la matrice A est définie positive.

Indication : on explicitera la factorisation LL^T de Choleski ou la factorisation LU de Crout de la matrice A.

2) En utilisant cet algorithme, montrer que si toutes les composantes de b sont positives, il en est de même de celles de x. En déduire que les coefficients de A^{-1} sont tous positifs.

3) Soit e le vecteur de $\mathbb{R}^d$ tel que $e^T = (1, 1, \dots, 1)$, montrer que l'on a

$$\left\| A^{-1} \right\|_\infty = \left\| A^{-1} e \right\|_\infty .$$

En déduire la valeur du nombre de condition $C_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty$, pour les valeurs $d = 4$ et $d = 5$.

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique définie positive, on note LL^T sa factorisation de Choleski.

1) Montrer que le calcul des coefficients sous-diagonaux L_{ik} ($k = 1, \dots, i-1$, $i = 2, \dots, d$) peut s'effectuer comme la résolution d'un système linéaire triangulaire inférieur que l'on précisera.

2) En déduire qu'à l'exception du produit scalaire, de l'addition et de l'extraction de racine carrée nécessaires au calcul des coefficients diagonaux L_{ii}, $i = 1, \dots, d$, la résolution du système linéaire $Ax = b$ par la méthode de Choleski se ramène la résolution de d systèmes triangulaires inférieurs de rangs $1, \dots, d$ et d'un système triangulaire supérieur de rang d.

N.B. On peut faire une présentation analogue de l'algorithme de factorisation LU.

Exercice 8. Soit A une matrice inversible d'ordre n et soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1) Démontrer que $A + uv^T$ est une matrice inversible si et seulement si

$$1 + v^T A^{-1} u \neq 0.$$

2) On suppose désormais que $v^T A^{-1} u \neq -1$.
Pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, vérifier que si $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ sont les solutions respectives des 2 systèmes linéaires suivants :

$$Ax = b,$$

$$(A + uv^T)y = b,$$

on a

$$v^T x = (1 + v^T A^{-1} u) v^T y,$$

$$y = x - \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u} A^{-1} u v^T x.$$

3) En déduire

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1}\left(A - \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u} uv^T\right) A^{-1}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 9.}}$

1) Soit A une matrice inversible d'ordre n et U, B, V trois matrices rectangulaires de dimensions (n, p), (p, q), (q, n) respectivement.
Lorsque la matrice $(A + UBV)$ est inversible, on se propose d'établir :

$$(A + UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I_p + BVA^{-1}U)^{-1}BVA^{-1}.$$

Dans le cas particulier où $p = q = 1$, montrer que le résultat a été établi à l'exercice précédent.
En adaptant la technique de démonstration, établir le résultat dans le cadre général.

2) Application : Soit A une matrice d'ordre n partagée en 4 blocs de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

où A_1 est de dimension $k \times k$. On en déduit les dimensions des autres blocs, $k \times (n-k)$, $(n-k) \times k$, et $(n - k) \times (n - k)$.
On suppose les matrices A, A_1 et A_4 inversibles. Exprimer A^{-1} en fonction des matrices A_1^{-1}, A_2, A_3, A_4^{-1}.