

NOTES DU COURS DE TOPOLOGIE EN M1 ESR UPS 2019

FRANCESCO COSTANTINO

CONTENTS

1. Introduction	1
2. Rappels de topologie générale	2
3. Rappels sur les fonctions lisses en \mathbb{R}^n	13
4. Variétés différentiables	16
5. Variétés orientées et degré des applications	25
6. Formes différentielles	27
7. Le groupe fondamental et les revêtements	36
8. Homologie singulière	47
References	53

1. INTRODUCTION

La topologie est la branche des mathématiques qui s'intéresse à la "forme des espaces". On définit un espace topologique d'une manière très abstraite, et on définit une relation d'équivalence sur ces espaces ("être homéomorphes") qui est à la fois faible et restrictive. On plaisante parfois que pour un topologue une sphère et un cube sont la même chose : plus formellement ils sont homéomorphes. Comme l'on voit cette relation est donc faible car elle oublie toute propriété géométrique des espaces. Mais en même temps elle est fine car elle donne lieu à des distinctions entre les espaces ayant différentes formes (pour un topologue une sphère n'est pas la même chose qu'un tore).

L'intérêt d'étudier une relation si faible est la force de la topologie qui désormais est appliquée et utilisée en plusieurs domaines même hors des mathématiques pures. Par exemple en la théorie de la computation quantique l'on utilise la théorie des tresses (des particuliers objets topologiques) comme un des modèles pour l'ordinateur quantique exactement parce-qu'en déformant une tresse on ne la change pas ("stabilité topologique"). En statistiques l'on étudie la "forme" des nuages des points par leur "homologie persistente", parce que les informations qu'on en tire ne dépendent pas des métriques qu'on a choisi sur les données (unités, échelles). En physique de la matière le dernier prix Nobel a été attribué à des chercheurs ayant obtenu

des nouveaux résultats sur les “états topologiques de la matière”. En relativité générale la forme de l’espace temps est objet d’étude aussi par le biais des relations entre géométrie et topologie en petite dimension. En physique théorique plusieurs modèles pour la gravité quantique sont basés sur des “théories topologiques des champs” exactement car elles ne dépendent pas de la géométrie.

En mathématique la topologie est à la base des études d’analyse fonctionnelle, de topologie algébrique, de géométrie algébrique, théorie des catégories, de topologie différentielle et de géométrie riemannienne et symplectique.

Dans ce cours nous allons d’abord rappeler les notions de base d’espace topologiques (et ses différents axiomes de séparabilité, dénombrabilité, compacité et connexité) et de fonctions continues. La plus part de ces notions aura été déjà vue en le cours de topologie en L3. Puis, après avoir rappelé des résultats de base sur les fonctions en plusieurs variables réelles, nous allons définir la notion de variété différentiable, de fonctions entre variétés, de différentiel d’une fonction et d’espace tangent. Nous allons définir la notion de variété à bord et prouver le théorème du point fixe de Brouwer; puis nous définirons le degré d’une fonction entre variétés et prouverons son invariance par homotopie. Nous passerons en suite à parler de champs de vecteurs et leur flots. Nous reviendrons par la suite à des espaces topologiques plus généraux : nous définirons la notion d’homotopie et de groupe fondamental. Nous étudierons les revêtements, et leurs liens avec les groupes fondamentaux.

Dans la dernière partie du cours nous nous intéresserons à la théorie de l’homologie simpliciale et si le temps le permet singulière, qui est à la base de la topologie algébrique.

2. RAPPELS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

2.1. Définitions de base. Dans cette section nous allons d’abord définir les “objets de base” : les espaces topologiques. Puis nous définirons leurs “morphisme” : les fonctions continues. Puis leurs “sous-objets”, leurs “objets quotients” et le produit d’espaces topologiques. Nous donnerons des premiers exemples d’espaces topologiques particulièrement “joli” : ceux venant d’espaces métriques.

Définition 2.1 (Espace topologique). Soit X un ensemble; on note $\mathcal{P}(X)$ l’ensemble des parties de X , c’est à dire l’ensemble des sous-ensembles de X . Une *topologie* sur X est un un sous ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ dont les éléments sont dits les “ouverts” de X qui satisfait les conditions suivantes :

- (1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$;
- (2) Si $U_i, i \in I \in \mathcal{T}$ alors $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$;
- (3) Si $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ alors $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Un espace topologique est une couple (X, \mathcal{T}) où \mathcal{T} est une topologie sur X , (mais en général on parle d'un espace topologique X , sans expliciter un nom pour \mathcal{T} .) Si $U \in \mathcal{T}$ alors U^c est dit un *fermé*.

Exemple 2.2. La *topologie triviale* sur X est $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}(X)$. La *topologie discrète* sur X est $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Exercice 2.3. Faire la liste de toutes les topologies possibles sur l'ensemble $X_2 = \{1, 2\}$ et puis sur l'ensemble $X_3 = \{1, 2, 3\}$.

Définition 2.4 (Métrique). Une métrique sur un ensemble X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que : $d(x, y) = 0 \iff x = y$, $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$ et $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, $\forall x, y, z \in X$. Pour tout $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}$ on appelle boule ouverte de centre x et rayon r l'ensemble $B(x; r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. Un espace métrique est une couple (X, d) où d est une métrique sur X .

Lemme 2.5. Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble U de X est "ouvert" si $\forall x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x; r) \subset U$. Alors, l'ensemble des ouverts forme une topologie sur X , dite la topologie induite par la métrique.

Exercice 2.6. Prouver le lemme.

Exemple 2.7. Si on prend $X = \mathbb{R}^n$ et d la métrique associée à la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n alors on trouve la topologie "standard". Mais si on prend une autre norme sur \mathbb{R}^n et d la métrique qui lui est associé, grâce au fait que deux normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes, on a que les topologies induites sont les mêmes : la topologie de \mathbb{R}^n donc est "plus fondamentale" que la métrique qui l'induit.

On a la suivante :

Définition 2.8. On dit qu'un espace topologique (X, \mathcal{T}) est métrisable s'il existe une métrique d dont la topologie induite est \mathcal{T} .

Remarque 2.9. En général les espaces topologiques ne sont métrisables que s'ils satisfont certaines conditions que nous détaillerons par la suite.

Définition 2.10 (Fonctions continues). Soit X, Y deux espaces topologiques. Une fonction continue $f : X \rightarrow Y$ est une application telle que $\forall U \in \mathcal{T}(Y)$ son image inverse $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X .

Exercice 2.11. Montrer que l'identité est une application continue et que si $f : X \rightarrow Y$ est continue et $g : Y \rightarrow Z$ est continue alors $g \circ f : X \rightarrow Z$ est continue.

Si les fonctions continues sont les "morphisme" des espaces topologiques. Les homéomorphismes sont les "isomorphismes" :

Définition 2.12 (Homéomorphismes). Un homéomorphisme $f : X \rightarrow Y$ est une bijection continue avec inverse continue.

Définition 2.13 (Topologie induite). Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble. La topologie induite sur Y est celle dont les ouverts sont $U \cap Y, \forall U \in \mathcal{T}$.

Exercice 2.14. Montrer que la topologie induite sur Y est bien une topologie sur Y et que l'inclusion $i : Y \rightarrow X$ est continue si l'on munit Y de cette topologie.

Définition 2.15 (Topologie quotient). Soit $x \sim y$ une relation d'équivalence sur un espace topologique X et soit $Y = X/\sim$. Notons $[x] \in Y$ la classe d'équivalence d'un point $x \in X$ et $\pi : X \rightarrow Y$ la projection au quotient. La *topologie quotient* sur Y est celle dont les ouverts sont les $U \subset Y$ tels que $\pi^{-1}(U) \subset X$ est un ouvert. De façon équivalente, ce sont les projections dans Y des ouverts saturés par la relation d'équivalence.

Exercice 2.16. Montrer que la topologie quotient est bien une topologie et que l'application π est continue si l'on munit Y de cette topologie.

Exemple 2.17. Sur \mathbb{R} soit $x \sim y \iff x^2 + y^2 > 0$ et $xy > 0$ ou $x = y = 0$. Le quotient a 3 points $\{[-1][0], [1]\}$ où $\{[0]\}$ est un fermé $\{[1]\}$ et $\{[-1]\}$ sont des ouverts. Cette topologie n'est pas $T1$ (voir après) car $\{[1]\}$ n'est pas un fermé.

Exemple 2.18. Sur \mathbb{R}^n soit $x \sim y$ ssi $x - y \in \mathbb{Z}^n$. Alors \mathbb{R}^n/\sim est le tore de dimension n noté T^n .

Définition 2.19 (Produit d'espaces topologiques). Soit X, Y deux espaces topologiques; la topologie produit sur $X \times Y$ est celle dont les ouverts sont les sous-ensembles W de $X \times Y$ tels que si $x \times y \in W$ alors il existe ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$ avec $x \in U$ et $y \in V$ tels que $U \times V \subset W$.

Remarque 2.20. On verra par la suite que cela équivaut à dire que la topologie produite est engendrée par les produits d'ouverts.

2.2. Prebases et bases.

Exercice 2.21. Montrer que si \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont deux topologies sur X alors aussi $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ l'est.

Définition 2.22 (Prebase). Soit $A \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble. On définit la "topologie engendrée par A " comme l'intersection de toutes les topologies qui contiennent A (pourquoi existe-t-il de telles topologies?). On appelle A une prebase de cette topologie.

Exercice 2.23. Soit (X, d) et $A \subset \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des boules ouvertes dans X . Montrer que la topologie engendrée par A est celle induite par la métrique d .

Exemple 2.24. La topologie standard de \mathbb{R}^n (celle induite par la métrique euclidienne) est engendrée par les boules ouvertes.

Définition 2.25 (Bases et voisinages). Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique. On dit qu'un sous-ensemble $V \subset X$ est un *voisinage* d'un autre ensemble $E \subset X$ s'il existe un ouvert U tel que $E \subset U \subset V$. En particulier, $\forall x \in X$ on note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x .

Une base de X est un ensemble \mathcal{B} d'ouverts de X tel que tout ouvert est une union d'éléments de \mathcal{B} . Une base locale autour de $x \in X$ est un sous-ensemble $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ tel que $\forall V \in \mathcal{V}(x) \exists b \in \mathcal{B}(x)$ tel que $b \subset V$.

Définition 2.26 (Cloture, partie intérieure, et adhérence). La cloture d'un ensemble $E \subset X$, notée \overline{E} , est l'intersection des fermés qui contiennent E . Sa partie intérieure, notée $\overset{\circ}{E}$ est l'union des ouverts contenus dans E . L'adhérence de E est $\overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$. Un point x est d'accumulation pour E si tout ouvert U qui contient x contient aussi un point $y \in E \setminus \{x\}$.

2.3. Axiomes de séparabilité et de dénombrabilité. Comme on l'a remarqué avant, pas tous les espaces topologique sont "joli". Notamment en opérant des quotients topologiques on peut obtenir des espaces plus compliqués. Afin de définir proprement ce qu'on entend par "joli" nous allons par la suite donner une liste de propriété que l'on souhaite d'un espace topologique.

Définition 2.27. Soit X un espace topologique. On dit que X est :

- (1) $T1$ $\forall x \neq y \in X, \exists U \in \mathcal{T}$ qui contient x mais pas y .
- (2) $T2$ ou "Hausdorff" si : $\forall x \neq y \in X$ il existe ouverts disjoints U, V tels que $x \in U, y \in V$.
- (3) $T3$ s'il est $T1$ et de plus $\forall x \in X$ et pour tout fermé $C \subset X$ t.q. $x \notin C$, il existe ouverts disjoints U, V tels que $U \ni x$ et un ouvert V qui contient $C \subset V$.
- (4) $T4$ s'il est $T1$ et de plus $\forall C_1, C_2 \subset X$ fermés disjoints, il existe ouverts U, V disjoints et contenant respectivement C_1 et C_2 .

Exercice 2.28. Prouver que X est $T1$ ssi tous ses points sont des fermés.

Exercice 2.29. Prouver que si X est $T2$ alors il est aussi $T1$, s'il est $T3$ il est aussi $T2$ et que s'il est $T4$ il est aussi $T3$.

Exercice 2.30. Montrer qu'un sous-espace d'un espace Hausdorff est Hausdorff.

Lemme 2.31 (Lemme de Urysohn). Soit X un espace $T4$, et $C_0, C_1 \subset X$ deux fermés. Alors il existe une fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f|_{C_0} = 0$ et $f|_{C_1} = 1$.

Proof. Idée : on va construire des ouverts $U_p, p \in \mathbb{Q}$ tels que $\forall p < q$ on a $\overline{U_p} \subset U_q$, puis on définit $f : X \rightarrow [0, 1]$ comme $f(x) = \inf\{q_i | x \in U_{q_i}\}$. On vérifie ensuite que f est continue et a la propriété souhaitée.

D'abord on numérote les rationnels dans $[0, 1]$ de sorte que $q_0 = 0, q_1 = 1$. On définit U_0 comme un ouvert qui sépare C_0 de C_1 et $U_1 = X \setminus C_1$. Puis U_{q_n} comme un ouvert qui sépare $\overline{U_{\max\{q_i | q_i < q_n, i < n\}}}$ de $X \setminus U_{\min\{q_i | q_i > q_n, i < n\}}$. On remarque que U_{q_n} contient tout $U_{q_i}, q_i < q_n$ et est contenu dans tout $U_{q_i}, q_i > q_n$. Maintenant $f(x)$ est continue car $\forall c < f(x) < d$ on peut trouver $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tels que $c < q_1 < f(x) < q_2 < d$ et un ouvert contenu dans $f^{-1}(]c, d[)$ est $U_{q_2} \setminus \overline{U_{q_1}}$. \square

Définition 2.32 (Axiomes de dénombrabilité et séparabilité). On dit qu'un espace est *C1* si $\forall x \in X$ il existe une base locale dénombrable autour de x . Il est *C2* s'il existe une base dénombrable de X . Il est *séparable* s'il existe un sous-ensemble dénombrable de X qui est *dense*, c'est à dire qui intersecte tout ouvert non-vide de \mathcal{T} .

Exercice 2.33. Montrer qu'un sous-espace fermé d'un espace à base dénombrable est à base dénombrable.

2.4. Existence de métriques.

Exercice 2.34. Montrer qu'un espace métrique est *T1, T2, T3*. Puis, montrer qu'il est aussi *T4*. Montrer qu'il est aussi *C1*.

Exercice 2.35. Montrer que tout espace *C2* et *T3* est aussi *T4*.

Théorème 2.36 (Urysohn). *Soit X espace topologique *T3* et *C2*. Alors il est métrisable.*

Proof. Nous en donnons un esquisse. D'abord on remarque que tout espace *C2* et *T3* est aussi *T4*. Puis on utilise le Lemme 2.37, et on obtient une collection dénombrable $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ de fonctions continues $f_n : X \rightarrow [0, 1]$. L'application $f : X \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ ainsi obtenue est injective. De plus $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ avec la métrique $d_0((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \sup(\{|x_i - y_i|})$ est un espace métrique. On montre que f est continue (exercice) et que pour tout ouvert $U \subset X$ $f(U) \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$ est ouvert. En effet si $z_0 = f(x_0) \in f(U)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x_0) \neq 0$ et $f_n|_{X \setminus U} = 0$. Mais alors l'ouvert $W_n := f(X) \cap \pi_n^{-1}(0, \infty)$ (où $\pi_n : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ est la projection sur la n^{eme} coordonnée) est contenu dans U et contient z_0 , ce qui prouve que $f(U)$ est ouvert. L'application f est alors un plongement: on définit alors une métrique sur X par $d(x, y) := d_0(f(x), f(y))$. \square

Lemme 2.37. *Soit X un espace *C2* et *T4*. Alors il existe une famille dénombrable de fonctions continues $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ telle que pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage U de x_0 il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x_0) \neq 0$ et $f_n|_{X \setminus U} = 0$.*

Proof. Puisque X est $C4$ on peut trouver deux ouverts B_n et B_m dans la base dénombrable tels que $x \in \overline{B_m} \subset B_n \subset U$. Alors par le Lemme d'Urysohn il existe une fonction continue $f_{m,n}$ qui vaut 1 sur B_m et 0 à l'extérieur de B_n . \square

Remarque 2.38. Le lemme d'Urysohn donne une condition suffisante mais pas nécessaire. En effet si on prend par exemple \mathbb{R} avec la topologie discrète il est métrisable mais pas $C2$.

2.5. Compacité et connexité.

Définition 2.39. Un recouvrement d'un espace topologique X est un ensemble d'ouverts $U_i, i \in I$ tel que $\cup_{i \in I} U_i = X$. Il est *localement fini* si $\forall x \in X \# \{i | x \in U_i\}$ est fini. Il est fini si I est fini. Un sous-recouvrement de $\{U_i\}$ est un ensemble $\{U_j\}, j \in J \subset I$.

Définition 2.40 (Compacité). Un espace topologique est *compact* si tout recouvrement contient un sous-recouvrement fini. Il est *paracompacte* si tout recouvrement contient un sous-recouvrement localement fini. Il est *localement compact* si tout $x \in X$ admet une base de voisinages relativement compactes (c'est à dire dont la clotûre est compacte).

Exercice 2.41. Si $C \subset X$ est un sous-ensemble compact et X est Hausdorff, alors C est fermé.

Exercice 2.42. Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue et X est compact alors $f(X)$ est compact.

Exercice 2.43. Montrer que si X est un espace métrique alors un compact $C \subset X$ est fermé et borné (i.e. contenu dans une boule de rayon fini). Montrer que la réciproque est vraie dans \mathbb{R} . En déduire qu'une application continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

Exercice 2.44. Montrer que si X est un espace métrique localement compact alors un fermé borné compact $C \subset X$ est compact.

Exercice 2.45. Montrer que si X est un espace métrique compact, alors toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a au moins un point d'accumulation.

Exercice 2.46. Soit $X = L^2([0, 1])$ montrer que la boule unité de X n'est pas compacte.

Lemme 2.47 (Lemme de Baire). *Soit X un espace topologique Hausdorff localement compact. Alors l'intersection d'une quantité dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Proof. Soit $x \in X$ et C_0 un voisinage compact de x . Alors il existe $x_1 \in \overset{\circ}{C}_0 \cap U_1$ et un voisinage compacte C_1 de x_1 contenu dans $\overset{\circ}{C}_0 \cap U_1$. Par récurrence,

on définit $x_n \in \overset{\circ}{C}_{n-1} \cap U_1 \cap \dots \cap U_n$ et son voisinage compact $C_n \subset \overset{\circ}{C}_{n-1} \cap U_1 \cap \dots \cap U_n$. On a donc une suite emboîtée de compacts. Leur intersection est non-vidée car autrement $\{C \setminus C_i, i \in \mathbb{N}\}$ serait un recouvrement de C par ouverts n'admettant pas un sous-recouvrement fini. Un point dans leur intersection est donc dans l'intersection de C et de tous les U_i . \square

Remarque 2.48. L'énoncé est faux si on ne fait pas l'hypothèse de dénombrabilité de l'ensemble des ouverts : prenez $X = \mathbb{R}$ et $U_x = \mathbb{R} \setminus \{x\}$: les ouverts $\{U_x, x \in \mathbb{R}\}$ sont denses mais leur intersection est vide.

On a le suivant :

Théorème 2.49 (Théorème de Tychonoff). *Le produit de n'importe quelle quantité d'espaces topologiques compacts, est compact.*

Définition 2.50 (Connexité). Un espace topologique X est connexe s'il n'est pas l'union de deux ouverts disjoints.

Exercice 2.51.

- Si $x \in X$ et C_1, C_2 sont deux sous-ensembles connexes de X qui le contiennent, alors $C_1 \cup C_2$ est connexe.
- Si $C \subset X$ est connexe alors \overline{C} est connexe.

Définition 2.52 (Composante connexe). Grâce à l'exercice 2.51 tout point de X est contenu dans un connexe maximal qui le contient et ce connexe est un fermé : c'est ce qu'on appelle une *composante connexe* de X .

Remarque 2.53. Les composantes connexes de X forment une partition de X en fermés. S'il y a un nombre fini de composantes connexes pour X alors chaque composante connexe est aussi ouverte. Un espace topologique X est connexe si sa seule composante connexe est X .

Définition 2.54. Un espace topologique est *localement connexe* si tout point admet une base de voisinages connexes.

Un espace topologique est *connexe par arcs* si $\forall x, y \in X$ il existe une application continue $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$.

Il est *localement connexe par arc* si tout point admet une base de voisinages connexes par arcs.

Exercice 2.55. Montrer que dans un espace localement connexe les composantes sont des ouverts.

Exercice 2.56. Montrer que si X est un espace connexe et $f : X \rightarrow Y$ est continue alors $f(X)$ est contenu dans une seule composante connexe de Y .

Exercice 2.57. Exhiber un exemple d'espace qui soit localement connexe mais pas connexe.

Exercice 2.58. Montrer que l'espace

$$[0, 1] \times \{0\} \cup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \cup \{0\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$$

est connexe et connexe par arcs mais pas localement connexe ni localement connexe par arcs.

Exercice 2.59. Exhiber un exemple d'espace qui soit connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 2.60. Montrer qu'un espace qui soit connexe par arcs est aussi connexe. En conclure qu'un espace qui soit localement connexe par arcs est aussi localement connexe.

Exercice 2.61. Montrer qu'un espace qui soit connexe et localement connexe par arcs est aussi connexe par arcs.

2.6. Espaces métriques complets. Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 2.62. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si $\forall \epsilon > 0 \exists N$ s.t. $d(x_n, x_m) < \epsilon \forall n, m > N$. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$. Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy converge vers un point limite dans X .

Proposition 2.63 (Completion métrique). *Soit (X, d) un espace métrique. Il existe un espace métrique (X', d') complet et une application $i : X \rightarrow X'$ qui est isométrique (i.e. $d'(i(x), i(y)) = d(x, y) \forall x, y \in X$). De plus parmi tous les triplets (X', d', i) comme ci dessus, il y en a un "universel" au sens que si (X'', d'', i'') est un autre triplet alors il existe une application isométrique $f : X' \rightarrow X''$ telle que $f \circ i = i''$.*

Proof. Soit

$$X' = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X \text{ de Cauchy}\} / \sim$$

où deux suites de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\forall \epsilon \exists N$ s.t. $d(x_n, y_m) < \epsilon \forall n, m > N$. On définit une métrique sur X' par

$$d'((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

(exercice: c'est bien défini et c'est une métrique). On montre que X' est complet : si $((x_n^m)_{n \in \mathbb{N}})_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de X' (une suite de classes d'équivalence de suites de Cauchy dans X) alors on définit une suite diagonale $(x_n^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on vérifie qu'elle est de Cauchy. Donc elle représente un point de X' et ce point est la limite de la suite donnée. L'espace (X', d') est donc complet. L'application $i : X \rightarrow X'$ est définie par $i(x) = (x)_{n \in \mathbb{N}}$ (la suite constante x). L'universalité est alors vérifiée facilement. \square

Lemme 2.64 (Lemme de Baire). *Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors l'intersection d'une quantité d'ouverts denses est dense.*

Proof. Il s'agit d'imiter la preuve de la version donnée pour les espaces localement compacts : au lieu des C_i prenez des boules de rayons décroissant vers 0 et emboîtées. La suite de leurs centres est de Cauchy donc elle converge à un point qui est dans tous les U_i . \square

2.7. Exemples clés.

2.7.1. *Espaces de Banach.* Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel. On rappelle qu'une norme est par définition une application telle que :

$$\|x\| = 0 \iff x = 0, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

La métrique induite par la norme est $d(v, w) := \|v - w\|$; la topologie induite par cette métrique est aussi dite "topologie forte". Un espace de Banach est un espace vectoriel normé, qui est complet par rapport à la métrique de la norme.

Exercice 2.65. Deux normes sur V sont équivalentes s'il existe des constantes positives telles que $c_1\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq c_2\|v\|_1 \forall v \in V$. Montrer que les topologies induites par deux normes équivalentes sont les mêmes.

Exercice 2.66. Montrer que deux normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes.

Exercice 2.67. Soit $V = C^0([0, 1]; \mathbb{R})$. Montrer que les norme $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2.68. Montrer que si (X, d) est un espace métrique et $C \subset X$ est un compact, alors toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de C admet une sous-suite convergente dans C .

Exercice 2.69. Montrer que la boule unité de $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas compacte.

Définition 2.70 (Topologie faible). La topologie faible sur $L^2(\mathbb{R})$ est celle engendrée par les ouverts $f^{-1}(]a, b[)$ où $f : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est $f(y) = \langle x, y \rangle$ pour quelque $x \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2.71. Montrer que tout ouvert de la topologie faible est aussi un ouvert de la topologie forte.

Exercice 2.72. Montrer que la boule unité est fermée dans $L^2([0, 1])$ avec la topologie forte et aussi avec la topologie faible.

Exercice 2.73 (Théorème de Banach-Alaouglu). Pour tout $f \in L^2([0, 1])$ soit $\langle f, \cdot \rangle : L^2([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire de produit scalaire avec f . Soit aussi B la boule unité de $L^2([0, 1])$. Montrer que $x \rightarrow \times_{f \in B} \langle f, x \rangle$ est un homéomorphisme de $L^2([0, 1])$ muni de la topologie faible avec son image dans $\mathbb{R}^{L^2([0, 1])}$ et que l'image de B est contenue dans $[-1, 1]^{L^2([0, 1])}$. En appliquant le théorème de Tychonoff en conclure que la boule unité est compacte par rapport à la topologie faible de $L^2([0, 1])$.

Remarque 2.74. Nous avons formulé le théorème de Banach-Alaouglu seulement pour un espace de Hilbert mais en général il dit que la boule unité du dual d'un espace de Banach est compacte pour la topologie faible $*$.

Exercice 2.75. Montrer que la topologie faible est strictement plus faible que la topologie forte sur $L^2([0, 1])$.

2.7.2. *Topologie de Zariski.* Soit k un corps (pensez à \mathbb{C} pour faire simple) et $k[x_1, \dots, x_n]$. On définit une topologie sur k^n par: les fermés sont les lieux de zéro d'un idéal de polynômes dans $k[x_1, \dots, x_n]$.

Exercice 2.76. Montrer que cela définit bien une topologie.

Exercice 2.77. Montrer que pour $k = \mathbb{C}$ cette topologie n'est pas Hausdorff, donc pas métrisable.

Exercice 2.78. Montrer que si $k = \mathbb{C}$ ou $k = \mathbb{R}$ la topologie de Zariski est moins fine que la topologie standard sur \mathbb{C}^n (resp. \mathbb{R}^n), c'est à dire tout ouvert de Zariski est aussi un ouvert standard, mais pas la réciproque.

La topologie de Zariski est cruciale dans la géométrie algébrique, la branche de la géométrie qui étudie les "variétés algébriques" définies par des équations polynomiales. Remarquez que k peut être un corps quelconque, par exemple F_p . L'étude des courbes sur un corps fini a plusieurs applications, comme la cryptographie ou la théorie des codes à correction d'erreurs.

2.7.3. *Graphes.*

Définition 2.79 (Graphe orienté). Un *graphe orienté* est la donnée d'un ensemble V de "sommets" et \vec{E} d'"arêtes orientées" avec deux applications $\partial_+ : \vec{E} \rightarrow V$ (resp. $\partial_- : \vec{E} \rightarrow V$) qui associent à chaque $\vec{e} \in \vec{E}$ son sommet d'arrivée (resp. de début). Sa topologie est la topologie quotient sur l'union disjointe de $\#\vec{E}$ copies de $[-1, 1]$ où pour tout i , en notant x_i le nombre $x \in [-1, 1]$ appartenant à la $i^{\text{ème}}$ copie de $[-1, 1]$, l'on identifie $\epsilon 1_i$ (où $\epsilon \in \pm$) à $\eta 1_j$ si $\partial_\eta(1_j) = \partial_\epsilon(1_i)$.

Un *graphe non orienté* est la donnée $G = (V, \vec{E}, \partial_\pm, \sigma)$ où $D\vec{G} := (V, \vec{E}, \partial_\pm)$ est un graphe orienté et $\sigma : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ est une involution sans points fixes telle que $\partial_\pm \circ \sigma = \partial_\mp$. La topologie du graphe G est la topologie quotient sur $D\vec{G}$ par la relation d'équivalence

$$x_e \sim -x_{\sigma(e)} \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \forall e \in \vec{E}.$$

Les "arêtes non orientées" de G sont les orbites de σ . Les boucles sont les orbites des arêtes $e \in \vec{E}$ telles que $\partial_+(e) = \partial_-(e)$. On dit qu'une arête connecte v et $v' \in V$ si $\{\partial_-e, \partial_+e\} = \{v, v'\}$.

Si G est un graphe (orienté ou pas) il est *simple* si il n'a pas de boucles et si deux sommets différents sont liés par au plus une arête (orientée ou pas).

Exercice 2.80. Montrer que si V et E sont finis, on peut décrire ∂_{\pm} par une matrice symétrique à coefficients entiers à $\#V$ colonnes. Comment ?

2.7.4. Complexes simpliciaux.

Définition 2.81 (Simplexes dans \mathbb{R}^n). On dit que k points $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ sont affinement indépendants si

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0 \implies \alpha_i = 0 \forall i.$$

Une combinaison barycentrique de x_1, \dots, x_{k+1} est tout point de la forme : $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i$ avec $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$ et $\alpha_i \in [0, 1] \forall i$.

Soit $k \leq n$. Un k -simplexe dans \mathbb{R}^n est l'ensemble des combinaisons barycentriques de $k+1$ points affinement indépendants dits les sommets du simplexe. Une face d'un k -simplexe est tout h -simplexe engendré par $h+1$ des sommets du simplexe (donc $h < k$).

Définition 2.82. Un *complexe simplicial fini* C est une liste finie de simplexes affines dans \mathbb{R}^n telle que si $K \in C$ alors toute face de K est dans C et si $K, K' \in C$ alors $K \cap K' \in C$ est une face de K et de K' .

On note $|C|$ le sous-espace topologique (ou "réalisation géométrique") de \mathbb{R}^n sous-jacent à l'union des simplexes dans C . La dimension de C est la dimension maximale d'un simplexe dans C . On notera $C_k \subset C$ l'ensemble des k -simplexes dans C ; en particulier C_0 est l'ensemble des sommets de C .

Exercice 2.83. Montrer que si $\dim C = 1$ alors $|C|$ est un graphe non orienté sans boucles tel que deux sommets différents sont liés par au plus une arête. Par quelles matrices sont décrits de tels graphes?

Définition 2.84. Si C et C' sont deux complexes simpliciaux, une application simpliciale $f : C \rightarrow C'$ est une application $f : C_0 \rightarrow C'_0$ telle que $\forall K \in C f(K_0) \in C'$, i.e. l'image de tout simplexe dans C est un simplexe dans C' (pas forcément de la même dimension).

Remarque 2.85. Une application simpliciale induit une application continue (et même affine par morceaux) au niveau des réalisations géométriques par $f(\sum_i t_i y_i) = \sum_i t_i f(y_i)$ sur tout simplexe engendré par $\{y_i\}$.

2.7.5. *Espaces de fonctions.* Soient X, Y deux espaces topologiques et soit $F = \{f : X \rightarrow Y, f \text{ continue}\}$. On définit la "topologie compacte ouverte" sur F comme la topologie engendrée par les ensembles $F(K, U)$ dépendant d'un compacte $K \subset X$ et d'un ouvert $U \subset Y$ définis comme suit :

$$F(K, U) = \{f | f(K) \subset U\}.$$

En particulier il est intéressant d'étudier l'espace $\mathcal{L}Y$ des lacets dans Y qui est l'espace des applications continues de S^1 dans Y , muni de la topologie

compacte ouverte. Dans le cas où Y est un espace métrique et X est un espace compact, on a le suivant :

Théorème 2.86 (Ascoli-Arzelà). *Une partie $A \subset C(X, Y)$ est à cloture compacte ssi pour tout $x \in X$ on a que A est équicontinue (c'est à dire $\forall \epsilon \exists U$ voisinage de x tel que $\forall y \in U, \forall f \in A |d(f(y), f(x))| < \epsilon$) et $\{f(x), f \in A\} \subset Y$ est à cloture compacte.*

3. RAPPELS SUR LES FONCTIONS LISSES EN \mathbb{R}^n

3.0.1. *Le théorème d'inversion locale.* Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction lisse et $p \in \mathbb{R}^n$ (donc $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$). Le Jacobien de f en p est la matrice $m \times n$ dont l'entrée (i, j) -ème est $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)$.

Définition 3.1 (Difféomorphismes). Un difféomorphisme entre ouverts U et V dans \mathbb{R}^n est une bijection $\phi : U \rightarrow V$ de classe C^∞ dont l'inverse est aussi de classe C^∞ .

Exercice 3.2. La dernière condition dans la définition est bien nécessaire : exhiber un homeomorphisme $C^\infty f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont l'inverse n'est pas lisse.

Théorème 3.3 (d'inversion locale). *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application lisse et $p \in U$ tel que $Jac_p(f)$ est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert V de p et un voisinage ouvert W de $f(p)$ tels que $f|_V : V \rightarrow W$ est un difféomorphisme.*

3.0.2. *Le théorème de la fonction implicite.*

Théorème 3.4 (Théorème de la fonction implicite). *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction lisse et $p \in U$ un point où $Jac_p(f) \in M(m \times n)$ est une matrice de rang m (donc, forcément $n \geq m$). (Dans ces conditions, à moins de reordonner les coordonnées de \mathbb{R}^n on peut supposer que le mineur $m \times m$ formé par les dernières m colonnes de $Jac_p(f)$ soit inversible.)*

Alors il existe un voisinage $W \subset U$ de $p \in \mathbb{R}^n$ de la forme $W = W_{n-m} \times W_m$ où W_m est un voisinage de $f(p) \in \mathbb{R}^m$ et W_{n-m} un voisinage de $\pi_{n-m}(p) \in \mathbb{R}^{n-m}$ (où $\pi_{n-m} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ est la projection sur les premières $n - m$ coordonnées) et une fonction lisse $\phi : W_{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$\{x \in W | f(x) = f(p)\} = \{(t, \phi(t)), \forall t \in W_{n-m}\}.$$

Définition 3.5. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction lisse. Un point critique est un point $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $\text{rang}(Jac_p(f)) < m$; l'ensemble des points critiques est noté $\text{Crit}(f)$. Un point régulier est $p \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Crit}(f)$. Une valeur $v \in \mathbb{R}^m$ est critique si $v \in f(\text{Crit}(f))$ et régulière autrement.

Remarque 3.6. Si $n < m$ tout point de \mathbb{R}^n est critique.

3.0.3. Le lemme de Sard.

Lemme 3.7 (de Sard). *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n \geq 0, p \geq 1$) lisse ; l'ensemble des valeurs critiques a mesure nulle.*

Remarque 3.8. Si $n < p$ toute valeur dans l'image de f est critique et donc le lemme dit que l'image de f a mesure de Lebesgue nulle.

Proof. On va suivre de près le chapitre 3 de [1] et travailler par récurrence sur n . Remarquons que l'énoncé est claire si $n = 0$. Supposons-le vrai pour n et prouvons-le pour $n + 1$. Notons $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^n$ un multiindex et $|\mathbf{i}| \in \mathbb{N}$ la somme de ses entrées et soit

$$C_i = \{x \in U \mid \frac{\partial^{\mathbf{i}} f}{\partial x_{\mathbf{i}}}(x) = 0 \ \forall \mathbf{i} \text{ s.t. } |\mathbf{i}| \leq i\}.$$

On a clairement $\text{Crit}(f) \supseteq C_1 \supseteq C_2 \cdots \supseteq C_k \supseteq \cdots$. On va prouver que :

- (1) $f(\text{Crit}(f) \setminus C_1)$ a mesure nulle ;
- (2) $f(C_i \setminus C_{i+1})$ a mesure nulle ;
- (3) $f(C_k)$ a mesure nulle pour k assez grand.

Cela sera suffisant car alors $f(\text{Crit}(f)) = f(\text{Crit}(f) \setminus C_1) \cup \bigcup_i f(C_i \setminus C_{i+1})$ et la mesure de Lebesgue est σ -additive.

$f(\text{Crit}(f) \setminus C_1)$ **a mesure nulle.** On peut supposer $p \geq 2$ car autrement $\text{Crit}(f) = C_1$. Par le théorème de Fubini, un ensemble $A \subset \mathbb{R}^p$ a mesure nulle s'il intersecte tous les plans $\{pt\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ en un ensemble de mesure nulle. Pour tout $x \in \text{Crit}(f) \setminus C_1$ on trouvera un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f(V \cap \text{Crit}(f))$ a mesure nulle. Puisque $\text{Crit}(f) \setminus C_1$ est couvert par une quantité dénombrable de tels ouverts cela conclura le premier cas.

Puisque $x \notin C_1$ alors il existe une dérivée première de f qui n'est pas nulle en x . A moins de permuter les composantes de f et les coordonnées on peut supposer qu'il s'agit de $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$. Alors l'application $h(x) := (f_1(x), x_2, \dots, x_n)$ a Jacobien inversible en x et donc est un difféomorphisme local d'un ouvert V autour de x avec un ouvert $W \subset \mathbb{R}^n$. On va alors prouver que $f \circ h^{-1}(W \cap h(\text{Crit}(f) \setminus C_1)) = f(V \cap \text{Crit}(f) \setminus C_1)$ a mesure nulle. Cela est plus simple car $f \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, f_2 \circ h^{-1}(x), \dots, f_n \circ h^{-1}(x)) = (x_1, g(x))$ où la dernière égalité définit une fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p-1}$.

Le Jacobien de $(x_1, g(x))$ est de la forme :

$$\text{Jac}((x_1, g(x))) = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

donc un point $x = (x_1, \dots, x_n)$ est critique pour $(x_1, g(x))$ ssi (x_2, \dots, x_n) est critique pour la restriction de g à l'hyperplan π_{x_1} où la première coordonnée

est x_1 , qui a dimension $n - 1$. Par récurrence $g(\pi_{x_1} \cap \text{Crit}(g) \setminus C_1(g))$, qui est contenu dans l'hyperplan de \mathbb{R}^p où la première coordonnée est x_1 a mesure 0. Par le théorème de Fubini alors $(x_1, g)(\text{Crit}(g) \setminus C_1(g))$ a mesure nulle.

$f(C_i \setminus C_{i+1})$ a mesure nulle. Comme avant soit $x \in C_i \setminus C_{i+1}$ et soit $w(x)$ une dérivée partielle i^{eme} de f dont dérivée première n'est pas nulle en x . On peut supposer que $\frac{\partial w}{\partial x_1}(x) \neq 0$. Comme avant soit alors $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_n)$. Alors h est un difféomorphisme local entre un voisinage ouvert U de x et un ouvert V de \mathbb{R}^n car son Jacobien en x est inversible. Soit alors $g = f \circ h^{-1}$ et $g_c(x_2, \dots, x_n) := f \circ h^{-1}(c, x_2, \dots, x_n)$ la restriction de g à l'hyperplan $\pi_{x_1, c}$ où $x_1 = c$. Il est clair que g_c est une fonction lisse de $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ et donc, par récurrence, l'image de ses valeurs critique a mesure nulle. Mais les points de $\pi_{x_1, c} \cap C_i$ sont critiques pour g_c , donc leur image par g_c est de mesure nulle. Alors on conclut encore par Fubini que l'image de tout $h(C_i \setminus C_{i+1})$ par g a mesure nulle. Mais cette image coïncide avec l'image par f de $C_i \setminus C_{i+1}$.

$f(C_k)$ a mesure nulle pour k assez grand. Soit $\delta < \sqrt{n}^{-1}$, $I \subset \mathbb{R}^n$ le cube $[-\delta, \delta]^n$ et $k > \frac{n}{p} - 1$. Si $x \in C_k$ on va prouver que $f(x + I \cap C_k)$ a mesure nulle. Par le théorème de Taylor on a que

$$f(x + h) = f(x) + R(x, h), \quad \|R(x, h)\| \leq c \|h\|^{k+1}$$

pour une constante c . Divisons le cube I en r^n cubes d'arête $\frac{\delta}{r}$ et soit $x + I_n$ le cube contenant x . Alors tout point de $x + I_n$ diffère de x d'un vecteur ayant norme au plus $\sqrt{n} \frac{\delta}{n}$ et donc son image diffère de $f(x)$ d'au plus $c \sqrt{n}^{k+1} \frac{\delta^{k+1}}{r^{k+1}}$ et donc $f(x + I_n)$ est contenu dans le cube de \mathbb{R}^p centré en $f(x)$ et d'arête $2c \frac{(\sqrt{n}\delta)^{k+1}}{r^{k+1}}$. Alors $f(C_k \cap x + I)$ est contenu dans l'union d'au plus r^n cubes dont le volume est $2c \frac{(\sqrt{n}\delta)^{k+1} p}{r^{k+1}}$. Leur volume total est donc au plus :

$$(2c)^p r^n \frac{(\sqrt{n}\delta)^{p(k+1)}}{r^{p(k+1)}} < (2c)^p \frac{1}{r^{pk+p-n}} \leq (2c)^p \frac{1}{r^{1+p}}$$

qui tend vers 0 lorsque $r \rightarrow \infty$. □

4. VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

4.1. Variétés différentiables.

Définition 4.1. Un espace topologique M est dit une “variété topologique de dimension $m \in \mathbb{N}$ ”, s’il est Hausdorff, à base dénombrable et il est “localement homéomorphe à \mathbb{R}^m ” c’est à dire $\forall x \in M$ il existe un voisinage U de x (dit une “carte” autour de x) et un homéomorphisme $\phi : U \rightarrow V$ où V est un ouvert de \mathbb{R}^m .

Exercice 4.2. Prouver qu’une boule ouverte $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ est homéomorphe à \mathbb{R}^n .

Remarque 4.3. Grâce à l’exercice précédent on peut remplacer V par \mathbb{R}^n dans la Définition 4.1.

Remarque 4.4. Les deux premières hypothèses sont indépendantes de la troisième : comme contre-exemple on peut prendre l’ensemble

$$M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \sqcup \{0'\} \cup \{0''\}$$

muni de la topologie engendrée par les ouverts de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et par les ensembles de la forme

$$] - a, 0[\sqcup\{0'\}\sqcup]0, b[\text{ et }] - a, 0[\sqcup\{0''\}\sqcup]0, b[$$

où $a, b > 0$. Alors tout ouvert de M est homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R} par l’application $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\phi(0') = \phi(0'') = 0$. Si on prend une union disjointe d’une quantité non dénombrable de copies de M on obtient alors un espace topologique qui ne satisfait ni la première ni la deuxième condition mais qui est localement homéomorphe à \mathbb{R}^n .

Remarque 4.5. Il existe un théorème non trivial dit “de l’invariance du domaine” qui prouve qu’un ouvert de \mathbb{R}^n n’est jamais homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^m , $m \neq n$: cela montre que la notion de dimension d’une variété topologique est bien définie. Si le temps nous le permettra nous le prouverons après avoir parlé d’homologie singulière.

Exercice 4.6. Prouver qu’un ouvert de \mathbb{R}^n n’est jamais homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^m , $m > n$.

Exemple 4.7. Tout ouvert dans \mathbb{R}^n est une variété de dimension n .

Exemple 4.8. Soit $S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ où $\|\cdot\|$ dénote la norme euclidienne. Alors S^n est dit la sphère de dimension n . Pour prouver qu’il s’agit bien d’une variété de dimension n observons qu’il s’agit d’un espace Hausdorff et à base dénombrable (car c’est un sous-espace fermé de \mathbb{R}^{n+1}). De plus, $\forall \vec{x} \in S^n$ notons $U_x = \{\vec{y} \in S^n \mid \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle > 0\}$ et notons $\pi_x : U_x \rightarrow x^\perp$ la projection orthogonale sur l’hyperplan x^\perp (qui est homéomorphe à \mathbb{R}^n).

Alors π_x est clairement continue (car restriction d'une application continue de $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow x^\perp$) et est un homéomorphisme entre U_x et l'ouvert dans x^\perp formé par les vecteurs ayant norme < 1 . En fixant une base de x^\perp on trouve un homéomorphisme entre U_x et la boule ouverte de rayon 1 dans \mathbb{R}^n .

Nous ne prouverons pas la suivante:

Proposition 4.9 (cf [1], Appendix). *Une variété de dimension 1 connexe est homéomorphe à \mathbb{R} ou à S^1 .*

Remarque 4.10. L'inconvénient de l'exemple précédent est qu'on a trouvé un ensemble infini de carte lorsqu'un effet deux cartes suffisent pour décrire S^n . Soient $\vec{N} = (0, 0, \dots, 1)$ et $\vec{S} = (0, 0, \dots, -1)$ et soient $U_N = S^n \setminus S$ et $U_S = S^n \setminus N$. Soit $\pi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$\pi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{(x_{n+1} + 1)}(x_1, \dots, x_n)$$

et $\pi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{(x_{n+1} - 1)}(x_1, \dots, x_n)$. Alors π_N (resp. π_S) est un homéomorphisme entre U_N (resp. U_S) et \mathbb{R}^n . De plus $U_N \cup U_S = S^n$ et $\pi_N(U_N \cap U_S)$ et $\pi_S(U_N \cap U_S)$ sont des ouverts de \mathbb{R}^n (à l'occurrence ils coïncident avec $\mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$).

La remarque précédente motive la définition suivante :

Définition 4.11 (Atlas). Soit M un espace topologique Hausdorff et à base dénombrable. Un *atlas* sur M est un ensemble $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ où $\{U_i, i \in I\} \subset M$ est un recouvrement de M et chaque $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme avec un ouvert V_i .

Remarque 4.12. (1) Dans la définition précédente remarquons que si (U, ϕ) et (U', ϕ') sont deux cartes alors $\phi(U \cap U')$ (resp. $\phi'(U \cap U')$) est un ouvert dans V (dans V'). De plus $\phi' \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \rightarrow \phi'(U \cap U')$ est un homéomorphisme.

(2) Si \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont deux atlas sur M alors $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ l'est aussi. Un atlas est maximal s'il n'est pas contenu strictement dans un autre atlas : grâce à la remarque qu'on vient de faire, un tel atlas existe toujours.

Rappelons que pour tout ouvert V de \mathbb{R}^n on dénote $C^\omega(V)$ les fonctions analytiques réelles.

Définition 4.13 (Atlas C^k). (1) Un atlas sur M est de classe $C^k, k \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\} \sqcup \{\omega\}$ si pour tout $(U, \phi), (U', \phi') \in \mathcal{A}$ on a

$$\phi' \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \rightarrow \phi'(U \cap U')$$

est de classe C^k .

(2) Une variété M de classe C^k est une variété topologique munie d'un atlas maximal de classe C^k .

Exemple 4.14. Toute ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ a une structure de variété analytique : il suffit de prendre l'atlas $\mathcal{A} = \{(V, Id)\}$: il est clairement analytique (car il n'y a qu'une carte!) et peut donc être étendu à un atlas maximal qui le contient.

Exemple 4.15. L'atlas $\mathcal{A} = \{(U_N, \pi_N), (U_S, \pi_S)\}$ sur S^n est de classe C^∞ . En effet l'application $\pi_N \circ \pi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \vec{0} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$ est lisse car elle est (exercice !) :

$$\pi_N \circ \pi_S^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x}.$$

Alors il existe un atlas maximal qui contient \mathcal{A} : cela munit S^n de la structure de variété lisse (C^∞).

Lemme 4.16. Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse et $v \in \mathbb{R}$ une valeur régulière alors $f^{-1}(v)$ est une variété de dimension n .

Proof. Commençons par remarquer que $f^{-1}(v)$ est un fermé et donc il a base dénombrable et est Hausdorff. Nous allons maintenant construire un atlas lisse \mathcal{A} pour $f^{-1}(v)$ en construisant une carte autour de chaque point. Soit $p \in f^{-1}(v)$ alors $p \notin \text{Crit}(f)$ et donc il existe une coordonnée x_i telle que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$. A moins de re-ordonner les coordonnées de \mathbb{R}^{n+1} on peut supposer que $i = n+1$. Par le Théorème de la fonction implicite il existe un voisinage W de $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ de la forme $W_n \times W_1$ où W_n est un voisinage de $\pi_n(p) \in \mathbb{R}^n$ et W_1 un voisinage de $f(p) \in \mathbb{R}$ et une fonction lisse $\psi : W_n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\{x \in W \mid f(x) = v\} = \{(t, \psi(t)), \forall t \in W_n\}.$$

Alors soit $(U, \phi) := (W \cap f^{-1}(v), \pi_n)$. Si (U', ϕ') est une autre carte ainsi construite, alors sur $\phi(U \cap U')$ on a que $\phi' \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \rightarrow \phi'(U \cap U')$ est la composition de $(t, \psi(t))$ et de π'_n où π'_n est la projection sur les n -coordonnées correspondantes à la carte (U', ϕ') et donc le changement de carte est une fonction lisse. \square

Exemple 4.17. Soit $f(\vec{x}) := \|\vec{x}\|^2$; alors $d_p f = 2\langle \vec{p}, \cdot \rangle$ et $S^n = f^{-1}(1)$ est une variété lisse car le seul point critique de f est $\vec{0}$ et donc la seule valeur critique est $f(\vec{0}) = 0$.

4.2. Fonctions lisses entre variétés. Soient M et N deux variétés lisses de dimensions respectives m et n .

Définition 4.18. Une fonction $f : N \rightarrow M$ est lisse si $\forall p \in N$ il existe une carte (U, ϕ) de l'atlas de N autour p et une carte de l'atlas de M (V, ψ) autour de $f(p)$ telle que

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

est une fonction lisse.

Remarque 4.19. Le choix des cartes dans la définition n'impacte pas sur le fait que f soit lisse en p : en effet si l'on change (U, ϕ) par (U', ϕ') et (V, ψ) par (V', ψ') alors on a que

$$\psi' \circ f \circ \phi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \phi'^{-1})$$

et puisque $(\psi' \circ \psi^{-1})$ et $(\phi \circ \phi'^{-1})$ sont lisses, la fonction de gauche est lisse ssi celle de droite l'est.

Remarque 4.20. De la même manière on peut définir la notion de fonction analytique réelle si M et N le sont.

Remarque 4.21. En particulier si $M = \mathbb{R}$ on peut prendre $(V, \psi) = (\mathbb{R}, Id)$. Dans ce cas, puisque \mathbb{R} est une algèbre commutative (un espace vectoriel muni d'un produit associatif, commutatif et avec unité) alors aussi $C^\infty(M; \mathbb{R})$ l'est.

Définition 4.22 (Difféomorphismes). Une fonction $C^\infty f : N \rightarrow M$ est un difféomorphisme si elle est un homéomorphisme et son inverse est C^∞ .

4.3. L'espace tangent à une variété. Dans cette sous-section nous allons définir l'espace tangent à une variété et re-formuler de plusieurs façons cette définition. Puis nous donnerons la définition de différentiel d'une fonction lisse entre variétés.

Définition 4.23 (L'espace tangent à une variété en un point). Soit M une variété lisse de dimension m et $p \in M$. Une dérivation en p est une application $D : C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire, satisfaisant :

- (1) la règle de Leibniz : $D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g) \forall f, g \in C^\infty(M; \mathbb{R})$
- (2) si $f = 0$ en un voisinage de p alors $D(f) = 0$.

L'ensemble des dérivations en p est noté $T_p M$ et appelé l'espace tangent à M en p .

Lemme 4.24. *L'espace tangent à M en p est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension m .*

Proof. Il est clair que puisque toute combinaison linéaire de deux dérivations est une dérivation, alors $T_p M$ est un espace vectoriel. Fixons une carte locale (U, ϕ) centrée en p i.e. $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un difféomorphisme tel que $\phi(p) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$; soit aussi $B \subset \mathbb{R}^m$ la boule unité. Soit $C_0^\infty(U) = \{f \in C^\infty(M) | \text{supp}(f) \subset U\}$ et $C_{null}^\infty(M) = \{f \in C^\infty(M) \text{ t.q. } f|_{\phi^{-1}(B)} = 0\}$. Remarquons que grâce à la condition 2) de la Définition 4.23, on a $D(f^{null}) = 0 \forall D \in T_p M$ et $\forall f^{null} \in C_{null}^\infty(M)$. De plus si $c \in C^\infty(M)$ est une fonction constante alors $D(c) = 0 \forall D \in T_p M$ car $D(c) = cD(1) = cD(1 \cdot 1) = 2cD(1) = 0$.

Soient $x_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n), i = 1, \dots, n$ les fonctions coordonnées et définissons des fonctions $\bar{x}_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), i = 1, \dots, n$ à support compact telles que $\bar{x}_i|_B =$

$x_i, \forall i$. Soient alors $\tilde{x}_i \in C_0^\infty(U)$ définies par $\tilde{x}_i := \bar{x}_i \circ \phi$. Nous allons montrer que $\forall f \in C^\infty(M)$ il existe $\tilde{g}_i \in C_0^\infty(U)$ telles que

$$\left(f(x) - f(p) - \sum_i \tilde{x}_i \tilde{g}_i(x) \right) \in C_{null}^\infty(M).$$

En effet soit $\bar{f} := f \circ \phi^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors on peut écrire

$$\bar{f}(x) - \bar{f}(0) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \bar{f}(t\bar{x}) \right) dt = \int_0^1 \sum_i x_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(t\bar{x}) dt = \sum_i x_i \int_0^1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(t\bar{x}) dt.$$

Alors en choisissant des fonctions $g_i(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui sur B coïncident avec $\int_0^1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(t\bar{x}) dt$ on a que

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(0) + \left(\sum_i \bar{x}_i g_i \right) + \bar{f}^{null}$$

où $\bar{f}^{null} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est nulle sur B et $\bar{f} = \bar{f}(p) + \bar{f}^{null}$ sur une boule de rayon suffisamment grand. Mais alors en posant $\tilde{g}_i = g_i \circ \phi$ on a:

$$f(x) = f(p) + \sum_i \tilde{x}_i \tilde{g}_i(x) + f^{null}$$

où $f^{null} \in C_{null}^\infty(M)$ et donnée par $f(x) - f(p) - \sum_i \tilde{x}_i \tilde{g}_i(x)$.

Par conséquent $\forall D \in T_p M$ on a

$$(1) \quad D(f) = D(f(p)) + \sum_i D(\tilde{x}_i) \tilde{g}_i(p) + \sum_i \tilde{x}_i(p) D(\tilde{g}_i) = \sum_i D(\tilde{x}_i) \tilde{g}_i(p).$$

Cela montre que la valeur d'une dérivation D sur f est déterminé par ses valeurs sur les m fonctions \tilde{x}_i et donc que l'espace $T_p M$ a dimension au plus m . Dans ce qui suit nous allons exhiber m dérivations indépendantes. Définissons m dérivations en p , notées $\frac{\partial}{\partial x_i}$ comme suit

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0}).$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien de dérivations en p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(fg) &= \frac{\partial((fg) \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0}) = \frac{\partial((f \circ \phi^{-1})(g \circ \phi^{-1}))}{\partial x_i}(\vec{0}) = \\ &= \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0})(g \circ \phi^{-1})(\vec{0}) + \frac{\partial(g \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0})(f \circ \phi^{-1})(\vec{0}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \cdot g(p) + \frac{\partial}{\partial x_i}(g) \cdot f(p). \end{aligned}$$

Et si f est zéro autour de p alors $f \circ \phi^{-1}$ est 0 autour de $\vec{0}$ donc $\frac{\partial}{\partial x_i}(f) := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0}) = 0$.

Maintenant on vérifie directement que $\frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{x}_j) := \delta_{i,j}$; en effet :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{x}_j) = \frac{\partial(\tilde{x}_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0}) = \frac{\partial \phi(x) x_j}{\partial x_i}(\vec{0}) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(\vec{0}) = \delta_{i,j}$$

où on a utilisé que par définition $\tilde{x}_j = x_j \circ \phi$ sur $\phi^{-1}(B)$ (et donc dans un voisinage de p).

□

Une deuxième définition de $T_p M$ peut être obtenue à l'aide des dérivations le long de courbes. Soit $c : (-1, 1) \rightarrow M$ une courbe lisse telle que $c(0) = p$. Alors toute fonction lisse $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ se tire en arrière à une fonction sur $] -1, 1[: f \rightarrow f \circ c \in C^\infty(] -1, 1[; \mathbb{R})$. On peut alors considérer la dérivation D_c donnée par $D_c(f) := \frac{df \circ c}{dt}|_{t=0}$.

Lemme 4.25. *L'ensemble des dérivations ainsi obtenues coïncide avec $T_p M$.*

Proof. Puisque dans la définition de D_c nous n'avons utilisé que les valeurs de $c(t)$ pour t autour de 0 alors on peut supposer que $im(c)$ soit contenu dans une carte centrée en p , (U, ϕ) . Du coup en composant avec la carte on a que $\phi \circ c : (-1, 1) \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$. On a

$$D_c(f) = \frac{df \circ c}{dt}|_{t=0} = \frac{df \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ c}{dt}|_{t=0} = Jac(f \circ \phi^{-1})_{\vec{0}} \cdot Jac(\phi \circ c)(0).$$

Mais il existe des constantes x_1, \dots, x_m telles que $Jac(\phi \circ c)(0) = \sum_{i=1}^m x_i \vec{e}_i$ et donc on a

$$D_c(f) = \sum_{i=1}^m x_i Jac(f \circ \phi^{-1})_{\vec{0}} \vec{e}_i.$$

Mais les applications linéaires $f \rightarrow Jac(f \circ \phi^{-1})_{\vec{0}} \vec{e}_i$ sont facilement vérifiées être des dérivations en p de $C^\infty(M)$ donc des éléments de $T_p M$ et être linéairement indépendantes (car il suffit de les tester sur des fonctions C^∞ qui localement coïncident avec les fonctions $x_i \circ \phi$). Elles sont alors une base de $T_p(M)$. □

Corollaire 4.26 (Explication de la terminologie "espace tangent"). *Soit $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ une variété donnée par $f = 0$ où $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse pour laquelle 0 est une valeur régulière. Alors $\forall p \in M$ on a que $T_p M$ est isomorphe à l'espace tangent en \mathbb{R}^{m+1} à $f = 0$ en p par l'application qui envoie une dérivation $D \in T_p M$ en le vecteur tangent à la courbe qui induit D par l'isomorphisme du Lemme 4.3.*

Définition 4.27 (Différentiel d'une fonction lisse). Soit $f : N \rightarrow M$ une fonction lisse et $p \in N$. Alors il existe une application linéaire dite "le différentiel de f en p ", et notée $d_p f : T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$ définie par

$$d_p(f)(D)(g) = D(g \circ f) \quad \forall g \in C^\infty(M; \mathbb{R}).$$

(Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une application linéaire).

Exercice 4.28. Soit N, M et f comme ci dessus. Montrer que si $D \in T_p N$ alors $d_p f(D)$ est une dérivation en $f(p)$ pour $C^\infty(M)$ au sens de la Définition 4.23.

Les définitions ci-dessus ont l'avantage de ne pas dépendre du choix de cartes autour de p et de $f(p)$. Cependant il est utile de comprendre la nature de $d_p f$ en utilisant des cartes.

Soit $f : N \rightarrow M$ une fonction lisse, $p \in N$ (U, ϕ) une carte pour N autour de p , et (V, ψ) une carte pour M autour de $f(p)$. Soient $\partial_i \in T_p N, i = 1, \dots, n$ (resp. $\partial_j \in T_{f(p)} M$) les dérivations définies par

$$\begin{aligned} \partial_i^N k &:= \frac{\partial(k \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)), \quad \forall k \in C^\infty(N; \mathbb{R}), \\ (\text{resp. } \partial_j^M h &:= \frac{\partial(h \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(\psi(f(p))), \quad \forall h \in C^\infty(M; \mathbb{R})). \end{aligned}$$

Exercice 4.29. Vérifier que ∂_i^N est bien une dérivation en p (resp. ∂_j^M est une dérivation en $f(p)$) et que $\partial_i^N, i = 1, \dots, n$ (resp. $\partial_j^M, j = 1, \dots, m$) forme une base de $T_p N$ (resp. de $T_{f(p)} M$).

Lemme 4.30. La matrice de $M(m \times n; \mathbb{R})$ qui exprime $d_p f$ en les bases $\{\partial_i^N\}$ et $\{\partial_j^M\}$ est $Jac_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$, c'est à dire :

$$d_p f(\partial_i^N) = \sum_j Jac_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{(j,i)} \partial_j^M.$$

Proof. Par définition $d_p f : T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$ est défini en precomposant toute fonction $h \in C^\infty(M)$ par f et puis en agissant par une dérivation de $T_p N$. Donc on a :

$$(2) \quad d_p f(\partial_i^N)(h) = \partial_i^N(h \circ f) = \frac{\partial(h \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) =$$

$$(3) \quad = \frac{\partial(h \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) =$$

$$(4) \quad = \sum_j \frac{\partial(h \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(\psi(f(p))) \frac{\partial(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_j}{\partial x_i}(\phi(p)) =$$

$$(5) \quad \sum_j Jac_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{(j,i)} \partial_j^M h$$

où dans les premières deux égalités nous avons utilisé les définitions, dans la troisième nous avons composé par $\psi^{-1} \circ \psi = Id|_V$ dans la quatrième nous avons utilisé la dérivé de la fonction composée (en notant $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_j$ la j^{eme} composante de la fonction) et dans la dernière la définition de la matrice Jacobienne et celle de ∂_j^M . Puisque l'égalité vaut pour toute fonction $h \in C^\infty(N)$ nous avons montré la thèse. \square

Définition 4.31 (Points et valeurs critiques pour fonctions entre variétés). Soit $f : N \rightarrow M$ une fonction lisse. Un point critique est un point $p \in M$ tel que $\text{rang}(d_p f) < m$; l'ensemble des points critiques est noté $\text{Crit}(f)$. Un point régulier est $p \in N \setminus \text{Crit}(f)$. Une valeur $v \in M$ est *critique* si $v \in f(\text{Crit}(f))$ et régulière autrement.

Lemme 4.32. Soit $f : N \rightarrow M$ une fonction lisse et $v \in M$ une valeur régulière. Alors $f^{-1}(v) \subset N$ est une variété de dimension $n - m$.

Proof. Puisque f est continue $f^{-1}(v)$ est un fermé dans N et donc est à base dénombrable et Hausdorff. Pour construire un atlas il suffit de procéder exactement comme dans le Lemme 4.16: en effet il s'agit d'une construction locale. \square

Lemme 4.33 (de Sard, pour les variétés). Soit $f : N \rightarrow M$ lisse ; l'ensemble des valeurs critiques a mesure nulle.

Proof. Couvrons N par une quantité dénombrable de cartes (U_i, ϕ_i) telles que $f(U_i) \subset V_i$ où (V_i, ψ_i) est un atlas de M . En appliquant le lemme de Sard à la restriction de f à U_i on a que $f(\text{crit}(f))$ est une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle, donc a mesure nulle. \square

4.4. Variétés à bord. Notons $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n$. Une fonction lisse de \mathbb{R}_+^n à \mathbb{R}_+^m est une fonction qui admet une extension lisse à un voisinage ouvert de \mathbb{R}_+^n à valeurs dans un voisinage ouvert de \mathbb{R}_+^m .

Définition 4.34 (Variété à bord). Une variété à bord N est un espace topologique Hausdorff et à base dénombrable admettant un atlas maximal C^∞ de cartes localement homéomorphes à \mathbb{R}^n ou à \mathbb{R}_+^n . Les points localement modélés par ceux de \mathbb{R}_+^n sont dits les points de bord de M et notés ∂N .

Exercice 4.35. Montrer que ∂N est une variété lisse de dimension $n - 1$ sans bord.

L'espace tangent en un point p est défini tout comme avant : il a toujours dimension n , mais si $p \in \partial N$ alors il y a un sous-espace de dimension $n - 1$ bien défini de $T_p N$ formé par $T_p(\partial N)$.

Exemple 4.36. La boule fermée $B_n := \overline{B(0, 1)}$ dans \mathbb{R}^n est une variété à bord de dimension n . On a $\partial B_n = S^{n-1}$.

Exercice 4.37. Prouver que les 1-variétés connexes, compactes et à bord sont difféomorphes à $[0, 1]$.

Si N, M sont variétés à bord, une fonction $f : N \rightarrow M$ est lisse si elle est localement lisse. Remarquons qu'on ne demande pas en général que $f(\partial N) \subset \partial M$. La notion de différentiel en un point est définie comme avant, tout comme la notion de valeur critique et point critique. Le lemme suivant se prouve comme sa version pour les variétés fermées (Lemme 4.32) :

Lemme 4.38 (La préimage d'une valeur régulière est une variété à bord). *Soit $f : N \rightarrow M$ une fonction lisse entre variétés à bord. Alors la préimage d'une valeur régulière est une variété à bord de dimension $\dim(N) - \dim(M)$ dont le bord est contenu dans le bord de N .*

4.5. Le théorème du point fixe de Brouwer. Dans cette section on va prouver le suivant théorème de Brouwer :

Théorème 4.39. *Toute fonction continue $f : B_n \rightarrow B_n$ admet un point fixe.*

Lemme 4.40. *Si $f : B_n \rightarrow S^{n-1}$ est une fonction lisse la préimage d'une valeur régulière contient au moins deux points de S^{n-1} .*

Proof. La préimage d'une valeur régulière est une variété lisse à bord, compacte car fermée et contenue dans un compact (B_n). Donc elle est une union finie de segments $[0, 1]$ plongés dans B_n avec leur bord dans S^{n-1} . Puisque leur bord contient au moins 2 points on a la thèse. \square

Lemme 4.41. *Si $f : B_n \rightarrow B_n$ est lisse, alors elle a un point fixe.*

Proof. Si non, le vecteur $\overrightarrow{xf(x)}$ serait non nul pour tout $x \in B_n$ et donc on aurait une application lisse $g : B_n \rightarrow S^{n-1}$ définie par $g(x)$ le point plus proche à x dans S^{n-1} et dans la droite affine passant par x et $f(x)$. Cette application est lisse et fixe S^{n-1} , ce qui est impossible car la préimage par g d'un point de S^{n-1} a un seul point (contradiction avec Lemma 4.40). \square

Preuve du théorème de Brouwer. On peut approcher toute fonction continue $f : B_n \rightarrow B_n$ par un polynôme P ayant norme ≤ 1 avec la précision qu'on veut. Si f n'admet pas de point fixe alors $\|f(x) - x\| > c$ pour une constante positive c et alors si P approche f à distance $\frac{c}{4}$ on a que P n'a pas de points fixes, ce qui contredit le Lemme 4.41. \square

5. VARIÉTÉS ORIENTÉES ET DEGRÉ DES APPLICATIONS

Définition 5.1 (Variété orientée). On dit qu'une variété lisse (à bord ou pas) N est orientable si elle admet un atlas lisse tel que les jacobiens des changements de cartes en tout point ont un déterminant positif : i.e.

$$\exists \{(U_i, \phi_i), i \in I\} \text{ t.q. } \det(\text{Jac}_p(\phi_i \circ \phi_j^{-1})) > 0 \quad \forall p \in \phi_j(U_i \cap U_j).$$

Une variété orientée est la donnée d'une variété lisse et d'un atlas maximal orienté. De façon équivalente une orientation est le choix d'un signe pour toute base de $T_p M$ en tout point $p \in M$ qui soit continu en p et en la base : on peut alors distinguer les bases "positives" des bases "négatives".

Aussi un difféomorphisme entre variétés orientées $f : N \rightarrow M$ sera dit "positif" (ou on dira qu'il préserve l'orientation) si en tout point $p \in N$ il a une différentielle à déterminant positif par rapport à une base positive de $T_p N$ et une base positive de $T_{f(p)} M$.

Remarque 5.2. Le groupe $GL(n)$ a deux composantes connexes correspondantes aux deux signes du déterminant.

Remarque 5.3. Si M est orientée à bord, alors ∂N est une variété lisse fermée. On peut fixer une orientation sur ∂N par la convention du "vecteur sortant". Pour tout $p \in \partial N$ soit $\vec{v}_1 \in T_p M$ un vecteur non nul qui pointe vers l'extérieur de N (i.e. en la carte locale en p $\vec{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$). Alors on stipule qu'une base $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ de ∂N est "positive" si la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ est positive pour $T_p N$.

Exemple 5.4. Toutes les variétés rencontrées jusqu'à présent sont orientables. Le premier exemple de variété non orientable est le ruban de Moebius: il s'agit de la variété lisse de dimension 2 obtenue en recollant deux cotés opposés d'un rectangle par l'application affine telle que le résultat ne soit pas un anneau (il n'y a que deux choix de bijections affines entre les deux bases !).

Soit $f : N \rightarrow M$ une application lisse entre deux variétés orientées de la même dimension.

Remarque 5.5. La préimage d'une valeur régulière v est aussi une variété orientée : en effet elle est une variété par le Lemme 4.32, et l'orientation est induite en stipulant qu'une base de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-m}$ de $T_p f^{-1}(v)$ est positive si, lorsqu'on la complète à une base de $T_p N$ par des vecteurs $\vec{v}_{n-m+1}, \dots, \vec{v}_n$ on a que la base de $T_{f(p)} M$ formée par $d_p f(\vec{v}_{n-m+1}), \dots, d_p f(\vec{v}_n)$ est positive pour M .

Le signe de $d_p f : T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$ est le signe du déterminant de la matrice jacobienne de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ lorsque (U, ϕ) et (V, ψ) sont des cartes des atlas orientés respectivement autour de $p \in N$ et de $f(p) \in M$.

Définition 5.6 (Degré d'une application lisse). Si M et N sont variétés fermées et connexes et N est compact et $v \in M$ est une valeur régulière alors $f^{-1}(v)$ consiste en un nombre fini de points $p_i \in N$: on définit le degré de f par $\deg(f) = \sum_i \text{sign}(d_{p_i}(f))$.

Remarque 5.7. Si $f : N \rightarrow M$ a degré k alors, $f : \overline{N} \rightarrow M$ et $f : N \rightarrow \overline{M}$ ont degré $-k$ où \overline{N} (resp. \overline{M}) est la variété N (resp. M) munie de l'orientation opposée.

Proposition 5.8. *Soit N une variété compacte, lisse à bord de dimension $n + 1$, M une variété lisse orientée de dimension n et $f : N^{m+1} \rightarrow M^m$ une application lisse. Alors $\deg(f|_{\partial N}) = 0$.*

Proof. La preimage d'une valeur $v \in M$ qui est régulière à la fois pour f et pour $f|_{\partial N}$ est une variété compacte c dans N de dimension 1 qui intersecte ∂N transversalement. En chaque point $p \in c$ on peut définir $T_p N = T_p c \oplus T_p^\perp c$ (où $T_p^\perp c$ est un supplémentaire choisi de façon arbitraire). La restriction de df à $T_p^\perp c$ est un isomorphisme, donc nous pouvons tirer en arrière par df une base positive de $T_v M$. On peut enfin compléter cette base à une base positive de $T_p N$ en ajoutant un vecteur de $T_p c$. Cela montre que c est une union finie de cercles orientés et d'arcs **orientés** $C_1, \dots, C_k \subset N$ tels que $f|_{\partial N}^{-1}(v) = \partial C_1 \cup \dots \cup \partial C_k$. De plus $\partial C_i = \{p_i^+, p_i^-\} \subset \partial N$ et on vérifie directement par la règle du vecteur sortant que le signe de p_i^ϵ est ϵ . Donc chaque arc a deux points de bord qui contribuent de façon opposée au degré de $f|_{\partial N}$. Puisque $f|_{\partial N}^{-1}(v)$ est exactement formé par ces points la thèse s'en suit. \square

Lemme 5.9. *Soit M une variété lisse connexe orientée. Pour tout points $p, q \in M$ il existe une famille $\varphi_t : M \rightarrow M, t \in [0, 1]$ de difféomorphismes qui préservent l'orientation tel que $\varphi_1(p) = q$, $\varphi_0 = Id_M$ et $\varphi_t = Id$ hors d'un voisinage de p .*

Proof. Soit U l'ensemble des q' tels qu'il existe une famille $\varphi_t : M \rightarrow M, t \in [0, 1]$ comme dans l'énoncé ; disons qu'un tel q' est "atteignable". Alors nous allons montrer que si (U_i, ϕ_i) est une carte de l'atlas de M difféomorphe à \mathbb{R}^m telle que $U \cap U_i \neq \emptyset$ alors $U_i \subset U$ et donc que U est ouvert. Pour ce faire nous allons montrer que tout point dans \mathbb{R}^m est "atteignable" à partir d'un autre point de \mathbb{R}^m . En effet si $p, q \in \mathbb{R}^m$ considérons un champs de vecteurs en \mathbb{R}^m qui sur le segment \overline{pq} vaut \vec{pq} et qui à l'extérieur d'un voisinage de ce segment est 0. Alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_t(x) = \vec{v}(\varphi_t(x)) \\ \varphi_0(x) = x \end{cases}$$

admet une unique solution pour tout x et donc, à temps fixé donne un difféomorphisme $\varphi_t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (car son inverse est donné par le problème de Cauchy de vecteur $-\vec{v}$) qui, puisque $\vec{v} = 0$ hors d'un voisinage de \overline{pq} , est l'identité hors de ce voisinage. De plus sur \overline{pq} $\varphi_t(p) = p + t\vec{p}\vec{q}$ et donc $\varphi_1(p) = q$. Cela montre que si (U_i, ϕ_i) est une carte de l'atlas difféomorphe à \mathbb{R}^m telle que $U \cap U_i \neq \emptyset$ alors $U_i \subset U$.

Alors l'ensemble U des points atteignables est ouvert; mais il est aussi fermé car si $q \in \overline{U}$ alors si (U_i, ϕ_i) est une carte locale centrée en q alors $U_i \cap U \neq \emptyset$ donc $U_i \subset U$. \square

Théorème 5.10. *Le degré ne dépend pas du choix de la valeur régulière v et est invariant par homotopie lisse, c'est à dire que si $g : N \rightarrow M$ est une autre application C^∞ telle qu'il existe $F : N \times [0, 1] \rightarrow M$ C^∞ telle que $F(0, x) = f(x), F(1, x) = g(x) \forall x \in N$ alors $\deg(g) = \deg(f)$.*

Proof. L'invariance homotopique est simple : une homotopie lisse entre f et g est une application de $M \times [0, 1] \rightarrow N$ et donc par la Proposition 5 on a que $\deg(F|_{\partial M \times [0, 1]}) = \deg(f) - \deg(g) = 0$.

Pour prouver que $\deg(f)$ ne dépend pas du choix de v , soit $v' \in M$ une autre valeur régulière. D'abord montrons qu'il existe une homotopie C^∞ $G : M \times [0, 1] \rightarrow M$ telle que $G(y, 0) = y \forall y \in M, G(v, 1) = v'$ et $d_v G(\cdot, 1)$ a un déterminant positif. Remarquons que l'ensemble des points $v' \in M$ tels que cet énoncé est vrai est tout M (voir Lemma 5.9). Alors l'application f et l'application $g(x) = G(x, 1) \circ f$ sont homotopes (par $G(x, t) \circ f, t \in [0, 1]$) et ont le même degré par le point précédent. Mais $g^{-1}(v') = f^{-1}(v)$ par construction et donc $\deg_{v'}(f) = \deg_{v'}(g) = \deg_v f$. \square

6. FORMES DIFFÉRENTIELLES

Nous allons définir les formes différentielles sur une variété en les définissant d'abord sur \mathbb{R}^n et puis en utilisant une "partition de l'unité" pour les coller à former des formes sur toute variété. L'ensemble des formes différentielles est naturellement muni d'une structure d'algèbre non commutative et d'une "dérivée extérieure".

6.1. Formes différentielles sur \mathbb{R}^n . Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Rappelons que l'algèbre Grassmannienne"

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}[dx_1, \dots, dx_n] / \{dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \forall i, j\}$$

: le produit est associatif mais pas commutatif. L'unité est 1. Elle est graduée en stipulant que chaque dx_i ait degré 1. On note $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace des vecteurs de degré k , donc on a $\Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

Définition 6.1. Une k -forme différentielle sur U est un élément de $C^\infty(U; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. C'est à dire une expression de la forme :

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_k}$$

où $a_{i_1, \dots, i_k}(x) \in C^\infty(U; \mathbb{R})$. On notera $\Omega^k(U)$ l'ensemble des k -formes différentielles et $\Omega^* = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$. (En particulier remarquons que $\Omega^0(U) = C^\infty(U; \mathbb{R})$.)

Remarquons le produit de $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ s'étend par $C^\infty(U; \mathbb{R})$ -linéarité à un produit associatif non commutatif sur $\Omega^*(U)$ qui est donc une algèbre graduée (de dimension infinie !). Et il est facile de vérifier que

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{ks} \eta \wedge \omega, \forall \omega \in \Omega^k(U), \forall \eta \in \Omega^s(U).$$

On définit un opérateur $d : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$ \mathbb{R} -linéaire de degré 1 qui a les propriétés suivantes :

- (1) $d(f) = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \forall f \in \Omega^0(U)$
- (2) $d(d\omega) = 0, \forall \omega \in \Omega^*(U)$.
- (3) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \forall \omega \in \Omega^k(U), \forall \eta \in \Omega^s(U)$.

Explicitement si $\omega = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ alors $d\omega = \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, et on l'étend par linéarité aux k formes générales. La vérification que $d^2 = 0$ est une conséquence directe du Lemme de Schwartz.

Maintenant soit $f : V \rightarrow U$ un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^n alors on définit le "pull-back" $f^* : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(V)$ par :

$$f^*(\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(f(x)) df_{i_1} \wedge df_{i_2} \cdots \wedge df_{i_k}.$$

Lemme 6.2. On a :

- (1) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta) \quad \forall \omega \in \Omega^k(U), \forall \eta \in \Omega^s(U)$
- (2) $f^*(d\omega) = d(f^*(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega^k(U)$
- (3) et si $g : W \rightarrow V$ est une autre application lisse alors $(f \circ g)^*(\omega) = g^*(f^*(\omega))$.

Proof. Le premier énoncé est une vérification directe. Pour le deuxième, il est suffisant de le vérifier pour $\omega = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ (les autres cas sont similaires). On a :

$$f^*(d\omega) = f^*\left(\sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \cdots \wedge dx_k\right) = \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i}(f(x)) df_i \wedge df_1 \cdots \wedge df_k$$

$$d(f^*(\omega)) = d(a(f(x)) df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = \sum_i \frac{\partial a(f(x))}{\partial x_i} dx_i \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k =$$

$$\sum_{i,j} \frac{\partial a}{\partial x_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k = \sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j}(f(x)) df_j \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k.$$

Enfin pour le troisième, encore une fois, grâce aux points précédents il est suffisant de le vérifier seulement pour les 0 formes (où c'est trivial) et les 1-formes. Là on a par exemple pour $\omega = a(x)dx_i$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)^*(\omega) &= a(f(g(x)))d(f_i \circ g(x)) = a(f(g(x)))df_i(g(x))dg(x) = \\ &= g^*(a(f(x))df_i(x)) = g^*(f^*(\omega)). \end{aligned}$$

□

Remarque 6.3. En particulier si $U' \subset U$ est un autre ouvert et $i : U' \hookrightarrow U$ est l'inclusion, on définit $\omega|_{U'} := i^*(\omega) \forall \omega \in \Omega^*(U)$.

Exemple 6.4. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Alors nous avons maintenant deux définitions d'un objet qui s'appelle df : d'un côté on a la différentielle $d_p f : T_p U \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$, cela pour tout $p \in U$. De l'autre côté nous avons défini la 1-forme $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \in \Omega^1(U)$. En effet les deux objets coïncident : soit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ une base de $T_p U$ en tout point U et notons dx_i la base duale (donc par définition $dx_i \in T_p^* U$ et $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{i,j}$). Alors $d_p f = \sum_i c_i dx_i$ car $d_p f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p U, T_{f(p)} \mathbb{R}) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p U, \mathbb{R}) = T_p^* U$ (car on peut identifier $T_x \mathbb{R}$ avec \mathbb{R} en fixant partout la base $\frac{\partial}{\partial t}$). Mais pour calculer les coefficients c_i il suffit d'appliquer $d_p f$ à $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et par définition de $d_p f$ cela donne $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial t}$ et donc par l'identification de $T_{f(p)} \mathbb{R}$ avec \mathbb{R} juste $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

6.2. Formes différentielles sur une variété différentiable. Soit M une variété différentiable de dimension m et soit $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ un atlas pour M .

Définition 6.5. Une k -forme différentielle sur M est la donnée d'une k -forme différentielle $\omega_i \in \Omega^k(\phi_i(U_i)), \forall i \in I$ telle que $\forall i \neq j$ on ait

$$(\omega_i)|_{\phi_i(U_i \cap U_j)} = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(\omega_j|_{\phi_j(U_j \cap U_i)}).$$

Exemple 6.6. Soit $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ alors $df \in \Omega^1(M)$. En effet si par définition on a $f_j = f \circ \phi_j^{-1}$ et $df_j = d(f \circ \phi_j^{-1}) \in \Omega^1(\phi_j(U_j))$. Alors sur $U_i \cap U_j$ on a $df_i = d(f \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_j \circ \phi_i^{-1}) \in \Omega^1(\phi_i(U_i \cap U_j))$ et donc $f_i = d((\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(f \circ \phi_j^{-1})) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(d(f \circ \phi_j^{-1})) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(df_j)$ où dans l'avant dernière égalité nous avons utilisé le troisième point du Lemme 6.2.

Plus en général si $g_1, \dots, g_k \in \Omega^0(M)$ alors $dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k \in \Omega^k(M)$ en effet si la condition de recollement est vérifiée pour g_i alors elle l'est aussi pour dg_i grâce au point 2) du Lemme 6.2 et aussi pour les produits extérieurs par le point 1 du même lemme.

On a la suivante :

Proposition 6.7. $\Omega^*(M)$ est une algèbre associative avec unité et munie d'une "dérivée extérieure" de degré 1 donnée localement par d . Si $f : N \rightarrow M$ est une application lisse alors elle induit un morphisme d'algèbres $f^* : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(N)$ qui commute aux dérivées extérieures et qui est défini en cartes locales.

Proof. Tous les énoncés sont simples ou découlent directement du Lemme 6.2. Par exemple la bonne définition de d est due au fait que si $(\omega_i)|_{\phi_i(U_i \cap U_j)} = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(\omega_j|_{\phi_j(U_j \cap U_i)})$ alors on a $(d\omega_i)|_{\phi_i(U_i \cap U_j)} = d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(\omega_j|_{\phi_j(U_j \cap U_i)}) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(d\omega_j|_{\phi_j(U_j \cap U_i)})$. La bonne définition du produit \wedge est prouvée de façon similaire.

La définition de f^* est faite par cartes locales : si $\omega \in \Omega^*(M)$ alors $f^{-1}(U_i), i \in I$ est un recouvrement de N par des ouverts; on choisit alors un atlas $\{(V_j, \psi_j), j \in J\}$ de N tel que $\forall (V_j, \psi_j) \exists i \in I$ tel que $f(V_j) \subset U_i$ et on définit $f^*(\omega)_j := (\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1})^*(\omega_i)$. On vérifie que si (U_k, ϕ_k) est une autre carte contenant $f(V_j)$ alors on a $(\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1})^*(\omega_i) = (\phi_k \circ f \circ \psi_j^{-1})^*(\omega_k)$ car $\omega_k = (\phi_i \circ \phi_k^{-1})^*(\omega_i)$ et on utilise le point 3 du Lemme 6.2. Puis on vérifie alors que si (V_k, ψ_k) est une autre carte de l'atlas de N , alors $f^*(\omega)_k = (\psi_j \circ \psi_k^{-1})^*(f^*(\omega)_j)$. En effet on a :

$$\begin{aligned} f^*(\omega)_k &= ((\phi_i \circ f \circ \psi_k^{-1})^*(\omega_i)) = ((\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1} \circ \psi_j \circ \psi_k^{-1})^*(\omega_i)) = \\ &= (\psi_j \circ \psi_k^{-1})^*((\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1})^*(\omega_i)) = (\psi_j \circ \psi_k^{-1})^* f^*(\omega)_j. \end{aligned}$$

Le fait que f^* soit un morphisme d'algèbre découle du point 1 du Lemme 6.2 et le fait que $f^*(d) = df^*$ du point 2. \square

6.3. Partitions de l'unité. La suivante proposition nous dit que nous pouvons écrire la fonction constante 1 sur une variété comme somme de fonctions lisses, chacune ayant support en une carte. Cela nous permettra de "localiser" beaucoup de constructions par la suite :

Proposition 6.8. Soit M une variété différentiable; alors elle admet un atlas dénombrable $\{(U_i, \phi_i), i \in \mathbb{N}\}$ et des fonctions $\psi_i \in C^\infty(M; [0, 1]), i \in \mathbb{N}$ telles que $\text{supp}(\psi_i) \subset U_i$ et $\sum_i \psi_i = 1 \in C^\infty(M)$. De plus, on peut supposer que $\forall m \in M \#\{i|m \in \text{supp}(\psi_i)\} < \infty$. Si M est compacte on peut supposer I fini.

6.4. Le théorème de Stokes. Supposons que M est une variété compacte lisse orientée et soit $\{(U_i, \phi_i), 1 \leq i \leq k\}$ un atlas orienté fini. Soit aussi $\psi_i, i \in I$ une partition de l'unité subordonnée à cet atlas. Alors définissons $\omega_n \in \Omega^n(M)$ comme $\omega_n = \sum_i \psi_i \phi_i^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$. Puisque les changements de cartes sont positifs, alors on vérifie que $\omega_n(x) \neq 0 \forall x \in M$. On appelle ω_n une "forme volume" sur M . De plus on a automatiquement $d\omega_n = 0$.

Lemme 6.9. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$. Soit $f : V \rightarrow U$ une application lisse; alors $f^*(\omega) = \det(\text{Jac}(f))(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Proof. Par définition on a $f^*(\omega) = df_1 \wedge \cdots \wedge df_n$ où f_i sont les composantes de f . Donc on a :

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} dx_{i_1} \wedge \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_n} = \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}} \epsilon(i_1, \dots, i_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

où $\epsilon(i_1, \dots, i_n) = 0$ si $\exists j \neq k, i_j = i_k$ et c'est le signe de la permutation (i_1, \dots, i_n) autrement. \square

Lemme 6.10 (Formule de changement de variable dans les intégrales multiples). Soit $f : V \rightarrow U$ une application C^1 entre deux ouverts de \mathbb{R}^n et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur U . Alors $g \circ f$ est intégrable sur V et

$$\int_U g(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_V (g \circ f)(x) |\det \text{Jac} f| dx_1 \cdots dx_n.$$

Définition 6.11. L'intégrale d'une n -forme ω_n sur M est

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^m} (\phi_i^{-1})^*(\psi_i \omega)$$

où l'intégration sur \mathbb{R}^n d'une n -forme $a(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ à support compact est par définition l'intégrale de Lebesgue de $a(x)$ sur \mathbb{R}^n .

Proposition 6.12. L'intégrale $\int_M \omega$ ne dépend pas du choix de l'atlas fini $\mathcal{A} := \{(U_i, \phi_i), 1 \leq i \leq k\}$ ni de la partition de l'unité $\{\psi_i, i \in I\}$.

Proof. Si $\mathcal{A}_2 := \{(V_j, \phi'_j), 1 \leq j \leq k'\}$ est un autre atlas orienté fini et ψ'_j est une partition de l'unité qui lui est subordonnée, alors aussi $\mathcal{A}' := \{(U_i \cap V_j, \phi_i|_{U_i \cap V_j}), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k'\}$ est un autre atlas et la partition de l'unité qui lui est subordonnée est $\psi_i \psi'_j$. Mais on a :

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^m} (\phi_i^{-1})^*(\psi_i \omega) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k'} \int_{\mathbb{R}^m} (\phi_i^{-1})^*(\psi_i \psi'_j \omega),$$

donc l'intégrale défini par l'atlas \mathcal{A}' est le même que celui défini par \mathcal{A} . On peut de façon similaire définir l'atlas $\mathcal{A}'' := \{(U_i \cap V_j, \phi'_j|_{U_i \cap V_j}), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k'\}$ et montrer que l'intégrale défini par \mathcal{A}_2 est le même que celui défini par \mathcal{A}' . Enfin les intégrales définis par \mathcal{A}' et \mathcal{A}'' coïncident car les atlas diffèrent seulement par les difféomorphismes ϕ'_j au lieu de ϕ_i et le changement

de carte preserve l'intégrale sur \mathbb{R}^n : si $(\phi_i^{-1})^*(\psi_i\psi'_j\omega) = a(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ alors

$$\begin{aligned} ((\phi'_j)^{-1})^*(\psi_i\psi'_j\omega) &= a(\phi_i \circ (\phi'_j)^{-1}(x)) \det(\text{Jac}(\phi_i \circ (\phi'_j)^{-1})) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \\ &= a(\phi_i \circ (\phi'_j)^{-1}(x)) |\det(\text{Jac}(\phi_i \circ (\phi'_j)^{-1}))| dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

parce que les atlas sont orientés. Donc on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\phi_i^{-1})^*(\psi_i\psi'_j\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} ((\phi'_j)^{-1})^*(\psi_i\psi'_j\omega)$$

par la formule de changement de variable dans les intégrales de Riemann. \square

Théorème 6.13 (Stokes). *Soit M une variété compacte orientée à bord et $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ et $i : \partial M \hookrightarrow M$ l'inclusion. Alors on a :*

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \int_M d\omega.$$

Proof. Soit $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ un atlas fini et ρ_i une partition de l'unité qui lui est subordonnée (i.e. $\rho_i \in C_0^\infty(U_i, [0, 1])$ et $\sum_i \rho_i = 1$). Alors $\omega = \sum_i \rho_i \omega$. Alors par définition nous avons que :

$$\int_M d\omega = \sum_i \int_{\mathbb{R}^m} (d\rho_i \omega)_i$$

où $(\rho_i \omega)_i$ est l'écriture en la carte locale de \mathbb{R}^m de $\rho_i \omega$. Il y a deux cas possibles : soit la carte (U_i, ϕ_i) est une carte difféomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^m soit à un ouvert de \mathbb{R}_+^m .

Cas ouvert de \mathbb{R}^m . Dans ce cas on a $\int_{\mathbb{R}^m} (d\rho_i \omega)_i = 0$. En effet on a $\omega_i = \sum_{j=1}^m a_j(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}_j \wedge \cdots \wedge dx_m$ et l'intégral est :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\rho_i a_j(x))}{\partial x_j} (-1)^{j-1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m = \\ &\sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}_j \wedge \cdots \wedge dx_m \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial(\rho_i a_j(x))}{\partial x_j} dx_j = \\ &\sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}_j \wedge \cdots \wedge dx_m [\rho_i(x) a_j(x)]_{x_j=-\infty}^{x_j=\infty} = 0 \end{aligned}$$

parce que ρ_i a support compact.

Cas ouvert de \mathbb{R}_+^m . Dans ce cas on a :

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\rho_i a_j(x))}{\partial x_j} (-1)^{j-1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m =$$

$$(6) \quad \int_{\mathbb{R}^{m-1}} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial(\rho_i a_j(x))}{\partial x_1} dx_1 +$$

$$(7) \quad \sum_{j=2}^m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}_j \wedge \cdots \wedge dx_m \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial(\rho_i a_j(x))}{\partial x_j} dx_j =$$

$$(8) \quad = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (\rho_i a_1)(x|_{x_1=0}) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} i^*(\rho_i \omega)$$

L'énoncé final est alors obtenu en sommant sur les cartes (U_i, ϕ_i) . \square

6.5. Formes différentielles fermées et exactes.

Définition 6.14. Une forme $\omega \in \Omega^*(M)$ est fermée si $d\omega = 0$, elle est exacte si il existe $\eta \in \Omega^*(M)$ telle que $d\eta = \omega$. On note $Z^*(M)$ l'espace vectoriel des formes fermées et $B^*(M)$ celui de celles exactes.

Remarque 6.15. Puisque $d^2 = 0$ si une forme est exacte alors elle est fermée donc $B^*(M) \subset Z^*(M)$. La graduation de Ω^* se restreint à une graduation sur $B^*(M)$ et sur $Z^*(M)$. De plus $B^*(M)$ et $Z^*(M)$ sont des algèbres.

Définition 6.16 (Cohomologie de de Rham). L'algèbre de cohomologie de de Rham de M est $H^*(M) = Z^*(M)/B^*(M)$. Elle est graduée par la graduation induite de Z^* . Pour toute $\omega \in Z^*(M)$ on note $[\omega] \in H^*(M)$ sa *classe de cohomologie*.

Remarque 6.17. Dans tout ce qui précède on peut remplacer $\Omega^*(M)$ (et $Z^*(M)$ et $B^*(M)$) par leurs sous-algèbres formées par les formes à support compact. On obtient alors la cohomologie à support compact $H_c^*(M)$.

Théorème 6.18. Si M est une variété compacte alors $H^*(M)$ est une algèbre de dimension finie et si $f : M \rightarrow N$ est une application lisse alors elle induit un morphisme d'algèbres $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ qui dépend seulement de la classe d'omotopie lisse de f .

Exemple 6.19. Soit M une variété compacte orientée de dimension m et $\omega \in \Omega^m(M)$ une forme volume. Alors $d\omega = 0$ et $\int_M \omega > 0$ donc $\omega \notin B^*(M)$. Donc $0 \neq [\omega] \in H^m(M)$. En effet on peut montrer que $H^m(M) = \mathbb{R}$. Pour être plus concrets, dans le cas de $M = S^1 = [0, 2\pi]/\{0 \sim 2\pi\}$ pensez à $\omega = d\theta$ et pour le cas du tore T^m pensez à $d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_m$.

Lemme 6.20. Soit I un intervalle (compacte ou pas) et $M^{(m)}$ une variété lisse. Soit $\pi : M \times I \rightarrow M$ la projection et $\forall t \in I$ soit $s_t : M \hookrightarrow M \times I$ le plongement $s_t(x) = x \times \{t\}, \forall x \in M$. Alors π^* et s_t^* sont inverses l'une de l'autre en cohomologie : $\pi^* \circ s_t^* = \text{Id}_{H^*(M \times I)}$ et $s_t^* \circ \pi^* = \text{Id}_{H^*(M)}$.

Proof. Remarquons qu'on a automatiquement (déjà au niveau de Ω^*) que $s_t^* \circ \pi^* = \text{Id}_{\Omega^*(M)}$ et donc, a fortiori l'identité est vraie en cohomologie.

Aussi, soit

$$F_0 = C^\infty(M \times I) \otimes_{\mathbb{R}} \pi^*(\Omega^*(M))$$

et $t : M \times I \rightarrow I$ une coordonnée paramétrant I . Soit alors $F_1 = dt \wedge F_0 \subset \Omega^*(M \times I)$ et on vérifie facilement qu'on a $\Omega^*(M \times I) = F_0 \oplus F_1$ (en tant qu'espaces vectoriels).

Pour montrer que $\pi^* \circ s_t^* = \text{Id}_{H^*(M \times I)}$ nous montrerons qu'il existe une application linéaire $K : \Omega^*(M \times I) \rightarrow \Omega^*(M \times I)$ de degré -1 telle que :

$$(9) \quad \text{Id}_{M \times I} - \pi^* \circ s_t^* = \pm(dK - Kd).$$

Puisque le second membre est nul en cohomologie, alors cela prouvera l'énoncé. Définissons alors $K : F_0 \oplus F_1$ par $K|_{F_0} = 0$ et $K|_{F_1}(dt \wedge \omega) = \int_t^y \omega ds \in F_0$. Vérifions alors l'identité sur F_0 et sur F_1 séparément.

Vérification sur F_0 . Si $\omega \in F_0$ alors elle est une somme de formes différentielles de la forme $f(x, y)\omega_M$ où $\omega_M \in \pi^*(\Omega^*(M))$ c'est à dire ne dépend pas de t . Le coté gauche est alors $f(x, t)\omega_M - f(x, 0)\omega_M$. Le coté droit est

$$\begin{aligned} \pm Kd\omega &= \pm Kd(f(x, s)\omega_M) = \pm K(f(x, s)d\omega_M) \pm K(\omega_M df(x, s)) = \\ &= \pm K(\omega_M df(x, s)) = \pm K(\omega_M \frac{\partial f}{\partial t}(x, s)dt) = \\ &= \pm \int_t^y \omega_M \frac{\partial f}{\partial t}(x, s)ds = \omega_M(f(x, y) - f(x, t)). \end{aligned}$$

où on a remarqué que $f(x, s)d\omega_M \in F_0$ et aussi $\omega_M df(x, s) - \omega_M \frac{\partial f}{\partial t}(x, s)dt \in F_0$.

Vérification sur F_1 . Dans ce cas le coté gauche de l'équation (9) est l'identité sur F_1 (parce-que s_t^* est nul sur F_1). Si $dt \wedge \omega \in F_1$ alors

$$\begin{aligned} \pm(dK - Kd)(dt \wedge \omega) &= \pm d \int_t^y \omega ds \mp K(dt \wedge d\omega) = \\ &= \pm \omega \wedge dt + \int_t^y \sum_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \wedge dx_i \right) ds - \int_t^y \sum_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \wedge dx_i \right) ds = \pm \omega \wedge dt. \end{aligned}$$

□

Lemme 6.21 (de Poincaré). $H^m(\mathbb{R}^n) = 0, m > 0$ et $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

Proof. Si $n = 0$ l'énoncé est vrai. Supposons-le vrai pour n et montrons-le pour $n + 1$. Soit $s : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ donnée par $s(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0)$ et $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$. Alors le Lemme 6.20 montre que s^* et π^* sont des isomorphismes donc la thèse suit. □

Lemme 6.22. Soit $\omega \in Z^*(M \times [-1, 1])$ et soit $\omega_{\pm 1} = s_{\pm 1}^* \omega$ les restrictions à $M \times \{\pm 1\}$ respectivement. Alors $[\omega_1] = [\omega_{-1}] \in H^*(M)$.

Proof. Soit $s_t : M \rightarrow M \times \{t\} \hookrightarrow M \times [-1, 1]$ et $\pi : M \times [-1, 1] \rightarrow M$ la projection. Par le Lemme 6.20 on a que s_t^* est l'inverse de π^* en cohomologie. Alors $s_+^* = s_-^*$. \square

Corollaire 6.23. *Si $f_t : M \rightarrow N, t \in [0, 1]$ est une homotopie lisse et $\omega \in Z^*(N)$ alors $[f_1^*(\omega)] = [f_0^*(\omega)] \in H^*(M)$.*

7. LE GROUPE FONDAMENTAL ET LES REVETEMENTS

7.1. Homotopie.

Définition 7.1. Une couple d'espaces topologiques est une couple (X, A) où X est un espace topologique et $A \subset X$. Une application $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une fonction continue $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(A) \subset B$.

Exemple 7.2. Si $A = \emptyset$ alors on retrouve les espaces topologiques. Si $A = \{pt\}$ alors on a un espaces topologiques pointé, le point pt est dit le "point base de X ".

Définition 7.3 (Homotopie). Soient $(X, A), (Y, B)$ deux couples d'espaces topologiques et $f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ des fonctions continues. Elles sont *homotopes* s'il existe une application $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continue telle que $F(x, 0) = f_0(x)$ et $F(x, 1) = f_1(x)$, $\forall x \in X$ et pour tout $t \in [0, 1]$ on ait $F(A, t) \subset B$. On notera $f_0 \simeq f_1$.

Exercice 7.4. Prouver que "être homotopes" est une relation d'équivalence sur les fonctions continues entre (X, A) et (Y, B) . Ses classes d'équivalence sont notés $[f]$ et appelés "classes d'homotopies".

Définition 7.5 (Equivalence homotopique). Deux paires (X, A) et (Y, B) sont "homotopiquement équivalents" s'il existe $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ et $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$ telles que $f \circ g \simeq Id_Y$ et $g \circ f \simeq Id_X$.

Un espace X qui est homotopiquement équivalent à un point est dit contractible.

Exercice 7.6. Prouver que la relation "équivalence homotopique" est une relation d'équivalence sur les paires d'espaces.

Exercice 7.7. Prouver que $(\mathbb{R}^n, \vec{0})$ est homotopiquement équivalent à $(\{pt\}, \{pt\})$.

7.2. Le groupe fondamental. Rappelons que S^1 est la sphère de dimension 1 que nous allons voir comme les nombres complexes de norme 1. En particulier elle contient $1 \in S^1$ que nous utiliserons comme son point base. Dorenavant nous analyserons plus en détail la catégorie des espaces pointés (i.e. paires où $A = \{x_0\}$, le "point base").

Définition 7.8. Soit X un espace topologique et α, β deux "chemins en X " (c'est à dire applications continues $[0, 1] \rightarrow X$) telles que $\beta(0) = \alpha(1)$. La concatenation de α et β , notée $\alpha \cdot \beta$ est l'application $\alpha \cdot \beta : [0, 1] \rightarrow X$ définie par

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Si X est muni d'un point base x_0 , une boucle est un chemin $\alpha : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$.

Lemme 7.9. Si $\alpha, \alpha' : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ sont homotopes et $\beta : [0, 1] \rightarrow X$ est tel que $\beta(0) = x_0$ alors $\alpha \cdot \beta \simeq \alpha' \cdot \beta$ en tant qu'applications $([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (X, \{x_0, \beta(1)\})$. De façon similaire, si $\beta(1) = x_0$ alors $\beta \cdot \alpha \simeq \beta \cdot \alpha'$ en tant qu'applications $([0, 1], 1) \rightarrow (X, \{x_0, \beta(0)\})$.

Proof. Nous allons prouver le premier énoncé, le deuxième étant très similaire. Soit $F(s, t) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow (X, x_0)$ l'homotopie entre α et α' . Alors l'homotopie cherchée est $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow (X, x_0)$ définie par

$$G(x, t) = \begin{cases} F(2x, t) & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2x - 1) & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

□

Lemme 7.10 (Associativité à homotopie près de la concatenation). Si $\alpha, \beta, \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ sont trois chemins tels que $\alpha(1) = \beta(0)$ et $\beta(1) = \gamma(0)$ alors on a $((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) \simeq \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Proof. Les chemins $((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)$ et $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ diffèrent seulement par leur paramétrisation. Nous allons alors prouver que si $g_1, g_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sont deux fonctions continues bijectives et croissantes alors pour tout lacet $\delta : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ on a que $\delta \circ g_1 \simeq \delta \circ g_2$. En effet l'homotopie cherchée est :

$$F(x, t) = \delta(tg_1(x) + (1 - t)g_2(x)).$$

□

Lemme 7.11 (Existence de l'inverse à homotopie près). Si α est une boucle dans (X, x_0) alors $\alpha^{-1} : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ la boucle définie par $\alpha^{-1}(x) = \alpha(x^{-1})$. Alors $\alpha \cdot \alpha^{-1} \simeq \alpha^{-1} \cdot \alpha \simeq \text{const}$ où const est la boucle constante $\text{const} : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ définie par $\text{const}(x) = x_0 \forall x \in S^1$.

Proof. L'homotopie cherchée est :

$$F(x, t) = \begin{cases} \alpha(\exp(4\pi i(1 - t)x)), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha(\exp(4\pi i(1 - t)(1 - x))), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

□

Définition 7.12 (Groupe fondamental d'un espace pointé). Le groupe fondamental de (X, x_0) , noté $\pi_1(X, x_0)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de $(S^1, 1)$ dans (X, x_0) . Il est muni de la structure de groupe induite par le produit de concatenation : ce produit est bien défini grâce au Lemme 7.9, associatif grâce au Lemme 7.10 et chaque élément a un inverse grâce au Lemme 7.11, l'élément neutre étant le lacet constant.

On dit qu'un espace est simplement connexe si $\pi_1(X, x_0) = Id$.

Lemme 7.13. *Soit $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ une application continue; alors il y a un morphisme de groupes induit par post-composition des lacets avec f , noté $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$. En particulier si (X, x_0) est homotopiquement équivalent à (Y, y_0) alors $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe à $\pi_1(Y, y_0)$.*

Proof. Définissons $f_*([\alpha]) := [f \circ \alpha]$ pour toute boucle α . Remarquons que si $\alpha \simeq \alpha'$ alors $f \circ \alpha \simeq f \circ \alpha'$ donc l'application est bien définie. En effet si H est une homotopie entre α et α' alors $f \circ H$ est une homotopie entre $f \circ \alpha$ et $f \circ \alpha'$.

De plus $f_*(\alpha \cdot \beta) = f_*(\alpha) \cdot f_*(\beta)$ donc elle induit bien un morphisme de groupes. Si enfin $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ est l'inverse homotopique de f , alors $g_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ est un morphisme que nous allons prouver être l'inverse de f_* . En effet on a $Id_X \simeq g \circ f$ relativement à x_0 . Donc pour toute boucle α on a $\alpha = Id_X \circ \alpha \simeq g \circ f \circ \alpha = g_* \circ f_* \circ \alpha$. Donc le morphisme f_* est injectif. De façon similaire, puisque $Id_Y \simeq f \circ g$ on a que f_* est surjectif. \square

Lemme 7.14. *Un lacet $\alpha : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ est trivial dans $\pi_1(X, x_0)$ si et seulement si il existe une application continue $f : (D^2, [0, 1]) \rightarrow (X, x_0)$ qui l'étend.*

Proof. Si α est trivial alors il existe une homotopie $F : S^1 \times [0, 1]$ qui sur $S^1 \times \{1\}$ vaut x_0 . Mais alors F descend à une application continue sur D^2 définie par $f(\rho e^{i\theta}) = F((1-t)e^{i\theta})$. Réciproquement donnée $f : (D^2, [0, 1]) \rightarrow (X, x_0)$ alors $f|_{S^1}$ est nulle homotope d'homotopie trivialisante : $F(\theta, t) = f((1-t)e^{i\theta})$. \square

Remarque 7.15. Le lemme précédent peut être reformulé en disant que le groupe fondamental est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques pointés et leurs applications continues à homotopie près, dans la catégorie des groupes et leurs morphismes.

Corollaire 7.16. $\pi_1(\mathbb{R}^n, \vec{0}) = Id$.

Lemme 7.17. *Soit $x_0, x'_0 \in X$ deux points dans la même composante connexe par arcs et $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin continu t.q. $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. Alors $\pi_1(X, x'_0) \simeq \pi_1(X, x_0)$ et un isomorphisme est induit par $[\alpha'] \rightarrow [\gamma^{-1} \cdot \alpha' \cdot \gamma]$.*

Proof. Par le Lemme 7.9 l'application est bien définie, et par le Lemme 7.11 son inverse est $[\alpha] \rightarrow [\gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1}]$. Il s'agit d'un morphisme de groupes car par le Lemme 7.11 on a $[\gamma^{-1} \cdot \alpha' \cdot \gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot \alpha' \cdot \gamma] = [\gamma^{-1} \cdot \alpha' \cdot \alpha' \cdot \gamma]$. \square

Exercice 7.18. Montrer que S^n est simplement connexe si $n \geq 2$ et qu'il existe un morphisme surjectif $d : \pi_1(S_1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$. (Idée : prouver d'abord qu'on peut approcher tout lacet continu par un lacet lisse qui lui est homotope.)

7.3. Groupes et leurs presentations. Soit S un ensemble et S^{-1} un autre ensemble en bijection avec S par l'application (formelle!) $s \rightarrow s^{-1}$. Un mot dans l'ensemble est une suite finie d'éléments de $S \cup S^{-1}$. Deux mots sont *équivalents* s'ils peuvent être obtenus l'un de l'autre par une suite finie d'insertions/éliminations de sous-mots de la forme ss^{-1} ou $s^{-1}s$ pour quelque $s \in S$.

Exemple 7.19. Si $S = \{a, b, c\}$ alors un mot est a, b, a, b^{-1}, b, a . Il est équivalent à a, b, a, a .

Lemme 7.20. L'ensemble $F(S)$ des classes d'équivalences des mots (y inclut le mot vide) est le groupe libre engendré par S . Il est muni de la loi de composition induite par la concaténation des mots.

Exemple 7.21. Si $S = \{a, b, c\}$ alors l'inverse de a, b, a, a est $a^{-1}, a^{-1}, b^{-1}, a^{-1}$. En effet en les concaténant on obtient un mot équivalent au mot vide.

Lemme 7.22. Soit G un groupe et $S \subset G$ un sous-ensemble d'éléments. Alors il existe un morphisme de groupes $i : F(S) \rightarrow G$ qui envoie chaque $s \in S$ dans l'élément correspondant.

Définition 7.23. Soit S un ensemble et $R \subset F(S)$ un sous-ensemble (dit des "relations"). Alors le groupe de générateurs S et relations R est :

$$\langle S | R \rangle = F(S) / \langle\langle R \rangle\rangle$$

où $\langle\langle R \rangle\rangle$ est le plus petit sous-groupe normal contenant R .

Exercice 7.24. Prouver que tout groupe est isomorphe à un $\langle S | R \rangle$ pour certains S et R .

Solution 7.25. Prenons comme $S = G$ et comme R toute la table de multiplication de G c'est à dire l'ensemble des mots de la forme $g, h, (gh)^{-1}$.

Définition 7.26. Un groupe G est finiment engendré s'il est de la forme $\langle S | R \rangle$ pour S fini. Finiment présenté s'il est de la forme $\langle S | R \rangle$ avec R et S finis.

Définition 7.27. Soit A, G_1, G_2 groupes et $i_j : A \rightarrow G_j, j = 1, 2$ homomorphismes. L'amalgame de G_1 et G_2 au dessus de A , noté $G_1 \star_A G_2$ est le groupe présenté par $S = G_1 \cup G_2$ et :

$$R = \begin{cases} (g, h, (gh)^{-1}) & \forall g, h \in G_1 \\ (g, h, (gh)^{-1}) & \forall g, h \in G_2 \\ 1_{G_j} & \text{ou } 1_{G_j} \text{ est l'identite de } G_j \\ (i_1(a), i_2(a)^{-1}) & \forall a \in A \end{cases}$$

Si $A = 1$ on appelle $G_1 \star G_2$ le produit libre.

Remarque 7.28. Pour $j = 1$ il y a un morphisme canonique $\rho_j : G_j \rightarrow G_1 \star_A G_2$ donné par $\rho(g) = g$. Il n'est pas forcément injectif : si $G_2 = 1$, $A = G_1$, et $i_1 = Id$ alors $G_1 \star_A G_2 = 1$.

Proposition 7.29. [*Propriété universelle de l'amalgame*] Soient G_1, G_2, A, T groupes supposons $i_j : A \rightarrow G_j$ et $p_j : G_j \rightarrow T$ morphismes tels que $p_1 \circ i_1 = p_2 \circ i_2$. Alors il existe un morphisme $p : G_1 \star_A G_2 \rightarrow T$ t.q. $p_j = p \circ \rho_j, j = 1, 2$.

Proof. Le groupe $G_1 \star_A G_2$ est par définition engendré par les éléments de $G_1 \cup G_2$. Définissons alors $p : F(G_1 \cup G_2) \rightarrow T$ par $p(g) = p_j(g)$ si $g \in G_j$. Pour montrer qu'il est bien défini il faut contrôler que son noyau contienne les relations R de la Définition 7.27. Cela est évident car p_j sont des morphismes (donc les premières trois types de relations sont dans le noyau de p) et $p_2 \circ i_2 = p_1 \circ i_1$ ce qui implique qu'aussi le dernier type de relations est dans le noyau. \square

7.4. Le théorème de Seifert-van Kampen.

Théorème 7.30. Soit $X_1 \cup X_2$ un espace topologique décomposé en l'union de deux ouverts connexes par arcs X_1, X_2 t.q. $X_1 \cap X_2$ soit connexe par arcs et soit $x_0 \in X_1 \cap X_2$ un point base. Alors il y a un diagramme commutatif de groupes $i_j : \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X_j, x_0), j = 1, 2$ et $p_j : \pi_1(X_j, x_0) \rightarrow \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0)$ où i_j et p_j sont induits par les inclusions. On a alors, avec la notation de la Proposition 7.29 :

$$p : \pi_1(X_1, x_0) \star_{\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)} \pi_1(X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0)$$

est un isomorphisme.

Proof. Surjectivité. Soit $\gamma : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (X_1 \cup X_2, x_0)$ un chemin. Les préimages par γ de X_1 et de X_2 forment un recouvrement ouvert de $[0, 1]$: par compacité de $[0, 1]$ nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini. Choisissons alors un nombre fini de points $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ tels que $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subset X_1$ ou X_2 et pour chaque t_i soit $\beta_i : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin reliant $\gamma(t_i)$ à x_0 en restant dans chaque des ouvert X_i contenant $\gamma(t_i)$ (il existe car X_1, X_2 et $X_1 \cap X_2$ sont connexes par arcs). Alors $[\gamma]$ est l'image du produit $\prod_i [\delta_i]$ où $\delta_i := \beta_{i+1} \cdot \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \cdot \beta_i^{-1} \in \pi_1(X_i, x_0), i = 1$ ou 2 .

Injectivité. Soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie d'un lacet γ . On a $F(0, s) = F(1, s) = x_0 \forall s$, et $F(t, 1) = x_0 \forall t$ et $F^{-1}(X_i)$ est un recouvrement ouvert de $[0, 1] \times [0, 1]$. On peut trouver n assez grand tel que tout carré $C_{i,j} := [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}], i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ est contenu dans l'un des $F^{-1}(X_i)$. (Exercice : sinon utiliser le Lemme 7.39.)

Nous allons montrer qu'on peut modifier F pour obtenir une homotopie F' telle que $F'(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) = x_0, \forall i, j \in \{0, \dots, n\}$.

En effet, à moins de reparamétriser F on peut supposer que dans un disque de rayon ϵ ($\epsilon \ll \frac{1}{n}$) autour de chaque point $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ F est constante. Soit

alors $\beta_{i,j} : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin reliant $F(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ à x_0 en restant dans chaque ouvert X_i qui contient $F(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ (il existe car X_1, X_2 et $X_1 \cap X_2$ sont connexes par arcs) et tel que si $F(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) = x_0$ alors $\beta_{i,j}$ est constant. On peut alors remplacer F par l'homotopie F' qui est identique à F hors de $\bigsqcup_{i,j} B_\epsilon(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ et qui sur $B_\epsilon(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ est (en coordonnées polaires centrées en $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$):

$$F'(r, \theta) = \beta_{i,j}\left(\frac{\epsilon - r}{\epsilon}\right).$$

Maintenant on a que la restriction de F' à chaque segment horizontal $\{\frac{i}{n}\} \times [0, 1]$ est un chemin écrit comme produit de chemins soit dans X_1 soit dans X_2 . De plus $F'(C_{i,j}) \subset X_1$ ou X_2 . Soit alors $\gamma_{i,j} := F'|_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times \{\frac{j}{n}\}}$ et $\beta_{i,j} := F'|_{\{\frac{i}{n}\} \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]}$: on a que $\gamma_{i,j} \in \pi_1(X_1, x_0)$ ou $\pi_1(X_2, x_0)$ et, si $F'(C_{i-1,j})$ et $F'(C_{i,j})$ sont dans un X_k différent alors $\beta_{i,j} \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$.

Donc pour chaque $C_{i,j}$ on voit que l'homotopie F' réalise la relation $\gamma_{i,j} \simeq \beta_{i+1,j}^{-1} \cdot \gamma_{i,j+1} \cdot \beta_{i,j}$ (qui est dans la présentation de l'amalgame car c'est une relation parmi les mots d'un des X_i) et si $F'(C_{i,j})$ et $F'(C_{i-1,j})$ sont contenus dans deux X_i différents, alors on peut utiliser la relation $(i_1)_*(\beta_{i,j}) \cdot (i_2)_*(\beta_{i,j})^{-1}$ qui est aussi dans les relations de l'amalgame pour exprimer $F'([0, 1] \times \{\frac{j+1}{n}\})$ en fonction de $F'([0, 1] \times \{\frac{j}{n}\})$. □

7.5. Revêtements. Dorénavant tous les espaces que nous considérerons seront localement connexes.

Définition 7.31. Un revêtement d'un espace topologique connexe X est une application continue surjective $p : Y \rightarrow X$ (Y esp. topologique) telle que $\forall x \in X$ il existe un "voisinage de trivialisatation" $U_x \subset X$ tel que $\pi^{-1}(U_x) = \bigsqcup_\alpha U_x^\alpha$ est l'union disjointe d'ouverts $U_x^\alpha \subset Y$ tels que $p : U_x^\alpha \rightarrow U_x$ est un homéomorphisme pour chaque α . L'espace Y est dit l'espace total du revêtement, et pour tout $x \in X$ l'ensemble $p^{-1}(x)$ est la *fibres* sur x .

Remarque 7.32. Souvent dans la littérature on assume Y connexe.

Lemme 7.33. Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement et $U \subset X$ un ouvert trivialisant connexe. Alors chaque composante connexe de $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à U par π .

Proof. Puisque U est trivialisant alors $p^{-1}(U) = \bigsqcup_\alpha U^\alpha$ et chaque U^α est homéomorphe à U par p donc connexe. Puisque ces ouverts sont disjoints et connexes ils sont exactement les composantes connexes de $p^{-1}(U)$. □

Corollaire 7.34. La cardinalité de $p^{-1}(x)$ est localement constante donc constante sur X . On l'appelle le nombre de feuillettes du revêtement.

Exemple 7.35. (1) $z \rightarrow z^n$ est un revêtement de S^1 par S^1 à n feuillettes.

- (2) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ est un revêtement.
 (3) $\vec{x} \rightarrow \pm \vec{x}$ est un revêtement à deux feuillets de S^n à \mathbb{RP}^n .

Définition 7.36. Soit $p_1 : Y_1 \rightarrow X$ et $p_2 : Y_2 \rightarrow X$ deux revêtements. Un morphisme $f : (Y_1, p_1) \rightarrow (Y_2, p_2)$ est une application continue $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ telle que $p_2 \circ f = p_1$.

7.6. Relevés des applications. Donnée un revêtement $p : Y \rightarrow X$ et une fonction continue $f : Z \rightarrow X$, il est important de décider s'il existe un relevé g de f , c'est à dire une application continue $g : Z \rightarrow Y$ telle que $p \circ g = f$:

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \exists g? & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

D'abord observons que s'il existe alors il est unique sur chaque composante connexe.

Lemme 7.37. Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement et Z un espace connexe. Si $g_0, g_1 : Z \rightarrow Y$ sont applications continues telles que $p \circ g_0 = p \circ g_1$, alors l'ensemble

$$A := \{z \in Z : g_0(z) = g_1(z)\},$$

est soit vide soit Z .

Proof. Puisque Z est connexe, il suffit de montrer que A est ouvert et fermé dans Z .

Soit $a \in A$ et $y = g_0(a) = g_1(a)$. Choisissons un ouvert trivialisant $U \ni p(y)$ et soit V l'unique composante connexe par arcs de $p^{-1}(U)$ qui contient y . Alors, $g_0^{-1}(V) \cap g_1^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de a qui est contenu dans A (parce-que sur ce voisinage on a $g_0 = p|_V^{-1} \circ (p \circ g_0) = p|_V^{-1} \circ (p \circ g_1) = g_1$). Donc, A est ouvert.

Soit $z \in Z$ tel que $g_0(z) \neq g_1(z)$. Soit U un voisinage ouvert trivialisant de $p(g_0(z)) = p(g_1(z))$. Pour $i = 0, 1$, soit V_i la composante connexe par arcs de $p^{-1}(U)$ contenant $g_i(z)$. Alors, $g_0^{-1}(V_0) \cap g_1^{-1}(V_1)$ est un ouvert de Z contenant z et disjoint de A . Donc, $Z \setminus A$ est ouvert. \square

Les revêtements ont la propriété de "relèvement des chemins."

Proposition 7.38 (Relèvement des chemins). Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement et $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ tels que $p(y_0) = x_0$. Alors, pour tout chemin $\alpha : I \rightarrow X$ qui commence à x_0 , il existe un unique relevé $\beta : I \rightarrow Y$ de α qui commence à y_0 .

Proof. L'unicité de β suit du Lemme 7.37. Pour tout $t \in [0, 1]$, soit U_t un ouvert trivialisant connexe de $\alpha(t)$. Alors, $(\alpha^{-1}(U_t))_t$ est un recouvrement

ouvert de $[0, 1]$ et par compacité de $[0, 1]$ nous pouvons trouver un nombre fini d'intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ tels que $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ où U_i est un ouvert trivialisant connexe de p . Sur $[0, t_1]$, soit V_0 la composante connexe de $p^{-1}(U_0)$ contenant $\alpha(0)$; on peut relever α sur $[0, t_1]$ par $\tilde{\alpha} := (p|_{V_0})^{-1} \circ \alpha$. Supposons avoir relevé jusqu'à t_k et soit V_{k+1} la composante connexe de $p^{-1}(U_{k+1})$ contenant $\tilde{\alpha}(t_k)$. On peut étendre $\tilde{\alpha}$ sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ par $\tilde{\alpha} := (p|_{V_k})^{-1} \circ \alpha$. \square

Puis nous allons prouver que les revêtements ont la propriété de "relèvement des homotopies." Pour cela nous aurons besoin du suivant :

Lemme 7.39 (Le lemme de Lebesgue). *Soit X un espace métrique compact et \mathcal{U} un recouvrement ouvert de X . Alors il existe $\eta > 0$ (dit le nombre de Lebesgue pour \mathcal{U}) tel que tout $S \subset X$ de diamètre $< \eta$ doit être contenu dans un $U \in \mathcal{U}$.*

Proof. Pour tout $x \in X$, il existe $\eta(x) > 0$ t.q. la boule $\mathcal{B}(x, 2\eta(x))$ centrée en x de rayon $2\eta(x)$ est contenue en un $U(x) \in \mathcal{U}$. Puisque X est compact, on peut trouver $x_1, \dots, x_n \in X$ t.q.

$$X = \mathcal{B}(x_1, \eta(x_1)) \cup \dots \cup \mathcal{B}(x_n, \eta(x_n)).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on voit que

$$\eta := \min\{\eta(x_1), \dots, \eta(x_n)\}$$

satisfait la thèse. \square

Proposition 7.40 (Relèvement des homotopies). *Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement et Z un espace connexe et localement connexe par arcs. Soit $F : Z \times I \rightarrow X$ une homotopie et $g_0 : Z \rightarrow Y$ un relevé de $F(-, 0)$. Alors il existe un unique relevé $G : Z \times I \rightarrow Y$ de F tel que $G(-, 0) = g_0$.*

Proof. L'unicité de G suit du Lemma 7.37. Pour tout $z \in Z$, Proposition 7.38 montre que le chemin $F(z, -) : I \rightarrow X$ a un unique relevé commençant en $g_0(z)$. Cela définit une application $G : Z \times I \rightarrow Y$ telle que $p \circ G = F$ et $G(-, 0) = g_0$, mais nous devons encore en prouver la continuité. Nous pouvons déduire du Lemma 7.39 l'énoncé suivant.

Claim 7.41. Soit \mathcal{A} un recouvrement ouvert de $Z \times I$ et $z_0 \in Z$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert N de z_0 tel que

$$\forall J \subset [0, 1], \text{diam}(J) < \varepsilon \implies \exists A \in \mathcal{A}, N \times J \subset A.$$

Soit $z_0 \in Z$ et prouvons que G est continue sur un voisinage de $z_0 \times I$. Pour tout $(z, t) \in Z \times I$, soit $U_{(z,t)}$ un voisinage trivialisant ouvert de $F(z, t)$. En appliquant Claim 7.41 au recouvrement ouvert $\mathcal{A} := (F^{-1}(U_{(z,t)}))_{(z,t) \in Z \times I}$, nous trouvons un voisinage ouvert connexe par arcs N de z_0 et un entier $n \geq 1$ tels que $F(N \times [i/n, (i+1)/n])$ est contenu dans un ouvert trivialisant U_i pour

tout $i = 0, \dots, n-1$. Pour prouver que G est continue sur $N \times I$, procédons par induction. Supposons G continue sur $N \times [0, i/n]$ et prouvons la continuité de G sur $N \times [i/n, (i+1)/n]$. Soit V_i l'unique composante connexe par arcs de $p^{-1}(U_i)$ qui contient $G(N \times \{i/n\})$ (qui doit être connexe par arcs parce que G est continue sur l'espace connexe par arcs $N \times \{i/n\}$). On voit facilement que G doit coïncider sur $N \times [i/n, (i+1)/n]$ avec $(p|_{V_i})^{-1} \circ F$. Donc, G est continue sur $N \times [i/n, (i+1)/n]$. \square

On a l'application suivante de Proposition 7.38 et Proposition 7.40.

Corollaire 7.42. *Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement qui envoie y_0 sur x_0 . Soient α_0, α_1 des chemins dans X qui commencent en x_0 et soit β_0, β_1 leurs uniques relévés commençant en y_0 . Si les chemins α_0 et α_1 sont homotopes, alors β_0 et β_1 le sont. De plus si $\alpha_0(1) = \alpha_1(1)$ et l'homotopie ne bouge pas ce point, on peut supposer cela aussi de sa relevé.*

Par conséquent le morphisme $p_ : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ est injectif.*

Proof. Soit $A : I \times I \rightarrow X$ une homotopie entre $\alpha_0 : I \rightarrow X$ et $\alpha_1 : I \rightarrow X$ relative à $\{0, 1\}$ et $B : I \times I \rightarrow Y$ le seul relévé de A t.q. $B(-, 0) = \beta_0$ (Proposition 7.40). L'unicité prouvée en Proposition 7.38 a trois conséquences. D'abord, $B(0, -) = y_0$ puisque le chemin $B(0, -)$ satisfait $p \circ B(0, -) = \alpha_0$ et commence en y_0 . Puis, $B(1, -) = y_1$ où $y_1 := \beta_0(1)$ puisque le chemin $B(1, -)$ satisfait $p \circ B(1, -) = \alpha_1$ et commence en y_1 . Enfin, $B(-, 1) = \beta_1$ puisque le chemin $B(-, 1)$ satisfait $p \circ B(-, 1) = \alpha_1$ et commence en y_0 . Donc, $\beta_0(1) = B(1, 1) = \beta_1(1)$ et B est une homotopie entre $\beta_0 : I \rightarrow Y$ et $\beta_1 : I \rightarrow Y$ relative à $\{0, 1\}$. Le dernier énoncé s'en suit. \square

Nous pouvons enfin prouver que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Pour cela considérons le revêtement $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ défini par $p(t) = \exp(2i\pi t)$. Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^1$ un chemin fermé dont le seul relévé en \mathbb{R} commençant en 0 est noté β . Alors, $\beta(1) \in \mathbb{Z} = p^{-1}(1)$ et d'après Corollary 7.6, dépend seulement de la classe d'homotopie de $[\alpha]$. Nous le noterons $\deg(\alpha)$.

Théorème 7.43. *L'application "degré"*

$$\deg : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}, [\alpha] \longmapsto \deg(\alpha)$$

est un isomorphisme de groupes.

Remarque 7.44. Pour le lacet $\alpha(z) = z^n$ on a $\deg(\alpha) = n$: voilà pourquoi on l'appelle degré.

Proof. D'abord prouvons qu'il est un homomorphisme. Soit α et α' chemins fermés $1 \rightsquigarrow 1$, dont les relévés commençant en 0 sont respectivement β et β' . Alors $\beta * (\beta' + \beta(1))$ (où $+$ denote une translation dans \mathbb{R}) est un relévé

de $\alpha * \alpha'$ et commence en 0. Nous en déduisons que $\deg(\alpha * \alpha') = \beta'(1) + \beta(1) = \deg(\alpha) + \deg(\alpha')$.

Prouvons maintenant que \deg est bijective. Pour tout $n \geq 1$, soit $\alpha_n : S^1 \rightarrow S^1$ défini par $\alpha_n(z) = z^n$. Alors on a $\deg(\alpha_n) = n$ d'où on voit que \deg est surjective. Pour prouver l'injectivité, soit α un chemin fermé t.q. $\deg(\alpha) = 0$. Alors, son unique relevé β commençant en 0 est fermé et nous pouvons écrire $p_{\#}([\beta]) = [\alpha]$, où $p_{\#} : \pi_1(\mathbb{R}, 0) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ est induit par p . Puisque \mathbb{R} est contractible, on en déduit que $[\alpha] = 1$. \square

Nous pouvons maintenant donner une réponse complète à notre problème initial (10).

Théorème 7.45 (Critère de relèvement des applications). *Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement avec $p(y_0) = x_0$, et $f : Z \rightarrow X$ une application continue t.q. $f(z_0) = x_0$, où Z est connexe et localement connexe par arcs. Alors il existe un relèvement $g : Z \rightarrow Y$ de f t.q. $g(z_0) = y_0$ ssi $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$. De plus, si g existe il est unique.*

Proof. L'unicité de g est donnée par le Lemme 7.37 et l'implication " \Rightarrow " suit de la functorialité du groupe fondamental. Prouvons l'implication " \Leftarrow ".

Pour tout $z \in Z$, nous choisissons un chemin $\alpha : z_0 \rightsquigarrow z$. Alors, $f \circ \alpha$ est un chemin $x_0 \rightsquigarrow f(z)$, dont le seul relèvement qui commence en y_0 est noté β . Posons $g(z) := \beta(1)$. Pour montrer que $g(z)$ est bien-définie, considérons un autre chemin $\alpha' : z_0 \rightsquigarrow z$, et notons β' le seul relèvement de $f \circ \alpha'$ commençant en y_0 . Par hypothèse, la classe d'homotopie de $\gamma := (f \circ \alpha) * (f \circ \overline{\alpha'}) : x_0 \rightsquigarrow x_0$ est dans $p_*\pi_1(Y, y_0)$, donc son seul relèvement v qui commence en y_0 est fermé. Remarquons que $v * \beta'$ est un relèvement de $(f \circ \alpha) * (f \circ \overline{\alpha'}) * (f \circ \alpha') \simeq (f \circ \alpha)$ et il commence en y_0 . Donc, nous avons $\beta \simeq v * \beta'$ qui implique $\beta(1) = \beta'(1)$. Donc nous avons une application

$$g : Z \longrightarrow Y$$

qui satisfait $p \circ g = f$ et $g(z_0) = y_0$: nous devons encore prouver qu'elle est continue.

Soit $z \in Z$ un point où on veut prouver que g est continue. Choisissons un chemin $\alpha : z_0 \rightsquigarrow z$ et soit β le seul relèvement de $f \circ \alpha$ qui commence en y_0 . Soit U un voisinage trivialisant de $f(z)$, W un voisinage connexe par arcs de z t.q. $f(W) \subset U$ et soit V la composante connexe par arcs de $p^{-1}(U)$ qui contient $g(z)$. Pour tout $w \in W$, soit $\gamma : z \rightsquigarrow w$ un chemin contenu dans W . Alors, $\beta * (p|_V^{-1} \circ f \circ \gamma)$ est un relèvement de $f \circ (\alpha * \gamma)$ qui commence en y_0 , donc $g(w) = (\beta * (p|_V^{-1} \circ f \circ \gamma))(1) = (p|_V^{-1} \circ f)(w)$. Nous concluons que $g|_W$ coïncide avec $p|_V^{-1} \circ f|_W$, ce qui implique qu'elle est continue. \square

7.7. Le revêtement universel. Soit X un espace connexe, localement connexe par arcs et *localement relativement simplement connexe* c'est à dire t.q.

$\forall x \in X$ il existe une base de voisinages $\{V\}$ de x de x t.q. $i_* : \pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ est triviale.

Nous allons prouver qu'il existe un et un seul (à isomorphisme près) revêtement $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ tel que \tilde{X} est simplement connexe. Il s'appellera le *revêtement universel* de X car si $p : Y \rightarrow X$ est un revêtement alors, grâce au Théorème 7.45 on peut relever $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ à $\pi_Y : \tilde{X} \rightarrow Y$ de façon à que $\pi = p \circ \pi_Y$. En particulier il est unique à homéomorphisme près car si \tilde{X}' est un autre revêtement universel, on aurait des morphismes de revêtements applications $\pi_{X'} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ et $\pi_X : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ telles que $\pi_{X'} \circ \pi_X$ et $\pi_X \circ \pi_{X'}$ sont des automorphismes des revêtements.

Théorème 7.46. *Si X est connexe, localement connexe par arcs et localement simplement connexe alors il existe un (et un seul à isomorphisme près) revêtement universel de (X, x_0) . Plus en général, si $G \subset \pi_1(X, x_0)$ est un sous-groupe, il existe un revêtement $p : (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ tel que $p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)) = G$.*

Proof. Soit $\tilde{X}_G := \{(x, \gamma) | x \in X, \gamma : x_0 \rightsquigarrow x\} / \sim$ où $(x', \gamma') \sim (x, \gamma) \iff x = x'$ et $\gamma \cdot (\gamma')^{-1} \in G$ et $p : \tilde{X}_G \rightarrow X$ définie par $p([(x, \gamma)]) = x$. Pour tout voisinage connexe par arcs U_x de x tel que l'image de $i_* : \pi_1(U_x, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ est triviale, posons $\tilde{U}_{[x, \gamma]} := \{[y, \gamma \cdot \gamma_y] | y \in U_x, \gamma_y : x \rightsquigarrow y \subset U_x\}$ et soit \mathcal{T} la topologie sur \tilde{X} engendrée par les $\tilde{U}_{[x, \gamma]}$. Remarquons que $\forall g \in G$ on a $\tilde{U}_{[x, \gamma]} = \tilde{U}_{[x, g\gamma]}$ (par définition de \tilde{X}_G), donc la fibre sur x est $\{[x, G\gamma]\}$ i.e. elle a la même cardinalité que l'ensemble des classes latérales de G dans X .

Puisque U_x est connexe par arcs alors aussi chaque $\tilde{U}_{[x, \gamma]}$ l'est. De plus on a que $\tilde{U}_{[x, \gamma']} \cap \tilde{U}_{[x, \gamma]} = \emptyset$ si $\gamma \cdot \gamma'^{-1} \notin G$. En effet si $[y, \gamma \cdot \gamma_y] = [y, \gamma' \cdot \gamma'_y]$ alors par définition de \tilde{X}_G on a

$$G \ni [\gamma \cdot \gamma_y \cdot (\gamma' \cdot \gamma'_y)^{-1}] = [\gamma \cdot \gamma_y \cdot (\gamma'_y)^{-1} \cdot \gamma'^{-1}] = [\gamma \cdot \gamma'^{-1}]$$

parce que $\gamma_y \cdot (\gamma'_y)^{-1} \in i_*(\pi_1(U, x)) = 1$.

Nous prétendons que p est continue : en effet les U_x forment une base de la topologie de X et il est donc suffisant de voir que $p^{-1}(U_x) = \sqcup_{[x, \gamma]} \tilde{U}_{[x, \gamma]}$ où les γ varient sur un représentant pour chaque classe latérale de G et chaque $U_{[x, \gamma]}$ est ouvert par définition. De plus il est évident que p est un revêtement et ses ouverts trivialisants sont par construction les U_x .

Prouvons que \tilde{X}_G est connexe par arcs : si $[x, \gamma] \in \tilde{X}_G$ alors il est lié à $[x_0, \text{triv}]$ par le chemin $\tilde{\gamma} : [x_0, x_0] \rightsquigarrow [x, \gamma]$ donné par $\tilde{\gamma}(t) = [\gamma(t), \gamma|_{[0, t]}]$.

Enfin $p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)) = G$: si $\alpha : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ est un lacet basé en \tilde{x}_0 représentant une classe non triviale dans $\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$ tel que $p_*([\alpha]) \notin G$ alors le point $[x_0, p(\alpha)] \in \tilde{X}_G$ est un relevé de x_0 différent de \tilde{x}_0 par définition de \tilde{X}_G . Cela est absurde car α et $[p \circ \alpha(t), p \circ \alpha|_{[0, t]}]$ sont deux relevés de

$p \circ \alpha$ qui commencent en \tilde{x}_0 mais on avait supposé que α était un lacet tandis-que le bout final de $[p \circ \alpha(t), p \circ \alpha|_{[0,t]}$ est $[x_0, p \circ \alpha] \neq [x_0, \text{triv}]$. Cela montre que $p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)) \subset G$. De l'autre coté si α est un lacet dans (X, x_0) représentant une classe dans $G \setminus \{e\}$ alors son relevé $\tilde{\alpha} := [\alpha(t), \alpha|_{[0,t]}$ est un lacet fermé dans $(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$. Il y est donc non nul homotope car autrement $p(\tilde{\alpha}) = \alpha$ serait aussi nulhomotope dans X .

Pour l'unicité : si (\tilde{X}', \tilde{x}') avec $p' : \tilde{X}'_G \rightarrow X$ est un autre revêtement de (X, x_0) tel que $p'_*(\pi_1(\tilde{X}'_G, \tilde{x}')) = G$ alors on peut relever $p' : (\tilde{X}'_G, \tilde{x}') \rightarrow (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$ (grâce au Théorème 7.45). Et de même pour $p : (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}'_G, \tilde{x}')$; mais à cause du Lemme 7.37 les conditions $p'(\tilde{x}') = \tilde{x}_0$ et $p(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'$ impliquent que $p \circ p' = Id_{\tilde{X}'}$ et $p' \circ p = Id_{\tilde{X}}$. □

7.8. L'action du groupe fondamental sur le revêtement universel.

Si $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ est le revêtement universel, alors pour tout $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, soit $\tilde{x}_0 \cdot \alpha$ le point final du chemin relevant α à partir de \tilde{x}_0 . Par le Théorème 7.45 il existe un et un seul (par le Lemme 7.37) automorphisme de ρ_α de (\tilde{X}, \tilde{x}_0) tel que $\rho_\alpha(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$. On peut vérifier que l'application *deck* : $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ associant à α l'automorphisme ρ_α est un isomorphisme de groupes. Cela munit (\tilde{X}, \tilde{x}_0) d'une action de $\pi_1(X, x_0)$ dite de "deck transformations".