

Géométrie 1

16 décembre 2015

ATTENTION : ces notes ne sont qu'un support qui résume les sujets traités dans le cours de géométrie L3 MEEF. Je les rédige au fur et à mesure que le cours avance et elles contiennent probablement plusieurs coquilles : j'invite les lecteurs à me les signaler. Pour des traités complets et à utiliser comme référence dans le futur je conseille :

1. Le Tome 4 du "Cours de Mathématiques" d'Arnaudiés et Fraysse ("Algèbre bilinéaire et géométrie") ;
2. Le livre de "Géométrie" de Michèle Audin.
3. Le livre de "Géométrie" de M. Berger.
4. Le livre de "Euclidean Geometry" de Robin Hartshorn (sa lecture peut être dure parfois pour le lecteur non-expert en arithmétique mais il s'agit d'un livre très enrichissant).
5. Le livre de "Introduction to Geometry" de H.S.M. Coxeter.

1 Introduction : Axiomes d'Euclide de Hilbert et un peu d'histoire

Le traité le plus connu de l'histoire des mathématiques est probablement les *Éléments* d'Euclide d'Alexandrie, datant du troisième siècle A.J. Dans ce traité Euclide réunit (et complète) toutes les connaissances acquises à son époque dans le domaine de la géométrie y incluant des résultats attribués à Pythagore et Eudossus.

L'importance de ce traité dans l'histoire de la pensée humaine ne peut pas être sous-estimée. Euclide s'efforce de définir des objets de base (points, droites, angles etc.) puis de donner un nombre minimal (cinq!) de Postulats (aujourd'hui nous les appelons plutôt Axiomes), en se basant sur lesquels toutes les vérités géométriques peuvent être déduites de façon rigoureuse et sans qu'aucun doute d'interprétation puisse intervenir. C'est la naissance du concept de preuve mathématique, qui marque un point fondamental dans notre histoire.

Les cinq postulats d'Euclide étaient censés définir et identifier de façon unique le plan (qu'aujourd'hui nous appelons plan euclidien) avec ses isométries, ses droites etc. Cependant déjà quelques siècles après Euclide (notamment avec Tolomée) on commence à critiquer le 5^{ème} postulat, qui semble beaucoup plus compliqué et "inutile" que les autres. En effet l'impression générale est que déjà les premiers quatre postulats devraient suffire à identifier de façon unique le plan tel que nous l'imaginons. Après des nombreux efforts et de fausses preuves qui déduisaient le 5^{ème} axiome des autres (et donc le rendaient un Théorème, donc une déduction) c'est seulement grâce à Gauss, et de façon indépendante Lobatchevski et Bolyai qu'on arriva à la compréhension que le 5^{ème} axiome est nécessaire pour bien préciser qu'on veut parler du plan dont nous avons l'intuition naturelle. Mais comment montrer cela? La grande contribution de Gauss, Lobatchevski et Bolyai a été de montrer qu'en gardant les premières quatre axiomes mais en remplaçant le 5^{ème} par un autre axiome (incompatible avec l'intuition naturelle du plan euclidien) on pouvait obtenir encore une notion complètement cohérente (et très riche!) de plan, avec ses droites ses angles, ses isométries etc... Il s'agit du plan hyperbolique. C'est à ce moment que la géométrie moderne commença à découvrir des nouveaux espaces où des phénomènes nouveaux peuvent se passer. Ces espaces non euclidiens ont permis de comprendre la notion d'espace courbe et ont fourni à Einstein le langage nécessaire à formuler sa théorie de la relativité générale.

Mais quels sont donc les bases des éléments d'Euclide? Tout d'abord il se base sur une "définition" : j'utilise les guillemets parce qu'aujourd'hui nous ne serions pas du tout satisfaits par une telle définition. La voilà :

Définition 1.1. *Le point est ce dont la partie est nulle. Une ligne est une longueur sans largeur. Une ligne droite est celle qui est également placée entre ses points. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont pas placées dans la même direction. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux, chacun des angles égaux est droit. Un cercle est une figure plane comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites menées à la circonférence d'un des points placé dans cette figure étant égales entre elles*

Aujourd'hui nous dirions plutôt que le plan est un *ensemble* dont les *éléments* (ce sont les seuls mot que nous ne définissons pas!) sont appelés points et qui est muni d'une famille de sous-ensembles dits droites, dont les propriétés sont données par les axiomes (à suivre). Et cela ne donnerait pas encore la définition d'angle ou de cercle qui demanderait un peu plus de travail. Mais venons donc aux axiomes d'Euclide :

- Axiomes 1.2** (d'Euclide).
1. *Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.*
 2. *Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.*
 3. *Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.*
 4. *Tous les angles droits sont congruents.*
 5. *Si deux lignes sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.*

Congruent veut dire qu'ils peuvent être superposés par un mouvement rigide du plan; mais attention : ici, tout comme Euclide, je glisse sur beaucoup de détails très très importants!

Maintenant essayons de comprendre quel est le problème qui a troublé les mathématiciens pendant des siècles : sauriez-vous imaginer un plan (avec ses droites etc.) qui satisfait tous les premiers quatres axiomes mais pas le cinquième? Si sa formulation originale n'est pas parlante on peut le réformuler d'une façon équivalente par l'axiome dit de Playfair : donnée une droite et un point il existe au plus une droite parallèle à la droite par ce point. Alors sauriez-vous imaginer un plan qui satisfait 1,2,3,4 mais pas l'axiome de Playfair? C'est difficile... et encore pour les anciens la question n'était pas du tout posée ainsi. Pour eux il était clair que le cinquième axiome découlait des autres, il s'agissait plutôt de le démontrer. Comme nous avons dit ci-dessus un tel plan existe et il s'agit du plan hyperbolique, mais nous ne traiterons pas cet objet dans ces notes.

1.1 Les axiomes de Hilbert et le plan cartésien

Comme nous avons remarqué ci dessus, les définitions données par Euclide ne sont pas satisfaisantes et cela entraîne que quelque preuve parmi celles des livres des *Éléments* n'est pas complètement rigoureuse. Le premier exemple de cela est la Proposition I.1 (premier livre, première proposition), qui dit qu'on peut construire à la règle et compas un triangle équilatéral ayant comme base un segment donné.

Exercice 1. *Construire à la règle et compas un triangle équilatéral ayant comme base un segment donné. Quel est le problème dans la construction que vous venez de proposer?*

Surement quelque part dans votre construction vous avez considéré le point d'intersection d'un cercle avec une droite ou un cercle. Le problème est justement là : dans les axiomes rien ne vous assure qu'un tel point existe. Juste pour clarté supposez par exemple que l'objet qu'on veut appeler "plan" est l'ensemble \mathbb{Q}^2 (couples de nombres rationnels), que l'on visualise par les coordonnées x et y de façon standard, comme appris à l'école. Supposez aussi que les cercles et

les droites sont ceux que vous imaginez. Si le segment de départ est le segment d'extrémités $A = (0, 0)$ et $B = (0, 1)$ alors le troisième point cherché sera forcément $C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (ou son symétrique par rapport à l'axe des x). Mais $\sqrt{3}/2 \notin \mathbb{Q}$ donc ce point n'est pas dans \mathbb{Q}^2 : ce point n'existe pas dans le plan !

Voilà que donc il a fallu re-établir une liste d'axiomes qui identifie exactement le plan euclidien tel que nous l'imaginons, sans que des faits non-déroulant des axiomes se glissent dans nos constructions et nos preuves. Ce travail a été accompli à la fin du XIX^{eme} siècle par le mathématicien allemand David Hilbert qui a fourni une liste complète d'axiomes. Je les reporte ci dessous seulement par souci de complétude mais ils ne sont pas du tout dans le programme de ce cours (pour une magnifique discussion de ces axiomes voir [?]) :

Axiomes 1.3 (de Hilbert). *Les premiers trois axiomes sont dits d'incidence :*

I1 Par deux points distincts il passe une et une seule droite.

I2 Chaque droite contient au moins deux points.

I3 Il existe trois points non colinéaires.

Puis il y a 5 axiomes d'ordre : on postule (=on suppose) qu'il existe une relation sur les triplets de points (A, B, C) que nous appelons "B est entre A et C" et notons par $A * B * C$. On suppose que cette relation satisfait :

O1 Si B est entre A et C alors il est aussi entre C et A.

O2 Donnés deux points A et C distincts, il existe un point entre A et C.

O3 Donnés trois points distincts sur une droite exactement l'un des trois est entre les deux autres.

O4 (Axiome de Pasch) Soient A, B, C trois points non colinéaires et ℓ une droite qui ne contient aucun d'entre A, B et C mais qui contient un point D qui est entre A et B. Alors ℓ contient soit un point qui est entre B et C soit un point qui est entre C et A.

(Par la relation "être entre" l'on définit alors le segment \overline{AB} comme l'ensemble des points qui sont entre A et B auquel l'on ajoute A et B. On peut prouver que forcément tout point divise une droite en deux sous ensembles dits "rayons", ou demi-droites et que toute droite coupe le plan en deux "demi-plans". En plus on peut définir la notion de cercle de rayon donné et centre donné.)

Puis il y a les axiomes de congruence : l'on postule l'existence d'une relation dite congruence entre les segments.

C1 Donné un segment \overline{AB} un point C et une demi-droite commençant en C il existe un et un seul point D sur la demi-droite tel que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

C2 Si $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ et $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ alors aussi $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$. En plus $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$.

C3 Donnés trois points A, B, C sur une droite tels que B est entre A et C et trois points sur une autre droite D, E, F tels que E est entre D et F, si $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ et $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ alors aussi $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$.

On définit aussi un angle comme la donné de deux demi-droites sortant d'un même point et n'étant pas colinéaires. On postule qu'il existe une relation de congruence aussi pour les angles. Elle doit avoir les propriétés suivantes :

C4 Donné un angle \widehat{BAC} et une demi-droite \vec{DE} partant de D il existe une seule demi-droite \vec{DF} partant de D et qui est d'un coté donné de la demi-droite \vec{DE} telle que l'angle $\widehat{EDF} \equiv \widehat{BAC}$.

C5 Pour chaque trois angles α, β, γ si $\alpha \equiv \beta$ et $\beta \equiv \gamma$ alors $\alpha \equiv \gamma$.

C6 Si deux triangles ABC et A'B'C' ont $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ et $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ et $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ alors aussi $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$.

Puis il ya l'axiome de Playfair :

P Donnée une droite et un point il existe au plus une parallèle à la droite par ce point.

Le dernier axiome, est celui de continuité ou de Dedekind :

D Si une droite est divisée en deux sous-ensembles S et T tels que aucun point de S n'est entre deux points de T et réciproquement, alors il existe un et un seul point P dans la droite tel que pour tout $A \in S$ et pour tout $B \in T$ on a que P est entre A et B .

L'axiôme de Dedekind est à la base de la construction des nombres réels et il est donc très puissant. Il exclut par exemple que le plan puisse être \mathbb{Q}^2 comme dans l'exemple ci dessus, et il assure qu'une droite soit une copie de \mathbb{R} .

Mais une question que nous n'avons pas discuté est : existe-t'il un plan ayant toutes ces propriétés? La réponse est bien entendu "oui", mais il faut expliciter un tel exemple. Notre plan est donc le plan cartésien : \mathbb{R}^2 où les droites sont les lieux de zero des équations $ax + by + c$ (avec $a^2 + b^2 > 0$). Le segment d'extrémités $A = (a, b)$ et $B = (c, d)$ est l'ensemble $\overline{AB} = \{(ta + (1-t)c, tb + (1-t)d) | t \in [0, 1]\}$; sa longueur euclidienne est $\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$ et deux segments sont défini congruents ssi leur longueurs sont les mêmes (tout ça c'est des définitions!). De façon similaire on défini l'amplitude de l'angle aigu formé par deux droites de pentes m et m' par la valeur $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ telle que $\tan(\alpha) = |\frac{m-m'}{1+mm'}|$ (et encore il faudrait spécifier cette règle lorsque l'une des deux droites est parallèle à l'axe des y ...). Deux angles sont alors congruents s'ils ont la même amplitude. On peut vérifier que tous les axiômes de Hilbert sont satisfaits par ce "modèle". Donc il existe bien un plan euclidien ! Mais ce qui est beaucoup plus important est que ce plan est unique au sens suivant :

Théorème 1.4 (Hilbert). *Soit π un plan muni de droites, d'un relation sur les triplets de points "être entre" et d'une relation de congruence sur les segments et sur les angles. Si π satisfait tous les axiomes de Hilbert alors il existe une bijection $\phi : \pi \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :*

1. *pour toute droite $\ell \subset \pi$ on a que $\phi(\ell) \subset \mathbb{R}^2$ est une droite et cette correspondance est une bijection entre les droites de π et celles de \mathbb{R}^2 ;*
2. *pour tout angle $\alpha \subset \pi$ on a que $\phi(\alpha) \subset \mathbb{R}^2$ est un angle et cette correspondance est une bijection entre les angles de π et ceux de \mathbb{R}^2 ;*
3. *pour tout $A, B, C \in \pi$, B est entre A et C ssi $\phi(B)$ est entre $\phi(A)$ et $\phi(C)$;*
4. *pour tout $A, B, C, D \in \pi$ on a $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \iff \overline{\phi(A)\phi(B)} \equiv \overline{\phi(C)\phi(D)}$.*
5. *pour tout angles α, β en π on a $\alpha \equiv \beta \iff \phi(\alpha) \equiv \phi(\beta)$.*

Ce théorème nous assure que quelle que soit la façon dont vous imaginez votre plan, s'il satisfait les axiomes de Hilbert, alors il sera isométrique (peut être par une bijection ϕ compliquée !) au plan cartésien \mathbb{R}^2 . C'est rassurant !

2 Rappels sur espaces vectoriels, applications linéaires, bases, matrices et déterminants

Attention : ce chapitre du cours rappelle ce qu'on appelle normalement les bases de l'"algèbre linéaire" et se termine avec la théorie de réduction des endomorphismes. Il existe plusieurs textes standard ou reviser ces notions. En particulier je conseille :

1. "Algèbre Linéaire" de Joseph Grifone
2. "Algèbre" de Xavier Gourdon

ou encore les textes standard d'algèbre niveau L2 ou d'école prépa (comme ceux de Ramis ou de Marco et Lazzarini entre autres).

Ce chapitre est dédié aux rappels sur les espaces vectoriels. Un des concepts les plus importants de la théorie des espaces vectoriels est celui de "choix d'une base", qui correspond du point de vue physique au choix d'un système de coordonnées pour décrire l'espace ou l'espace-temps.

Définition 2.1 (Espace vectoriel). *Un espace vectoriel sur \mathbb{R} (ou réel, ou encore \mathbb{R} -espace vectoriel) (ou on peut remplacer \mathbb{R} par \mathbb{C} en obtenant la définition d'espace vectoriel sur \mathbb{C}) est un ensemble V , dont les éléments sont appelés vecteurs, muni de deux lois :*

1. *une loi interne " $+$ " : $V \times V \rightarrow V$ appelée addition ou somme vectorielle,*
2. *une loi de composition externe à gauche " \cdot " : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, appelée multiplication par un scalaire,*

telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :

1. *(Existence de l'élément neutre) Il existe un élément spécial dit le vecteur $\vec{0}$ tel que $\forall v \in V, v + \vec{0} = \vec{0} + v = v$;*
2. *(Existence de l'opposé) Pour tout $\vec{v} \in V$ il existe un autre vecteur, noté $-\vec{v}$ tel que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} = (-\vec{v}) + \vec{v}$;*
3. *(Associativité de la somme) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ on a $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$;*
4. *(Commutativité de la somme) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ on a $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$;*
5. *$\forall \vec{v} \in V$ on a $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.*
6. *(Distributivité du produit par scalaire) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ on a $\lambda_1 \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_1 \cdot \vec{v}_2$ ainsi que $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_1$;*
7. *$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\forall \vec{v} \in V$ on a $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{v}) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot \vec{v} = \lambda_2 \cdot (\lambda_1 \cdot \vec{v})$.*

Définition 2.2 (Sous espace vectoriel). *Si V est un \mathbb{R} espace vectoriel, un sous ensemble $U \subset V$ est un sous espace vectoriel si les restrictions à $\mathbb{R} \times U$ et $U \times U$ des lois $\cdot : \mathbb{R} \times U \rightarrow V$ et $+$: $U \times U \rightarrow V$ ont leurs valeurs en U (et pas seulement en V). Dit autrement U est stable pour les lois $+$ et \cdot .*

Exercice 2. *Soit V un \mathbb{R} espace vectoriel.*

1. *Prouver que si un sous ensemble $U \subset V$ est stable pour les lois \cdot et $+$ alors avec ces lois il est un espace vectoriel.*
2. *Prouver que si $U_i, i \in I$ est une collection de sous espaces vectoriels de V alors leur intersection est un sous-espace vectoriel de V .*

Définition 2.3 (Combinaison linéaire). *Donnés k vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ et k nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. On appelle combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ à coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ le vecteur $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{v}_k$.*

On dit que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sont linéairement dépendants si on peut trouver $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tous nuls tels que $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$. Autrement les $\{\vec{v}_i\}$ sont dits indépendants ou libres. Donnée un ensemble $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{\vec{v}_i, i \in I\}$ (noté aussi $C_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$ ou $\text{span}(\mathcal{F})$) de vecteurs de V , le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\mathcal{F})$ qu'ils engendrent est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels qui contiennent \mathcal{F} (ce n'est pas vide car V est un tel sous-espace).

Remarque 2.4. La propriété cruciale des bases par rapport aux familles génératrices est que les coefficients λ_i de la Définition 2.6 sont uniques pour tout \vec{w} ssi le système $(v_i)_{i \in I}$ est une base. On appelle ces valeurs les coordonnées de \vec{w} par rapport à la base $(\vec{v}_i)_{i \in I}$.

Définition 2.5 (Droites et plans vectoriels). Une droite vectorielle est un sous-espace vectoriel de V de dimension 1. Un plan vectoriel est un sous-espace vectoriel de V de dimension 2.

Exercice 3. Soit $\mathcal{F} = \{\vec{v}_i, i \in I\}$ un ensemble de vecteurs de V . Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{F} coïncide avec l'ensemble $\text{Vect}(\mathcal{F})$ de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs dans \mathcal{F} .

Définition 2.6. Une famille génératrice d'un espace vectoriel V est une famille $\{\vec{v}_i\}_{i \in I}$ telle que $\forall \vec{w} \in V$ il existe nombres réels (complexes si on travaille sur \mathbb{C}) $(\lambda_i)_{i \in I}$ dont au plus un nombre fini est non nul et tels que $\vec{w} = \sum \lambda_i \vec{v}_i$. Une base de V est une famille génératrice libre.

Théorème 2.7 (Théorème de la base incomplète). Soit $\mathcal{F} \subset V$ une famille libre de vecteurs. Alors il existe une base \mathcal{B} telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. En particulier tout espace vectoriel admet une base.

Démonstration. Admis.

2.7

Nous allons maintenant procéder à montrer que si V admet une base contenant seulement un nombre fini, $n \in \mathbb{N}$ de vecteurs, on dit que V est de dimension finie n ; de plus deux bases d'un même espace de dimension finie ont le même nombre de vecteurs.

Exercice 4. Soit $\vec{v}_i, i = 1, \dots, n+1$ une base de V et $\vec{w}_i, i = 1, \dots, m$ une famille de vecteurs. Soient $m_{j,i}$ les coordonnées des vecteurs \vec{w}_i dans la base \vec{v}_j , c'est à dire $\vec{w}_i = \sum_{j=1}^{n+1} m_{j,i} \vec{v}_j$. Supposons que $m_{n+1,1} \neq 0$ et posons $\vec{w}'_1 = \frac{\vec{w}_1}{m_{n+1,1}}$ et $\vec{w}'_i = \vec{w}_i - \frac{m_{n+1,i}}{m_{n+1,1}} \vec{w}_1, i = 2, \dots, m$.

1. Prouver que si $\vec{w}_i, i = 1, \dots, m$ est une famille libre alors aussi $\vec{w}'_i, i = 1, \dots, m$ l'est.
2. Prouver que les espaces vectoriels engendrés par $\{\vec{w}_i, i = 1, \dots, m\}$ et $\{\vec{w}'_i, i = 1, \dots, m\}$ coïncident.
3. Prouver que l'espace vectoriel engendré par $\{\vec{w}'_i, i = 2, \dots, m\}$ est contenu dans celui engendré par $\{\vec{v}_j, j = 1, \dots, n\}$.

Proposition 2.8. Si V est un espace vectoriel de dimension n et $U \subset V$ est engendré par $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ vecteurs qui sont linéairement indépendants alors $m \leq n$ et $m = n$ ssi $U = V$.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur n . Si $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$ l'énoncé est trivial. Supposons d'avoir prouvé l'énoncé jusqu'à $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ et prouvons-le pour $\dim_{\mathbb{R}} V = n+1$. Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1}$ une base de V et soient $\vec{w}_i := \sum_{j=1}^{n+1} m_{j,i} \vec{v}_j$. Si $m_{n+1,i} = 0, \forall i$ alors U est contenu dans le sous-espace vectoriel de V de dimension n qui est engendré par $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$: on termine par récurrence. Si non, supposons que par exemple $m_{n+1,1} = 1$ (à moins de re-ordonner les indices et diviser \vec{w}_1 par son dernier coefficient nous pouvons supposer tout cela). Puis, remplaçons la base $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ par $\vec{w}_1, \vec{w}'_2, \dots, \vec{w}'_m$ où $\vec{w}'_i := \vec{w}_i - m_{n+1,i} \vec{w}_1$. Il est immédiat de vérifier que les vecteurs \vec{w}'_i sont linéairement indépendants et forment une base du sous-espace vectoriel $U \cap \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ (voir Exercice 4). Par récurrence donc on a $m-1 \leq n$ et $m-1 = n$ ssi $U \cap \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. Mais alors $m \leq n+1$ et $m = n+1$ si et seulement si $U = \text{span}(\vec{w}_1, \vec{w}'_2, \dots, \vec{w}'_m) = \text{span}(\vec{w}_1, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = V$.

2.8

Corollaire 2.9. Deux bases d'un espace vectoriel V ont la même cardinalité, appelée "dimension de V " et notée $\dim_{\mathbb{R}}(V)$.

Exercice 5. Soit $S_n = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ et soit $V_n = \text{Fun}(S_n, \mathbb{R}) = \{f : S_n \rightarrow \mathbb{R}\}$. Trouver une base de S_n . Combien d'éléments a-t-elle ?

Exercice 6. Soit $V_\infty = \text{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$ et soit $f_i \in V_\infty$ la fonction définie par $f_i(k) = \delta_{i,k}$ (où $\delta_{x,y}$ est la δ de Kronecker c'est à dire la fonction qui vaut 1 ssi $x = y$ et 0 autrement). Montrer que l'ensemble des fonctions $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ ne forme pas une base de V_∞ . Sauriez-vous caractériser les vecteurs du sous espace vectoriel engendré par les $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$? Remarque : par le Théorème 2.7 il existe une base de V_∞ mais je n'en connais aucune explicite!

Dorenavant nous supposons toujours que V est un espace vectoriel réel de dimension finie.

2.1 Applications linéaires

Définition 2.10 (Applications linéaires ou homomorphismes). Soient V, W deux \mathbb{R} -espaces vectoriels. Une application $f : V \rightarrow W$ est linéaire si pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ on a

$$f(\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2) = \lambda_1 \cdot f(\vec{v}_1) + \lambda_2 \cdot f(\vec{v}_2).$$

Son noyau est $\ker(f) := \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_W\}$. Son image est $\text{im}(f) = \{f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}$. On a que $\ker(f) \subset V$ et $\text{im}(f) \subset W$ sont deux sous espaces vectoriels. On note $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \text{ linéaires}\}$. Si $V = W$ on note aussi $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) = \text{End}(V)$.

Définition 2.11 (Applications linéaires ou homomorphismes (deuxième version)). Soient V, W deux \mathbb{R} -espaces vectoriels. Une application $f : V \rightarrow W$ est linéaire si elle est un morphisme de groupes abéliens (c'est à dire pour tout $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ on a $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$) et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{v} \in V$ on a $f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})$. On note $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \text{ linéaires}\}$. Si $V = W$ on note aussi $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) = \text{End}(V)$.

Définition 2.12 (Applications linéaires ou homomorphismes (troisième version)). Soient V, W deux \mathbb{R} -espaces vectoriels. Une application $f : V \rightarrow W$ est linéaire si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ on a

$$f(\lambda \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda \cdot f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$$

. On note $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \text{ linéaires}\}$. Si $V = W$ on note aussi $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) = \text{End}(V)$.

Exercice 7. Prouver que les définitions ci dessous sont équivalentes.

On munit $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ d'une loi interne "+" et une loi externe \cdot comme suit :

1. $\forall f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ soit $f + g : V \rightarrow W$ l'application définie par $\forall \vec{v} \in V, (f + g)(\vec{v}) := f(\vec{v}) + g(\vec{v})$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ soit $\lambda \cdot f : V \rightarrow W$ l'application définie par $\forall \vec{v} \in V, (\lambda \cdot f)(\vec{v}) := \lambda \cdot (f(\vec{v}))$.

Mais attention la définition que nous avons donné ne montre pas encore que $f + g$ et $\lambda \cdot f$ sont dans $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, c'est le but de l'exercice suivant :

Exercice 8. Avec les notations introduites ci dessus, prouver que $f + g$ et $\lambda \cdot f$ sont dans $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$.

Exercice 9. Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base de V et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ des vecteurs (pas forcément une famille libre ni génératrice!) de W . Prouver qu'il existe exactement une application $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ telle que $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i, \forall i = 1, \dots, n$.

Exercice 10. Soient U, V, W trois espaces vectoriels. Prouver que si $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(U, V)$ et $g \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ alors $g \circ f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(U, W)$.

Définition 2.13 (Algèbre). Une \mathbb{R} -algèbre est un \mathbb{R} -espace vectoriel V muni d'une deuxième loi interne, notée \times telle que :

1. $\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{t} \in V : (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{t} = \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{t})$ (associativité);
2. $\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{t} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a : $(\lambda \vec{v} + \vec{w}) \times \vec{t} = \lambda \vec{v} \times \vec{t} + \vec{w} \times \vec{t}$ et $\vec{t} \times (\lambda \vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{t} \times \vec{v} + \vec{t} \times \vec{w}$.

On dit que V est une algèbre avec unité si il existe un élément non nul, noté 1 (et dit l'unité) tel que $\forall \vec{v} \in V$ on ait $\vec{v} \times 1 = 1 \times \vec{v} = \vec{v}$. Elle est commutative si $\forall \vec{v}, \vec{w}$ on a $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{v}$.

- Exemple 2.14.** – $V = \mathbb{R}$ vu comme muni de ses lois habituelles est une \mathbb{R} -algèbre ;
- $V = \mathbb{C}$ vu comme espace vectoriel réel de dimension 2 muni du produit des nombres complexes est une \mathbb{R} -algèbre de dimension 2 avec unité et commutative ;
 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes en une variable X (muni avec les lois habituelles) est une algèbre commutative avec unité de dimension infinie.

Exercice 11. Soit V un espace vectoriel réel. Prouver qu'avec les lois de composition $(+, \cdot, \circ)$ l'espace vectoriel $\text{End}(V)$ est une \mathbb{R} -algèbre avec unité. Qui est l'unité ?

Nous verrons bientôt qu'en général $\text{End}(V)$ est une algèbre non commutative.

3 Matrices

Définition 3.1. Une matrice M de taille $m \times n$ à coefficients réels est un tableau rectangulaire ayant m lignes et n colonnes dont les entrées sont notées $m_{i,j}$ (de sorte que l'entrée $m_{2,1}$ est celle à la deuxième ligne, première colonne etc). (Dit de façon plus formelle elle est une application $M : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$.)

- Nous noterons dorénavant $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices ayant m lignes et n colonnes et coefficients en \mathbb{R} (une autre notation standard est $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$). Si $m = 1$ M est aussi dite "vecteur ligne"; si $n = 1$ M est dite "vecteur colonne".
- Si $M, N \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $M + N \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ par $(M + N)_{i,j} = M_{i,j} + N_{i,j}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ et $\lambda \cdot M \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ comme $(\lambda \cdot M)_{i,j} = \lambda m_{i,j}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.
- La transposée de $M \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ est ${}^t M \in \text{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ définie par $({}^t M)_{i,j} = M_{j,i}, \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq m$.
- Si $M \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, $L \subset \{1, \dots, m\}$ et $C \subset \{1, \dots, n\}$ la sous-matrice aux lignes indexées dans L et aux colonnes indexées dans C , notée $M_{L,C}$ est la matrice de taille $(\#L) \times (\#C)$ (où $\#C$ est la cardinalité de C) obtenue en considérant seulement les entrées $M_{i,j}$ avec $i \in L$ et $j \in C$.
- Si $M \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, on dit qu'elle est triangulaire supérieure (ou trigonale supérieure) si $M_{i,j} = 0, \forall i > j$. Elle est triangulaire inférieure (ou trigonale inférieure) si $M_{i,j} = 0, \forall i < j$. Elle est diagonale si $M_{i,j} = 0 \forall i \neq j$. Elle est unipotente supérieure (resp. inférieure) si elle est triangulaire supérieure (resp. inférieure) et $M_{i,i} = 1 \forall 1 \leq i \leq n$. Elle est symétrique (resp. antisymétrique) si $M_{i,j} = M_{j,i} \forall i, j$ (resp. $M_{i,j} = -M_{j,i} \forall i, j$).

Exercice 12. Prouver que l'ensemble $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ muni des lois de composition $+$ et \cdot définies ci-dessus est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

On définit le produit d'une matrice M de taille $a \times b$ avec une autre matrice N de taille $b \times c$ comme la matrice de taille $a \times c$ dont l'entrée $(i, j)^{eme}$ (pour tout $1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq c$) est définie par la formule :

$$(M \cdot N)_{i,j} := \sum_{k=1}^b M_{i,k} N_{k,j}.$$

En particulier remarquons que si $M, N \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ alors aussi leur produit appartient à $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$.

Exercice 13. Prouver que l'ensemble $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ muni des lois $(+, \cdot, \times)$ est une \mathbb{R} -algèbre. Prouver que la matrice Id qui est définie par $Id_{i,j} = \delta_{i,j}$ est l'unité de l'algèbre $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$. Est-ce que l'algèbre $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ est commutative ?

Solution de l'exercice. Nous nous limiterons à prouver l'associativité du produit, en laissant les autres points au lecteur. Nous allons prouver un énoncé plus fort que celui de l'énoncé, c'est à dire : soit $M \in \text{Mat}(l \times m; \mathbb{R}), N \in \text{Mat}(m \times n; \mathbb{R}) P \in \text{Mat}(n \times o; \mathbb{R})$ alors on a $(M \cdot N) \cdot P = M \cdot (N \cdot P)$. Fixons $a \in \{1, \dots, l\}, b \in \{1, \dots, o\}$. Alors

$$((M \cdot N) \cdot P)_{a,b} = \sum_{f=1}^n (M \cdot N)_{a,f} P_{f,b} = \sum_{f=1}^n \left(\sum_{e=1}^m M_{a,e} N_{e,f} \right) P_{f,b} = \sum_{e=1}^m M_{a,e} \sum_{f=1}^n N_{e,f} P_{f,b} = \sum_{e=1}^m M_{a,e} (N \cdot P)_{e,b} = (M \cdot (N \cdot P))_{a,b}$$

Définition 3.2 (Le groupe linéaire $GL(n; \mathbb{R})$). $M \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice $N \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ telle que $N \cdot M = M \cdot N = Id$. Dans ce cas on appelle N l'inverse de M et on la note M^{-1} . On note $GL(n; \mathbb{R}) = \{M \in \text{Mat}(n \times n), M \text{ inversible}\}$.

Exercice 14. Prouver que $(GL(n; \mathbb{R}), \cdot)$ est un groupe.

Soit $\mathfrak{S}_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, \sigma \text{ bijection}\}$.

Exercice 15. Prouver que'en munissant \mathfrak{S} de la loi de composition interne \circ (composition de bijections) il devient un groupe non abélien. Qui est son unité ?

Définition 3.3 (Signature d'une permutation). Soit $H(x) : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $H(x) = 0$ si $x < 0$ et soit \mathcal{P} l'ensemble des sous ensembles de $\{1, \dots, n\}$ ayant exactement deux éléments. On définit $\epsilon : \mathfrak{S} \rightarrow \{\pm 1\}$ par la formule suivante :

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{H(\sigma(i) - \sigma(j))}.$$

Exercice 16. Prouver l'équivalence des trois formules données pour $\epsilon(\sigma)$.

Proposition 3.4. La signature est un homomorphisme de groupes $\epsilon : \mathfrak{S} \rightarrow \{\pm 1\}$ où l'ensemble $\{\pm 1\}$ est un groupe par rapport au produit.

Démonstration. Si $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}$ alors on a

$$\epsilon(\sigma \circ \tau) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i)))(\tau(j) - \tau(i))}{(\tau(j) - \tau(i))(j - i)} = \tag{1}$$

$$= \prod_{\mathcal{P}} \frac{\sigma(j') - \sigma(i')}{j' - i'} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau). \tag{2}$$

3.4

Définition 3.5 (Déterminant d'une matrice). Soit $M \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$. On définit $\det(M)$ comme suit :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n M_{\sigma(i), i}.$$

Exercice 17. Calculer le déterminant d'une matrice générique $M \in \text{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ et d'une matrice générique $N \in \text{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R})$.

Proposition 3.6 (Propriétés du déterminant). Soit $M \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$.

1. Si M' est obtenue de M en multipliant une colonne ou une ligne de M par une constante $c \in \mathbb{R}$ alors $\det(M') = c \det(M)$.
2. Si la $i^{\text{ème}}$ -ligne (ou colonne) de M est la somme de deux vecteurs ligne (resp. colonne) $\vec{v} + \vec{w}$ alors on a $\det(M) = \det(M_{\vec{v}}) + \det(M_{\vec{w}})$ où $M_{\vec{v}}$ (resp. $M_{\vec{w}}$) est la matrice obtenue en remplaçant cette ligne (ou colonne) par \vec{v} (resp. par \vec{w}).
3. Si M' est obtenue de M en échangeant deux lignes ou deux colonnes alors $\det(M') = -\det(M)$.
4. Si M a deux lignes ou colonnes égales ou proportionnelles alors $\det(M) = 0$.
5. Si $A, B \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ alors $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$.

6. M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$ et dans ce cas $N = M^{-1}$ est la matrice dont l'entrée $(i, j)^{eme}$ est :

$$(M^{-1})_{i,j} := (-1)^{i+j} \frac{\det(\hat{M}_{j,i})}{\det(M)}$$

ou $\hat{M}_{j,i}$ est la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue de M en éliminant la j^{eme} ligne et la i^{eme} colonne.

Démonstration. Admise (mais nous invitons le lecteur à essayer de prouver 1), 2), 3), 4) comme exercice). 3.6

Exercice 18. Prouver l'énoncé de la proposition pour les matrices de taille 2×2 et puis 3×3 .

Proposition 3.7 (Méthode de Laplace pour le calcul du déterminant). Soit $M \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$. Alors $\det(M)$ peut se calculer aussi par la méthode récursive suivante :

1. si $n = 1$ alors $M = M_{1,1}$ est un nombre et $\det(M) = M$;
2. Autrement on choisit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et on a :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n (-1)^{(i+j)} M_{i,j} \cdot \det(\hat{M}_{i,j})$$

où $\hat{M}_{i,j}$ est la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue de M en éliminant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne.

Démonstration. Admise. 3.7

Exercice 19. Prouver que la méthode de Laplace donne bien le déterminant d'une matrice carrée de taille $n = 2$ ou 3 .

4 Lien entre applications linéaires et matrices

Exercice 20. Soient V, W deux espaces vectoriels, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base de V et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \in W$ (pas forcément une famille libre ni génératrice!). Prouver qu'il existe une et une seule application linéaire $f : V \rightarrow W$ telle que $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i, \forall i = 1, \dots, n$.

Solution de l'exercice. Puisque \vec{v}_i est une base, alors tout $\vec{v} \in V$ s'écrit de façon unique comme $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$. Définissons alors $f(\vec{v}) \doteq \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{w}_i$. Il s'agit maintenant de tester que cette application est linéaire, que $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i \forall i$ et qu'elle est unique : nous laissons cela au lecteur.

Lemme 4.1. Soient $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ et $\mathcal{C} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)$ bases respectivement de V et de W et soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire. On appelle "la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} ", la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \in \text{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$ d'entrées $m_{i,j}, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ définies par $f(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^m m_{i,j} \vec{w}_i, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Cette matrice est telle que pour tout $\vec{v} \in V$, si $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_j \vec{v}_j$ alors $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^m \mu_i \vec{w}_i$ où les μ_i sont calculés par la formule :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1,n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Si $\vec{v} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{v}_j$ par linéarité de f on a que

$$f(\vec{v}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\vec{v}_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^m m_{i,j} \vec{w}_i = \sum_{i=1}^m \vec{w}_i \sum_{j=1}^n m_{i,j} \lambda_j$$

ce qui prouve la propriété de la matrice car le coefficient $\sum_{j=1}^n m_{i,j} \lambda_j$ est exactement le résultat de l'application de la matrice M au vecteur des coordonnées $\{\lambda_j\}$. 4.1

Théorème 4.2. Soient V, W deux \mathbb{R} -espaces vectoriels et $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ et $\mathcal{C} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)$ bases respectivement de V et de W . L'application $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} : \text{Hom}(V, W) \ni f \rightarrow Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \in \text{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$ définie dans le Lemme 4 est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus si U est un autre espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{D} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_l)$ et $g : W \rightarrow U$ est linéaire alors on a $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \cdot Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$.

Démonstration. D'abord il faut prouver que l'application $f \rightarrow Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est linéaire. Soient $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ et $M, N \in \text{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$ les matrices $M = Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ et $N = Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in 1, \dots, n$ on a $(\lambda f + g)(\vec{v}_i) = \lambda f(\vec{v}_i) + g(\vec{v}_i) = \sum_{j=1}^m (\lambda m_{j,i} + n_{j,i}) \vec{w}_j$ et donc la matrice $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f + g)$ est celle dont la colonne i^{eme} est $\lambda m_{j,i} + n_{j,i}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Cela vaut pour tout i donc on a que $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f + g) = \lambda Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f) + Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$ ce qui prouve la linéarité de l'application.

Pour prouver l'injectivité, remarquons que si $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est la matrice nulle alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $f(\vec{v}_i) = \vec{0}_W$ et donc pour tout $\vec{v} \in V$ on a $f(\vec{v}) = \sum \lambda_i f(\vec{v}_i) = \vec{0}_W$. Donc f est l'application nulle. Ce qui prouve que le noyau de l'application $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ est trivial.

Il reste à prouver la surjectivité. Une base de $\text{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices "élémentaires" $E^{a,b}$, $a \in \{1, \dots, m\}$, $b \in \{1, \dots, n\}$ définies par $E_{j,i}^{a,b} = \delta_{j,a} \delta_{b,i}$. La matrice $E^{a,b}$ exprime l'application $f^{a,b}$ définie par $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,b} \vec{w}_a$. L'application $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ est donc surjective car son image est un sous-espace qui contient une base de $\text{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$ et donc son image est tout $\text{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$.

Pour prouver le dernier énoncé, remarquons que par linéarité de $g \circ f$ et du produit d'une matrice par un vecteur colonne, il est suffisant de le tester sur les vecteurs \vec{v}_j , $j = 1, \dots, n$. Soit $G = Mat_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \in \text{Mat}(l \times m; \mathbb{R})$; donc par définition on a $g(\vec{w}_i) = \sum_{k=1}^l G_{i,k} \vec{u}_k$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$. L'énoncé est prouvé alors comme suit :

$$(g \circ f)(\vec{v}_j) = g\left(\sum_{i=1}^m m_{i,j} \vec{w}_i\right) = \sum_{i=1}^m m_{i,j} g(\vec{w}_i) = \sum_{i=1}^m m_{i,j} \sum_{k=1}^l G_{k,i} \vec{u}_k = \sum_{k=1}^l \left(\sum_{i=1}^m G_{k,i} m_{i,j}\right) \vec{u}_k = \sum_{k=1}^l (G \cdot M)_{k,j} \vec{u}_k.$$

4.2

Corollaire 4.3 (Matrice inverse = matrice de l'inverse). Soit $f : V \rightarrow V$ une application linéaire, $\{\vec{v}_i\}$ une base de V et M la matrice qui exprime f en cette base. Si f est inversible, la matrice qui exprime f^{-1} en la base $\{\vec{v}_i\}$ est la matrice M^{-1} .

Exemple 4.4 (Matrice de changement de base ou de passage). Si $Id : V \rightarrow V$ est l'application identique de V en V (c'est à dire $(Id)(\vec{v}) = \vec{v} \forall \vec{v} \in V$) elle est évidemment linéaire. Si alors $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ est une base de V et $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ une autre base (elles ont la même taille!) alors on peut lui associer une et une seule matrice de taille $n \times n$ qui "exprime le changement de base de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ ". On appelle cette matrice la "matrice de changement de base de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ " ou "matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{w}_i\}$ ". Avec la notation du théorème il s'agit de la matrice $Mat_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(Id)$.

Plus explicitement, on a que, puisque $\{\vec{v}_i\}$ est une base, pour tout \vec{w}_j il existe des coefficients $m_{i,j}$ tels que

$$Id(\vec{w}_j) = \vec{w}_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} \vec{v}_i.$$

Alors la matrice $M = (m_{i,j})$ peut être utilisée pour re-exprimer le vecteur $\sum \lambda_i \vec{w}_i$ en fonction des vecteurs $\{\vec{v}_i\}$ comme $\sum \mu_i \vec{v}_i$ où les μ_i sont calculés par :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1,n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{w}_i\}$ est donc M : elle est donc la matrice dont la i^{eme} colonne exprime le vecteur \vec{w}_i dans la base $\{\vec{v}_j\}$. ATTENTION : La terminologie peut confondre ! En effet la matrice M s'appelle matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{w}_i\}$ mais en vérité elle vous permet de prendre les coordonnées d'un vecteur par rapport à la base $\{\vec{w}_i\}$ (les λ_i ci dessus) et de calculer les coordonnées du même vecteur par rapport à la base $\{\vec{v}_i\}$. Dit d'autre façon, la matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{w}_i\}$ exprime l'identité de V muni de la base $\{\vec{w}_i\}$ en V muni de la base $\{\vec{v}_i\}$.

Réciproquement on peut écrire aussi $\vec{w}_i = \sum_{j=1}^n c_{j,i} \vec{v}_j$ pour une certaine matrice C . Puisque si on change de base de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ et puis de $\{\vec{w}_i\}$ à $\{\vec{v}_i\}$ on a juste écrit l'application $Id : V \rightarrow V$ dans la base $\{\vec{w}_i\}$ au départ et à l'arrivée, on obtient que $C \cdot M = Id$ donc $C = M^{-1}$.

Exercice 21. Soient $\{\vec{v}_i\}$, $\{\vec{w}_i\}$ et $\{\vec{t}_i\}$ trois bases de V , M la matrice de passage de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ et N la matrice de passage de $\{\vec{w}_i\}$ à $\{\vec{t}_i\}$.

1. Montrer que $\det(M) \neq 0$ et $\det(N) \neq 0$.
2. Montrer que la matrice de passage de $\{\vec{w}_i\}$ à $\{\vec{v}_i\}$ est M^{-1} .
3. Montrer que la matrice de passage de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{t}_i\}$ est $M \cdot N$.

Théorème 4.5 (Relation entre inversibilité et déterminants). Soit $f : V \rightarrow V$ une application linéaire. Les suivantes affirmations sont équivalentes :

1. $\ker(f) = \{\vec{0}\}$;
2. $Im(f) = V$;
3. " f est inversible" c'est à dire qu'il existe une application linéaire $f^{-1} : V \rightarrow V$ telle que

$$f^{-1}(f(\vec{v})) = \vec{v} \quad \forall v \in V;$$

4. Il existe une base $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ de V dans laquelle la matrice M qui exprime f a déterminant non-nul.

Démonstration. Soit $\{\vec{v}_i, i = 1, \dots, n\}$ une base de V . Si $\ker(f) = \{\vec{0}\}$ alors les vecteurs $f(\vec{v}_i)$ sont une famille libre de vecteurs en V (car si $\sum_i \lambda_i f(\vec{v}_i) = \vec{0}$ alors $f(\sum \lambda_i \vec{v}_i) = \vec{0}$ et donc aussi $\sum \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$ et $\lambda_i = 0 \forall i$) et donc une base parce que $\dim(V) = n$ (voir Proposition 2.8) ; cela implique que f est surjective et donc $Im(f) = V$. Réciproquement si $Im(f) = V$ alors les $f(\vec{v}_i)$ engendrent tout V et donc ils sont linéairement indépendants (car $\dim(V) = n$) et donc $\ker(f) = \vec{0}$. Ces deux impliquent que pour tout $\vec{w} \in V$ il existe un et un seul $\vec{v} \in V$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{w}$. Posons alors $f^{-1} : V \rightarrow V$ l'application qui à tout \vec{w} associe ce \vec{v} ; f^{-1} est l'inverse de f . Il est simple de vérifier que f^{-1} est linéaire et que son inverse est encore f . Donc on a $f^{-1} \circ f(\vec{v}) = \vec{v}$; en traduisant cela en termes des matrices M et N qui représentent f et f^{-1} en la base \vec{v}_i on a que $N \cdot M = Id$ et donc que $N = M^{-1}$. Puisque $\det(M \cdot N) = \det(Id) = 1 = \det M \det N$ on a que ces déterminants sont l'un l'inverse de l'autre (et donc non nuls). Pour terminer il suffit de remarquer que si $\det(M) \neq 0$ la formule donnée en Proposition 3 vi) fournit la matrice représentant l'inverse de M . Donc la matrice M^{-1} représente dans la base $\{\vec{v}_i\}$ une application linéaire qui est la réciproque de f . 4.5

Définition 4.6 (Rang d'une matrice rectangulaire). Soit $M \in \text{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$. Le $\text{rank}(M)$ est la dimension du sous espace vectoriel de \mathbb{R}^m engendré par les vecteurs formés par les colonnes de M . De façon équivalente, il est la taille de la plus grande sous-matrice carrée ayant déterminant non nul obtenue en éliminant de M des lignes et des colonnes.

4.1 Orientation d'un espace vectoriel

Soient $\{\vec{v}_i\}$ et $\{\vec{w}_i\}$ deux bases de V . On dit que le changement de base de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ est positif si la matrice passage de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ a déterminant positif. Par l'Exercice 4, on peut définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases sur V qui est $\{\vec{v}_i\} \sim \{\vec{w}_i\}$ ssi la matrice de passage de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ est positive.

Exercice 22. Prouver que la relation \sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases sur V (i.e. qu'elle est réflexive, symétrique et transitive).

Définition 4.7. Une orientation sur V est le choix d'une classe d'équivalence par rapport à la relation \sim , ou de façon équivalente une famille maximale de bases de V telles que les matrices de passage d'une base à n'importe quelle autre de la famille est positive.

Exercice 23. Prouver qu'il existe exactement deux orientations sur V .

4.2 Invariants d'endomorphismes

La proposition suivante (dont la preuve est très simple) nous dit comment change la matrice qui exprime un morphisme lorsque on change de bases. Bien que cette proposition soit simple elle est très importante.

Proposition 4.8. Soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels réels de dimension n et m respectivement. Soient aussi $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ et $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n$ deux bases de V et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ et $\vec{w}'_1, \dots, \vec{w}'_m$ deux bases de W . Soit $M = \text{Mat}_{\{\vec{v}_i\}, \{\vec{w}_j\}}(f)$ la matrice qui exprime f en les bases $\{\vec{v}_i\}$ de V et $\{\vec{w}_j\}$ de W , soient $P = \text{Mat}_{\{\vec{v}'_i\}, \{\vec{v}_i\}}(Id)$ la matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{v}'_i\}$ et $Q = \text{Mat}_{\{\vec{w}'_j\}, \{\vec{w}_j\}}(Id)$ la matrice de passage de la base $\{\vec{w}_j\}$ à la base $\{\vec{w}'_j\}$. Alors la matrice qui exprime f dans les bases $\{\vec{v}'_i\}$ et $\{\vec{w}'_j\}$ est $\text{Mat}_{\{\vec{v}'_i\}, \{\vec{w}'_j\}}(f) = Q^{-1}MP$.

Démonstration. Nous pouvons écrire $f : V \rightarrow W$ comme $Id_W \circ f \circ Id_V$. En munissant V de la base $\{\vec{v}'_i\}$ et puis de la base $\{\vec{v}_i\}$ on a que la matrice qui exprime $Id : (V, \{\vec{v}'_i\}) \rightarrow (V, \{\vec{v}_i\})$ est par définition P . La matrice qui exprime f dans les bases $\{\vec{v}_i\}$ et $\{\vec{w}_j\}$ est M . Et enfin celle qui exprime $Id_W : (W, \{\vec{w}_j\}) \rightarrow (W, \{\vec{w}'_j\})$ est $\text{Mat}_{\{\vec{w}'_j\}, \{\vec{w}_j\}}(Id) = (\text{Mat}_{\{\vec{w}'_j\}, \{\vec{w}_j\}}(Id))^{-1}$. L'énoncé traduit le fait que nous obtenons la matrice M' comme la matrice qui exprime la composition des trois morphismes et par le théorème 4. 4.8

Corollaire 4.9. Si $\{\vec{v}_i\}$ et $\{\vec{v}'_i\}$ sont deux bases de V et $f : V \rightarrow V$ est un endomorphisme qui dans la base $\{\vec{v}_i\}$ est exprimé par la matrice $M \in \text{Mat}(n \times n)$ alors la matrice M' qui exprime f dans la base $\{\vec{v}'_i\}$ est $U^{-1}MU$ où $U = \text{Mat}_{\{\vec{v}'_i\}, \{\vec{v}_i\}}(Id)$. En particulier le déterminant d'un endomorphisme est bien défini (il ne dépend pas du choix d'une base pour associer une matrice à M).

Un invariant d'un endomorphisme linéaire f d'un espace vectoriel réel est toute quantité associée à f sans le choix d'une base. Dit autrement un invariant est toute quantité que l'on peut associer à une matrice et qui soit invariante par l'opération de conjugaison de la matrice par une toute matrice inversible. Nous venons de voir que le déterminant est un exemple d'invariant d'un endomorphisme. Ci de suite nous en rappelons d'autres.

Exercice 24. Soit $M = (m_{i,j}) \in \text{Mat}(n \times n)$ et définissons sa trace par $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$. Montrer que

$$\text{tr}(M \cdot N) = \text{tr}(N \cdot M), \forall M, N \in \text{Mat}(n \times n)$$

et en conclure que la trace d'un endomorphisme est un invariant bien défini.

L'invariant d'un endomorphisme f le plus important est son polynôme caractéristique :

Définition 4.10. Soit $f : V \rightarrow V$ et M une matrice qui exprime f dans une base de V . Alors le polynôme caractéristique de f est $P(t) := \det(M - tId)$.

Exercice 25. Prouver que $P(t)$ ne dépend pas du choix de la base utilisée pour associer la matrice M à f et il a degré $n = \dim(V)$. Montrer qu'on a

$$P(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(M) t^{n-1} + \text{l.o.t}$$

(l.o.t = "lowest order terms" = termes de degré inférieur en t) et que son terme constant est $\det(M)$. Montrer que tous les coefficients du polynôme caractéristique de f sont des invariants de f .

Définition 4.11 (Valeur propre d'un endomorphisme). Soit $f : V \rightarrow V$ une application linéaire. Une valeur propre de f est une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}) telle qu'il existe un vecteur $\vec{v} \in V$ dit vecteur propre tel que :

$$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

Proposition 4.12. Soit $f : V \rightarrow V$ une application linéaire et $\dim(V) = n$ et soit $M = \text{Mat}_{\{\vec{v}_i\}, \{\vec{v}_i\}}(f)$ la matrice carrée associée à f en une base $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont racines réelles distinctes du polynôme $P(\lambda) := \det(M - \lambda Id)$ alors il existe vecteurs propres $\vec{w}_i, i = 1, \dots, k$ de valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants. En particulier si $k = n$ les vecteurs $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ forment une base de V .

Démonstration. Puisque $\det(M - \lambda_i Id) = 0$ alors $\ker(M - \lambda_i Id) \neq \{\vec{0}\}$ et donc il contient un vecteur non-nul, appelons-le \vec{w}_i . Mais alors \vec{w}_i est le vecteur propre cherché car $(M - \lambda_i Id) \vec{w}_i = \vec{0} \iff M \vec{w}_i = \lambda_i \vec{w}_i$. Pour montrer que ces vecteurs sont indépendants, soit $W_j = \prod_{i \neq j} (M - \lambda_i Id)$; la matrice W_j représente un endomorphisme dont le noyau contient tous les $w_i, i \neq j$; mais $\vec{w}_j \notin \ker W_j$ car $M \vec{w}_j = \lambda_j \vec{w}_j$ et $W_j \vec{w}_j = \vec{w}_j \prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ parce que les λ_i sont distincts. Mais alors le sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{w}_i, i \neq j$ ne contient pas \vec{w}_j et cela est vrai pour tout j . Cela est une reformulation de l'indépendance. 4.12

Exercice 26. Si $f : V \rightarrow V$ et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ sont une base de V faite par vecteurs propres alors la matrice associée à f en cette base est diagonale et la $i^{\text{ème}}$ entrée diagonale est λ_i (la valeur propre du vecteur w_i).

4.3 Réduction des endomorphismes

Soit $f : V \rightarrow V$ un endomorphisme linéaire, soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base de V et soit M ma matrice qui exprime f dans cette base (c'est à dire la i -ème colonne de M sont les coordonnées dans la base $\{\vec{v}_j\}$ du vecteur $f(\vec{v}_i)$).

Nous nous limiterons à rappeler le suivant (fondamental!) :

Théorème 4.13 (Forme canonique de Jordan). Soit $M \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$. Il existe une matrice inversible $N \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ telle que

$$NMN^{-1} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_k(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

où $k \leq n$ est le nombre de vecteurs propres de f linéairement indépendants, $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ sont leurs valeurs propres et $J_i(\lambda_i)$ est une matrice diagonale supérieure de la forme suivante :

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Les blocs $J_i(\lambda_i)$ sont uniques à permutation près.

Attention : le théorème ci dessus utilise les nombres complexes ; il existe des cas où le passage au nombres complexes est nécessaire :

Exercice 27. Trouver une matrice M qui n'admet pas de forme canonique de Jordan sur \mathbb{R} .

Alors nous avons défini :

Définition 4.14 (Polynôme caractéristique de f). Soit $f : V \rightarrow V$ une application linéaire et M une matrice qui représente f en une base $\{\vec{v}_i\}$ de V . Alors $P_f(t) = \det(M - tId)$.

Exercice 28. Prouver que $P_f(t) = (-1)^n \det(tId - M)$. En conclure que $P_f(t) = (-1)^n t^n + l.o.t.$ où par "l.o.t" on entend des termes de degré inférieur à n .

Nous avons déjà prouvé que cette définition ne dépend pas du choix de la base $\{\vec{v}_i\}$ et donc qu'elle donne bien un invariant de l'endomorphisme f .

Exercice 29. En utilisant le théorème de réduction en forme de Jordan, montrer que $P_f(t) = \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{k_i}$ où k_i est la taille du bloc $J_i(\lambda_i)$.

Or si $P(t)$ est un polynôme, nous pouvons l'appliquer à une matrice quelconque N pour obtenir un polynôme de matrices : lorsque nous avons t^k nous remplaçons cela par N^k (le produit de k copies de N) et lorsque nous avons la somme de deux monômes nous effectuons la somme des matrices correspondantes et les termes constants correspondent aux matrices $\lambda \cdot Id$. Donc par exemple pour appliquer le polynôme $P(t) = t^2 + t - 2$ à la matrice M de taille $n \times n$ nous calculons la matrice $P(M) = M \cdot M + M - 2Id$ où Id est la matrice identité de taille $n \times n$.

Théorème 4.15 (Hamilton-Cayley). Soit M une matrice de taille $n \times n$ et $P(t)$ son polynôme caractéristique. Alors $P(M) = 0$ (où par 0 nous notons la matrice carrée de taille n dont toutes les entrées sont 0).

Démonstration. La preuve suivante se base sur le théorème de réduction en forme de Jordan, ce qui est une triche : normalement on utilise le théorème de Hamilton-Cayley pour prouver le théorème 4.13 ; cependant, puisque nous ne donnerons pas la preuve de ce dernier nous nous permettrons de donner une "preuve" du théorème de Hamilton-Cayley se basant sur la forme de Jordan.

Si on prend $P_M(t) = \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{k_i}$ où k_i est la taille du bloc $J_i(\lambda_i)$ (voir Exercice 28) alors il n'est pas difficile de voir que chaque bloc $J_i(\lambda_i)$ est annulé par l'application d'un des facteurs $(t - \lambda_i)^{k_i}$. Mais puisque puis on en prend le produit et que ces blocs décomposent toute la matrice on a que leur produit est 0. (Remplir les détails comme exercice). 4.15

Exemple 4.16. Si $M = Id$ (de taille n) son polynôme caractéristique est $(-1)^n (t - 1)^n$. Et en effet $(Id - Id)^n = 0$. Si M est une matrice diagonale ayant valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors son polynôme caractéristique est $(-1)^n (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ et $(M - \lambda_1 Id) \cdots (M - \lambda_n Id) = 0$: en effet si \vec{v}_i est le vecteur propre de M de valeur propre λ_i alors

$$(M - \lambda_1 Id) \cdots (M - \lambda_n Id) \vec{v}_i = (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \cdots (\lambda_i - \lambda_i) \cdots (\lambda_i - \lambda_{n-1})(\lambda_i - \lambda_n) \vec{v}_i = 0 \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$$

et puisque les vecteurs propres de M forment une base de \mathbb{R}^n alors la matrice $(M - \lambda_1 Id) \cdots (M - \lambda_n Id)$ représente l'endomorphisme nul.

Il est clair que P est un polynôme de degré n . Mais peut-on trouver des polynômes $Q(t)$ plus simples que $P(t)$ qui "annulent M " ? (i.e. tels que $Q(M) = 0$) La réponse est en général positive. Commençons d'abord par donner la définition suivante :

Définition 4.17. L'idéal annulateur I_M d'une matrice M est l'ensemble des polynômes $Q(t) \in \mathbb{R}[t]$ tels que $Q(M) = 0$. Il est non vide grâce au théorème de Hamilton-Cayley.

Proposition 4.18. *Il existe un et un seul polynôme $P_M^{min}(t) \in I_M$ tel que :*

1. $\forall Q(t) \in I_M$ on a $Q(t) = P_M^{min}(t) \cdot K(t)$ pour un certain $K(t) \in \mathbb{R}(t)$;
2. $P_M^{min}(t)$ est unitaire.

Démonstration. Parmi tous les polynômes unitaires (il y en a : pourquoi?) en I_M choisissons en un, noté $P_M^{min}(t)$, qui a degré minimal. Il s'agit de montrer que tout autre polynôme $P(t) \in I_M$ est divisible par $P_M^{min}(t)$. En appliquant la division des polynômes $P(t) : P_M^{min}(t)$ nous pouvons trouver un quotient $Q(t)$ et un reste $R(t)$ tels que :

1. $P(t) = Q(t)P_M^{min}(t) + R(t)$;
2. $\deg(R(t)) < \deg(P_M^{min}(t))$.

Or si $R(t) = 0$ on a la thèse. Autrement remarquons qu'on a que aussi $R(t)$ annule M car $R(t) = P(t) - Q(t) \cdot P_M^{min}(t)$. Mais alors on peut diviser $R(t)$ par son coefficient directeur pour obtenir un polynôme unitaire dans I_M de degré inférieur à $P_M^{min}(t)$: absurde car nous avons choisi $P_M^{min}(t)$ comme celui ayant degré minimal. 4.18

Le polynôme $P_M^{min}(t)$ est dit le *polynôme minimal* de M .

Exemple 4.19. *Si $M^2 = M$ (on dit que M représente un projecteur) alors $M^2 - M = 0$ mais alors le polynôme minimal de M divise $t^2 - t = t(t - 1)$. Si M n'est pas nulle ni l'identité, alors le polynôme minimal de M est exactement $t^2 - t$.*

Corollaire 4.20. *Si $P_M(t)$ est le polynôme caractéristique de M et $P_M^{min}(t)$ son polynôme minimal alors $P_M(t)$ est divisible par $P_M^{min}(t)$.*

En effet quelque chose de plus fort vaut :

Théorème 4.21. *Si $P_M(t) = \prod Q_i^{n_i}(t)$ où $Q_i(t)$ sont les facteurs irréductibles sur \mathbb{R} de $P_M(t)$ choisis de façon qu'ils soient unitaires et distincts à deux deux et $n_i \geq 1$ leurs multiplicités alors $P_M^{min}(t) = \prod Q_i^{m_i}(t)$ avec $1 \leq m_i \leq n_i, \forall i$.*

Démonstration. Soient $\lambda_i \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de M . En travaillant sur \mathbb{C}^n nous savons que pour chaque i il existe au moins un vecteur $\vec{v}_i \in \mathbb{C}^n$ tel que $M\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$. Mais alors

$$\vec{0} = P_M^{min}(M) \cdot \vec{v}_i = \left(P_M^{min}(\lambda_i) \right) \vec{v}_i$$

(ici nous avons utilisé le fait que $M^k \cdot \vec{v}_i = (\lambda_i)^k \vec{v}_i, \forall k \geq 0$). Donc λ_i est un zéro de $P_M^{min}(t)$ et $t - \lambda_i$ divise $P_M^{min}(t)$. Mais alors chaque facteur irréductible sur \mathbb{C} de $P_M(t)$ apparaît aussi au moins une fois dans la liste des facteurs irréductibles sur \mathbb{C} de $P_M^{min}(t)$, ce qui implique qu'aussi chaque facteur irréductible sur \mathbb{R} de $P_M(t)$ apparaît au moins une fois dans la liste des facteurs irréductibles sur \mathbb{R} de $P_M^{min}(t)$: ce qu'il fallait démontrer. 4.21

Exercice 30. *Soit M une matrice telle que les λ_i qui apparaissent dans sa forme de Jordan sont tous distincts. Prouver qu'alors $P_M^{min}(t) = P_M(t)$. Si par contre il y a deux blocs $P_1(\lambda_1)$ de taille k_1 et $P_2(\lambda_1)$ de taille k_2 et que toutes les autres valeurs λ_i sont différentes de λ_1 , montrer qu'alors $P_M^{min}(t) = (t - \lambda_1)^{\min(k_1, k_2)} \times \prod_{j=2}^k (t - \lambda_j)^{k_j}$. Plus en général montrer que*

$$P_M^{min}(t) = \prod_{\lambda_i} (t - \lambda_i)^{\min\{k_j \text{ t.q. } \exists P_j(\lambda_i) \text{ de taille } k_j \text{ dans la forme canonique de } M\}}$$

4.4 Exercices sur bases et morphismes

Exercice 31 (Changements linéaires de base en \mathbb{R}^2). En \mathbb{R}^2 soient $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs de la base canonique. Soient aussi $\vec{v}_1 = (2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 3)$ et $\vec{w}_1 = (1, -1)$, $\vec{w}_2 = (-1, 3)$.

1. Dire si \vec{v}_1, \vec{v}_2 forment une base.
2. Écrire les vecteurs \vec{e}_1, \vec{e}_2 dans la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 . Que remarquez-vous sur la matrice de changement de base que vous obtenez ?
3. Dire si \vec{w}_1, \vec{w}_2 forment une base.
4. Écrire les vecteurs \vec{w}_1, \vec{w}_2 dans la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 .
5. Écrire les vecteurs \vec{v}_1, \vec{v}_2 dans la base \vec{w}_1, \vec{w}_2 .
6. Observez les deux matrices de changement de base que vous avez obtenu : comment sont-elles liées ?

Solution de l'exercice. 1). Soit M la matrice 2×2 dont la première colonne est \vec{v}_1 et la deuxième colonne est \vec{v}_2 :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(M) = 4 \neq 0$ les vecteurs \vec{v}_1, \vec{v}_2 engendrent un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^2 de dimension 2 donc tout \mathbb{R}^2 . Donc ils sont une base. La matrice M est exactement la matrice de changement de base de \vec{e}_1, \vec{e}_2 à \vec{v}_1, \vec{v}_2 (voir Exemple 4.4).

2). Pour écrire \vec{e}_1, \vec{e}_2 dans la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 nous devons trouver constantes $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ telles que $\vec{e}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ et $\vec{e}_2 = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$. Donc, pour trouver λ_1, λ_2 on peut résoudre le système :

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 = 1\lambda_1 + 3\lambda_2. \end{cases}$$

On peut re-écrire la première équation sous forme matricielle comme :

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Finalement on trouve que :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}.$$

De façon similaire on trouve

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc on a que $\vec{e}_1 = \frac{3}{4} \vec{v}_1 - \frac{1}{4} \vec{v}_2$ et que $\vec{e}_2 = -\frac{1}{2} \vec{v}_1 + \frac{1}{2} \vec{v}_2$. La matrice de changement de base de \vec{v}_1, \vec{v}_2 à \vec{e}_1, \vec{e}_2 est donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M^{-1}.$$

3). Soit W la matrice dont la première colonne est \vec{w}_1 et la deuxième colonne est \vec{w}_2 . Puisque $\det(W) \neq 0$ alors \vec{w}_1, \vec{w}_2 est une base de \mathbb{R}^2 et W exprime le changement de base de \vec{e}_1, \vec{e}_2 à \vec{w}_1, \vec{w}_2 (voir Exemple 4.4).

4). Pour écrire \vec{w}_1, \vec{w}_2 en fonction de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 nous cherchons comme avant des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tels que $\vec{w}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ et $\vec{w}_2 = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$. En raisonnant comme avant on arrive à trouver :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

et donc on a que $\vec{w}_1 = \frac{5}{4}\vec{v}_1 - \frac{3}{4}\vec{v}_2$ et $\vec{w}_2 = -\frac{9}{4}\vec{v}_1 + \frac{7}{4}\vec{v}_2$. La matrice de changement de base de \vec{v}_1, \vec{v}_2 à \vec{w}_1, \vec{w}_2 est donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-9}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot W.$$

5). Pour écrire \vec{v}_1, \vec{v}_2 dans la base \vec{w}_1, \vec{w}_2 nous pouvons directement calculer la matrice inverse de celle que nous venons de calculer c'est à dire $W^{-1} \cdot M$. Pour nous convaincre de cela, nous allons maintenant re-faire ces calculs et voir que le résultat est bien $W^{-1}M$. On cherche coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tels que $\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2$ et $\vec{v}_2 = \mu_1\vec{w}_1 + \mu_2\vec{w}_2$. Donc pour la première équation on a le système :

$$\begin{cases} 2 = 1\lambda_1 - 1\lambda_2 \\ 1 = -1\mu_1 + 3\mu_2 \end{cases}$$

qu'on peut traduire par l'équation matricielle :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = W \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = W^{-1} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

et donc $\vec{v}_1 = \frac{7}{2}\vec{w}_1 + \frac{3}{2}\vec{w}_2$. De façon similaire nous trouvons :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = W^{-1} \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

et donc $\vec{v}_2 = \frac{9}{2}\vec{w}_1 + \frac{5}{2}\vec{w}_2$. Finalement nous trouvons que la matrice de changement de base de \vec{w}_1, \vec{w}_2 à \vec{v}_1, \vec{v}_2 est :

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = W^{-1}M.$$

6). Comme on vient de remarquer la matrice de changement de base de \vec{v}_1, \vec{v}_2 à \vec{w}_1, \vec{w}_2 est $M^{-1}W$ et celle de changement de base de \vec{w}_1, \vec{w}_2 à \vec{v}_1, \vec{v}_2 est $W^{-1}M$. Ces matrices sont l'inverse l'une de l'autre. Comment comprendre cela ? Rappelons que la matrice de changement de base de $\{\vec{e}_i\}$ à $\{\vec{v}_i\}$ (donc M) nous permet d'exprimer n'importe quel vecteur qui est exprimé comme combinaison linéaire des \vec{v}_i en fonction des \vec{e}_i . Plus explicitement si on a $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$ (donc les coordonnées de \vec{v} dans la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 sont (c_1, c_2)) alors les coordonnées (x, y) de \vec{v} dans la base \vec{e}_1, \vec{e}_2 sont calculées par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement si on a les coordonnées de v dans la base \vec{e}_1, \vec{e}_2 et on veut retrouver ses coordonnées dans la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 on n'a qu'à multiplier le vecteur (x, y) par la matrice M^{-1} . Mais alors, si nous avons un vecteur $\vec{w} = k_1\vec{w}_1 + k_2\vec{w}_2$, ses coordonnées dans la base \vec{w}_1, \vec{w}_2 sont (k_1, k_2) et si on veut trouver ses coordonnées dans la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 nous pouvons d'abord convertir ses coordonnées en la base \vec{e}_1, \vec{e}_2 (ce qui revient à multiplier par la matrice W) et puis re-converter ce qu'on obtient en coordonnées par rapport à \vec{v}_1, \vec{v}_2 (ce qui revient à multiplier encore par M^{-1}). Donc pour passer des coordonnées en la base \vec{w}_1, \vec{w}_2 à celle en la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 nous multiplions par $M^{-1}W$.

Exercice 32. Soient $\vec{v}_1 = (2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 3)$ et $f : V \rightarrow V$ l'endomorphisme défini par $f(\vec{v}_1) = -11\vec{v}_1 + 16\vec{v}_2$ et $f(\vec{v}_2) = -8\vec{v}_1 + 25\vec{v}_2$. Écrire la matrice M qui exprime f dans la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 . Calculer $\det(M)$, $\text{tr}(M)$ et dire si f est inversible. Écrire la matrice N qui exprime f dans la base \vec{e}_1, \vec{e}_2 (on pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent). Calculer $\det(N)$ et $\text{tr}(N)$.

Trouver les valeurs propres λ_1, λ_2 de f et les vecteurs propres \vec{w}_1, \vec{w}_2 correspondants. Trouver la matrice de changement de base de la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 à la base \vec{w}_1, \vec{w}_2 . Écrire la matrice F qui exprime f dans la base \vec{w}_1, \vec{w}_2 et calculer $\det(F)$ et $\text{tr}(F)$.

Exercice 33. Soient $A, B \in \text{Mat}(n \times n)$ et supposons que \vec{v} est l'unique vecteur propre de l'endomorphisme représenté par A de valeur propre λ . Prouver que si $AB = BA$ alors $B(\vec{v}) = \mu\vec{v}$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 34. Soit D une matrice de taille $n \times n$ diagonale aux entrées $m_{i,i}$ toutes distinctes. Prouver que les seules matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales (c'est à dire les matrices M telles que $MD = DM$).

Exercice 35. Calculer le polynôme caractéristique $P(t)$ de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver les valeurs propres de M et pour chaque valeur propre trouver un vecteur propre correspondant. Quelles sont les possibles formes canonique de Jordan pour une matrice qui a le même polynôme caractéristique que M ? Quelle est la forme canonique de Jordan pour M ? Trouver une matrice P telle que $P^{-1}MP$ soit en forme canonique de Jordan.

5 Formes bilinéaires, produits scalaires et théorème spectral

Définition 5.1. Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Une forme bilinéaire est une application $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- linéarité à gauche : $b(\cdot, \vec{w}) : V \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire pour tout $\vec{w} \in V$;
 - linéarité à droite : $b(\vec{w}, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire pour tout $\vec{w} \in V$.
1. Elle est "symétrique" si $b(\vec{v}, \vec{w}) = b(\vec{w}, \vec{v})$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$.
 2. Elle est "antisymétrique" si $b(\vec{v}, \vec{w}) = -b(\vec{w}, \vec{v})$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$.
 3. Elle est "définie positive" (resp. "définie négative") si $b(\vec{v}, \vec{v}) > 0$, $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$ (resp. $b(\vec{v}, \vec{v}) < 0$, $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$).
 4. Elle est "semi-définie positive" (resp. "semi-définie négative") si $b(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$, $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$ (resp. $b(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$, $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$).
 5. Un vecteur isotrope pour b est un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ tel que $b(\vec{v}, \vec{v}) = 0$.
 6. Si b est symétrique, la "forme quadratique" associée à b est $Q(b) : V \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $Q(b)(\vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{v})$, $\forall \vec{v} \in V$.
 7. b est un produit scalaire si elle est symétrique et définie positive.

Exercice 36. Soit V un espace vectoriel de dimension n et B l'ensemble B des formes bilinéaires sur V . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toutes $b_1, b_2 \in B$ définissons : $\lambda \cdot b_1$ et $(b_1 + b_2)$ comme les formes bilinéaires données par :

$$(\lambda \cdot b_1)(\vec{v}, \vec{w}) = \lambda \cdot (b_1(\vec{v}, \vec{w})), (b_1 + b_2)(\vec{v}, \vec{w}) := b_1(\vec{v}, \vec{w}) + b_2(\vec{v}, \vec{w}), \forall \vec{v}, \vec{w} \in V.$$

1. Prouver que ces opérations définissent bien des formes bilinéaires.
2. Prouver que ces opérations munissent B de la structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} .
3. Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base de V et $\forall b \in B$ soit $\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b) \in \text{Mat}(n \times n)$ la matrice dont l'entrée (i, j) est $b(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$. Si $\vec{v} = \sum_i \lambda_i \vec{v}_i$ et $\vec{w} = \sum_i \mu_i \vec{v}_i$ prouver qu'alors $b(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{\lambda}^t \cdot \phi_{\{\vec{v}_i\}}(b) \cdot \vec{\mu}$ où $\vec{\lambda}, \vec{\mu} \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs des coordonnées de \vec{v} et $\vec{\mu}$.
4. Prouver que B est un espace vectoriel de dimension n^2 .
5. Soit $\text{Sym} \subset B$ le sous ensemble des formes bilinéaires symétriques. Prouver que Sym est un espace vectoriel.
6. Calculer la dimension de Sym .
7. Soit $\text{ASym} \subset B$ le sous ensemble des formes bilinéaires antisymétriques. Prouver que ASym est un espace vectoriel.
8. Calculer la dimension de ASym .
9. Montrer que les espaces Sym et ASym donnent une décomposition en somme directe de B (c'est à dire que $\text{Sym} \cap \text{ASym} = \{\vec{0}\}$ et $B = \text{Vect}(\text{Sym}, \text{ASym})$). (Aide : écrire la matrice $\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b)$ comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique)

Proposition 5.2. Soit V un espace vectoriel, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base de V et B l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur V . Il existe un isomorphisme linéaire $\phi_{\{\vec{v}_i\}} : B \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ (qui dépend du choix de la base $\{\vec{v}_i\}$) qui associe à une forme b la matrice $\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b) := (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} := b(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$. Si $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ est une autre base de V et $P = \text{Mat}_{\{\vec{w}_i\}, \{\vec{v}_i\}}(\text{Id})$ est la matrice de passage de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ à $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ alors la matrice $\phi_{\{\vec{w}_i\}}(b)$ associée à b dans la base $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ est égale à ${}^t P \phi_{\{\vec{v}_i\}}(b) P$. En plus b est une forme symétrique si et seulement si $(\phi_{\{\vec{w}_i\}}(b)) = (\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b))^t$.

Démonstration. L'application $\phi_{\{\vec{v}_i\}}$ est linéaire : on a bien que la matrice $\phi_{\{\vec{v}_i\}}(\lambda \cdot b)$ associée à $\lambda \cdot b$ est celle d'entrées $\lambda b(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$ qui est bien égale à $\lambda \cdot \phi_{\{\vec{v}_i\}}(b)$ et aussi que $\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b_1 + b_2)$ est la matrice dont l'entrée (i, j) est $(b_1 + b_2)(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$ qui par définition de la structure d'espace vectoriel sur B est $b_1(\vec{v}_i, \vec{v}_j) + b_2(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$: on a donc $\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b_1 + b_2) = \phi_{\{\vec{v}_i\}}(b_1) + \phi_{\{\vec{v}_i\}}(b_2)$.

L'application $\phi_{\{\vec{v}_i\}}$ est injective car si deux formes b et b' sont telles que $b(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = b'(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ alors $b(\vec{v}, \vec{w}) = b'(\vec{v}, \vec{w})$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ car en décomposant \vec{v} et \vec{w} en la base \vec{v}_i on a si $\vec{v} = \sum_i \lambda_i \vec{v}_i$ et $\vec{w} = \sum_j \mu_j \vec{v}_j$:

$$b(\vec{v}, \vec{w}) = b\left(\sum_i \lambda_i \vec{v}_i, \sum_j \mu_j \vec{v}_j\right) = \sum_i \lambda_i b\left(\vec{v}_i, \sum_j \mu_j \vec{v}_j\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j b(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j b'(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \sum_i \lambda_i b'\left(\vec{v}_i, \sum_j \mu_j \vec{v}_j\right) = b'\left(\sum_i \lambda_i \vec{v}_i, \sum_j \mu_j \vec{v}_j\right) = b'(\vec{v}, \vec{w})$$

où nous avons utilisé à plusieurs reprises la linéarité à gauche et à droite de b et de b' et dans le passage central l'hypothèse que $b(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = b'(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$, $\forall i, j$.

L'application $\phi_{\{\vec{v}_i\}}$ est surjective car si $B = (b_{i,j}) \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ est une matrice quelconque, on peut lui associer une forme bilinéaire $b \in B$ comme suit. Si $\vec{v} = \sum_i \lambda_i \vec{v}_i$ et $\vec{w} = \sum_j \mu_j \vec{v}_j$, posons : $b(\vec{v}, \vec{w}) := \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j b_{i,j}$. On a que b est une forme bilinéaire (vérifiez-le!) et par construction $\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b) = B$ car la valeur $b(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$ est par construction juste $b_{i,j}$ (vérifiez-le!).

Pour le deuxième énoncé : nous avons (par définition de matrice de passage) $\vec{w}_i = \sum_{j=1}^n P_{j,i} \vec{v}_j$. Pour simplifier la notation, posons $B := \phi_{\{\vec{v}_i\}}(b)$ et $B' := \phi_{\{\vec{w}_i\}}(b)$. Nous avons alors :

$$B'_{k,l} = b(\vec{w}_k, \vec{w}_l) = b\left(\sum_{j=1}^n P_{j,k} \vec{v}_j, \sum_{h=1}^n P_{h,l} \vec{v}_h\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n P_{j,k} P_{h,l} b(\vec{v}_j, \vec{v}_h) = \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n P_{j,k} B_{j,h} P_{h,l} = \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n {}^t P_{k,j} B_{j,h} P_{h,l} = ({}^t P B P)_{k,l}$$

où la première égalité est la définition de la matrice $\phi_{\{\vec{w}_i\}}(b)$. Pour le dernier énoncé : si b est une forme symétrique alors $B_{i,j} := b(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = b(\vec{v}_j, \vec{v}_i) = B_{j,i} = B_{i,j}^t$. Réciproquement si $B = \phi_{\{\vec{v}_i\}}(b)$ est une matrice symétrique alors la forme bilinéaire qui lui est associée est si $\vec{v} = \sum_i \lambda_i \vec{v}_i$ et $\vec{w} = \sum_j \mu_j \vec{v}_j$ (comme vu avant) :

$$b(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j b_{i,j} = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j b_{j,i} = b(\vec{w}, \vec{v})$$

où dans l'égalité centrale nous avons utilisé l'hypothèse que $b_{i,j} = b_{j,i}$. 5.2

Exercice 37. Prouver que $\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b)$ est une matrice symétrique (resp. antisymétrique) ssi $\phi_{\{\vec{w}_i\}}(b)$ l'est.

Remarque 5.3. Attention : bien qu'autant les endomorphismes que les formes bilinéaires sur un espace vectoriel peuvent être mis en correspondance bijective avec les matrices de taille $n \times n$ IL S'AGIT D'OBJETS DE NATURE GÉOMÉTRIQUE DIFFÉRENTE. Il est très important de comprendre cela. Cela est temoigné de la façon différente par laquelle la matrice associée à un endomorphisme ou à une forme bilinéaire change lorsque l'on change de base : si P est la matrice de passage de la base \vec{v}_i à la base \vec{w}_i et Q est la matrice à un endomorphisme dans la base \vec{v}_i alors la matrice associée à l'endomorphisme dans la base \vec{w}_i est $P^{-1}QP$ tandis-que si Q représente une forme bilinéaire dans la base \vec{v}_i la même forme bilinéaire sera représentée dans la base \vec{w}_i par P^tQP .

Dorenavant nous nous intéresseront seulement aux formes bilinéaires symétriques sur V .

Définition 5.4 (Le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n). Soient $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}$. Le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n ,

noté $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$.

Exercice 38. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire. Qui est la matrice qui exprime $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base canonique de \mathbb{R}^n ?

Définition 5.5 (Forme bilinéaire dégénérée). Une forme bilinéaire symétrique est dégénérée si il existe un vecteur $\vec{v} \in V \neq \vec{0}$ tel que $b(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \forall \vec{w} \in V$.

Exercice 39. Prouver que le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n est une forme bilinéaire non dégénérée.

Lemme 5.6. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel V et soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base de V . Alors b est dégénérée ssi $\det(\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b)) = 0$.

Démonstration. \vec{v} est un vecteur tel que $b(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \forall \vec{w} \in V$ et $\vec{v} = \sum_i \lambda_i \vec{v}_i$ ssi le vecteur non nul $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est dans le noyau de $\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b)$ et donc ssi $\det(\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b)) = 0$. 5.6

Remarque 5.7. Par la Proposition 5.2 si $\{\vec{w}_i\}$ est une autre base de V alors

$$\det(\phi_{\{\vec{w}_i\}}(b)) = \det({}^t P) \det(\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b)) \det(P) = \det(\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b)) \det(P)^2$$

donc la condition ne dépend pas du choix de la base.

Définition 5.8 (b -orthogonal d'un sous-espace). Soit b une forme bilinéaire symétrique sur V et $W \subset V$ un sous espace vectoriel. L'orthogonal de W en V est le sous espace vectoriel $W^\perp := \{\vec{v} \in V \mid b(\vec{v}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{w} \in W\}$. En particulier :

1. le noyau de b est V^\perp i.e. l'ensemble des vecteurs \vec{v} tels que $b(\vec{v}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{w} \in V$. On a que b est dégénérée ssi $V^\perp \neq \{\vec{0}\}$.
2. L'orthogonal d'un vecteur \vec{v} est le sous espace $(\vec{v})^\perp := \{\vec{w} \mid b(\vec{v}, \vec{w}) = 0\}$.

Exercice 40. Soit $V = \mathbb{R}^2$ et b la forme bilinéaire qui dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est représentée par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dire si b est une forme symétrique. Soient $\vec{v}_i, i = 1, 2$ comme suit :

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dire si \vec{v}_1, \vec{v}_2 forment une base de V et, dans le cas positif, écrire la matrice qui exprime la forme bilinéaire b dans cette base. Dire si b est un produit scalaire.

Exercice 41. Soit $V = \mathbb{R}^3$ et b la forme bilinéaire qui dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est représentée par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 2 \\ 10 & 9 & -5 \\ 2 & -5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Dire si b est une forme symétrique. Soient $\vec{v}_i, i = 1, 2, 3$ comme suit :

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dire si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_3$ forment une base de V et, dans le cas positif, écrire la matrice qui exprime la forme bilinéaire b dans cette base. Dire si b est un produit scalaire; dans le cas positif, trouver une base orthonormale pour b . Quelle est l'expression de b dans cette nouvelle base ?

Exercice 42. Donner un exemple de forme bilinéaire non-dégénérée qui admet un vecteur isotrope.

Définition 5.9 (Bases orthogonales ou orthonormales). Soit V un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique b . Une base b -orthogonale (ou simplement orthogonale lorsque l'on n'a pas de doute de quelle est la forme bilinéaire utilisée) de V est une base $\{\vec{v}_i\}$ telle que $b(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0, \forall i \neq j$. Elle est orthonormale si $b(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \delta_{i,j}, \forall i, j$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (c'est à dire il vaut 1 si $i = j$ et 0 autrement).

Exercice 43. Soit V un espace vectoriel de dimension n et b une forme bilinéaire symétrique sur V . Montrer que si $\forall \vec{v} \in V$ on a $b(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ alors b est la forme bilinéaire nulle (c'est à dire $b(\vec{v}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{v}, \vec{w}$).

Proposition 5.10. Soit V un espace vectoriel de dimension fini muni d'une forme bilinéaire symétrique b . Alors il existe une base b -orthogonale de V . En plus il existe une base orthonormale si et seulement si b est un produit scalaire.

Démonstration. Prouvons d'abord le premier énoncé. Raisonnons par récurrence sur $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Si $n = 1$ l'énoncé est clair. Supposons l'avoir prouvé pour tous les couples (V, b) où V est un espace vectoriel de dimension $\leq n - 1$ et b est une forme bilinéaire symétrique sur V ; prouvons l'énoncé pour (V, b) avec $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$.

Si b est la forme bilinéaire nulle, alors toute base est orthogonale. Si non, il existe un vecteur \vec{v} tel que $b(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$: en effet si ce n'était pas le cas on aurait que pour tout vecteur $\vec{v} \in V$ $b(\vec{v}, \vec{v}) = 0$. Mais alors aussi $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V, 0 = b(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})$ et le terme droite de cette égalité est aussi égal (par bilinéarité) à

$$0 = b(\vec{v}, \vec{v}) + b(\vec{v}, \vec{w}) + b(\vec{w}, \vec{v}) + b(\vec{w}, \vec{w}) = 0 + 2b(\vec{v}, \vec{w}) + 0$$

(où nous avons utilisé deux fois l'hypothèse que $b(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \forall \vec{v} \in V$ et une fois la symétrie de b) ce qui montre que donc on aurait aussi $b(\vec{v}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{v}, \vec{w}$. Ceci contredit l'hypothèse que b n'est pas la forme bilinéaire nulle.

Donc soit \vec{v}_n un vecteur tel que $b(\vec{v}_n, \vec{v}_n) \neq 0$ et soit $V_{n-1} \subset V$ le sous espace $V_{n-1} := (\vec{v}_n)^\perp$. Remarquons que la dimension de V_{n-1} est $n - 1$ car V_{n-1} est par construction le noyau de l'application linéaire non-nulle $b(\vec{v}_n, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$. Alors la restriction de b à V_{n-1} est une forme bilinéaire symétrique et par récurrence elle admet une base orthogonale $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$. Remarquons maintenant que $\vec{v}_n \notin V_{n-1}$ car par construction $b(\vec{v}_n, \vec{v}_n) \neq 0$ tandis que $b(\vec{v}_n, \vec{v}_i) = 0, \forall i \leq n - 1$: donc \vec{v}_n est indépendant des $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$ et tous ensemble ils forment une base de V . Du coup, puisque par construction $b(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0, \forall i \neq j$ et que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_n$ forment une base de V on a terminé.

Maintenant prouvons le deuxième énoncé. Il est évident que s'il existe une base orthonormale $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ de V alors b est définie positive: en effet on a $\phi_{\{\vec{v}_i\}}(b) = Id \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ et donc on se réduit au cas du produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n . Pour la réciproque, soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base b -orthogonale de V (nous avons désormais prouvé qu'elle existe). Si $b(\vec{v}_i, \vec{v}_i) > 0 \forall i$ alors il est évident que b est définie positive et la base orthonormale cherchée est $\vec{v}'_i := \frac{\vec{v}_i}{\sqrt{b(\vec{v}_i, \vec{v}_i)}}$. Autrement il existe un i tel que $b(\vec{v}_i, \vec{v}_i) \leq 0$ et donc b n'est pas définie positive du coup il n'existe pas de base orthonormale. 5.10

Remarque 5.11 (Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt). Remarquons que le procédé de récurrence de la preuve de la Proposition 5.10 permet de construire une base orthogonale à partir de n'importe quelle base initiale $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ de V à condition qu'on n'obtienne pas des vecteurs isotropes le long du procédé (et donc par exemple lorsque b est un produit scalaire ça marche toujours!). Il s'agit en effet de la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Plus explicitement, si \vec{v}_n est tel que $b(\vec{v}_n, \vec{v}_n) \neq 0$ alors on peut définir une base de \vec{v}_n^\perp par $\vec{v}'_i := \vec{v}_i - \frac{b(\vec{v}_i, \vec{v}_n)}{b(\vec{v}_n, \vec{v}_n)} \vec{v}_n$. En effet on a bien

$$b(\vec{v}_n, \vec{v}'_i) = b(\vec{v}_n, \vec{v}_i) - \frac{b(\vec{v}_i, \vec{v}_n)}{b(\vec{v}_n, \vec{v}_n)} b(\vec{v}_n, \vec{v}_n) = 0, \forall i = 1, \dots, n - 1.$$

Et donc si on pose $\vec{v}'_n := \frac{\vec{v}_n}{\sqrt{|b(\vec{v}_n, \vec{v}_n)|}}$ on a que la matrice qui exprime b dans la base $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n$ est de la forme:

$$\phi_{\{\vec{v}'_i\}}(b) = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

où $Q = {}^t Q$ est une matrice carrée de taille $n - 1$. En itérant le procédé pour la base $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_{n-1}$ on arrive à une base où la forme de la matrice qui exprime b est diagonale avec seulement des entrées $0, 1, -1$ sur la diagonale et si b est non-dégénérée seulement des entrées ± 1 .

Corollaire 5.12. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur V . Alors il existe une base orthogonale $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ de V telle que $b(\vec{v}_i, \vec{v}_i) \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall i$.

Démonstration. Si $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ est une base orthogonale de V alors il est suffisant de poser $\vec{v}_i = \frac{\vec{w}_i}{\sqrt{|b(\vec{w}_i, \vec{w}_i)|}}$ si $b(\vec{w}_i, \vec{w}_i) \neq 0$ et $\vec{v}_i = \vec{w}_i$ autrement. 5.12

Remarque 5.13. Si V est muni d'un produit scalaire, il existe une base orthonormale pour ce produit scalaire, ce qui identifie V avec \mathbb{R}^n et son produit scalaire standard. Dans ce cas donc il y a un choix de base "meilleur que les autres" : mais est-il unique ? Nous verrons que non et que le choix d'une autre base orthonormale correspond au choix d'une "matrice orthogonale".

Exercice 44. Soit V un espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base (quelconque) de V et soit Q la matrice qui exprime la forme bilinéaire $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$ dans cette base. Montrer qu'il existe une matrice carrée M de taille $n \times n$ telle que $Q = M^t M$.

Solution de l'exercice. Soit $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ une base orthonormale de V (elle existe par la Proposition 5.10); alors on a que $\phi_{\{\vec{w}_i\}}(b) = Id$. Mais alors en posant $Q = Mat_{\{\vec{v}_i\}, \{\vec{w}_i\}}(Id)$ on a la thèse par la Proposition 5.2.

Soit V, b un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire symétrique. Si $F \subset V$ est un sous-espace vectoriel nous noterons $b|_F$ la restriction de la forme bilinéaire b à F .

Définition 5.14. Soient

$$i_+ = \max\{\dim(F) | F \subset V \text{ et } b|_F \text{ est définie positive}\} \text{ et}$$

$$i_- = \max\{\dim(F) | F \subset V \text{ et } b|_F \text{ est définie négative}\}.$$

Le couple $(i_+, i_-) \in \mathbb{N}^2$ est la signature de b .

Remarque 5.15. Puisque pour définir i_+ et i_- nous n'avons utilisé que V et b (mais pas de bases sur V !) ces nombres sont des "invariants" de b : c'est à dire ne dépendent pas du choix d'une base. Nous allons maintenant comprendre quel est leur lien avec la matrice $\phi_{\{v_{ecv}\}}(b)$ (et comment les calculer à partir de cette matrice) lorsque $\{\vec{v}_i\}$ est une base.

Exercice 45. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $U, W \subset V$ deux sous-espaces vectoriels tels que $U \cap W = \{\vec{0}\}$. Prouver qu'on a $\dim(U) + \dim(W) \leq \dim(V)$.

Solution de l'exercice. Soient $a = \dim U$ et $b = \dim W$. Supposons que $a + b > n$ et soient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_a$ une base de U et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_b$ une base de W . Nous allons montrer que si $a + b > n = \dim(V)$ alors $U \cap W \neq \{0\}$ ce qui est exclu par hypothèse. En effet si $a + b > n$ alors les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_a, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_b$ ne sont pas linéairement indépendants car autrement ils engendreraient un sous-espace de V de dimension $> n$. Mais alors il existe une combinaison linéaire non-triviale qui donne zéro : $\exists \lambda_i, i = 1, \dots, a + b$ t.q. $\sum_{i=1}^a \lambda_i \vec{u}_i + \sum_{i=a+1}^{a+b} \lambda_i \vec{w}_i = \vec{0}$. Mais alors le vecteur cherché est $\sum_{i=1}^a \lambda_i \vec{u}_i$: en effet il n'est pas nul car par hypothèse les \vec{u}_i forment une base et il appartient à W car il est égal à $-\sum_{i=a+1}^{a+b} \lambda_i \vec{w}_i$.

D'après l'exercice 5.10 on peut trouver une base orthogonale $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Dans cette base la matrice qui exprime b est diagonale et à moins de re-ordonner les éléments de la base nous pouvons supposer que les premières i_+ entrées sont positives, les suivantes i_- entrées sont négatives et les dernières ($i_0 = n - i_+ - i_-$) entrées sont nulles. Le théorème suivant nous dit que, comme notre notation le suggère, (i_+, i_-) est la signature de b :

Théorème 5.16 (Loi d'inertie de Sylvester). Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base orthogonale de V ordonnée de façon telle que $b(\vec{v}_i, \vec{v}_i) > 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$ et $b(\vec{v}_i, \vec{v}_i) < 0, \forall i \in \{k+1, \dots, k+h\}$ et enfin $b(\vec{v}_i, \vec{v}_i) = 0, \forall i \in \{k+h+1, \dots, n\}$. Alors $k = i_+$ et $h = i_-$.

Démonstration. Observons que $i_+ \geq k$ car la restriction de b à $V_+ := \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{v}_i, i \in \{1, \dots, k\}\}$ est défini positive. De façon similaire $i_- \geq h$. Nous allons prouver que $i_- \leq h$ pour terminer (la même preuve pourra être répétée pour montrer donnera aussi $i_+ \leq k$).

Soient $V_{+,0} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{v}_i, i \in \{1, 2, \dots, k\} \cup \{k+h+1, \dots, n\}\}$ et F un espace vectoriel de dimension maximale parmi ceux tels que $b|_F$ soit définie négative. Remarquons que par construction si l'on calcule $b(\vec{x}, \vec{x})$ sur un vecteur $\vec{x} \in V_{+,0} \setminus \{\vec{0}\}$ on a un résultat non-négatif, et si $\vec{x} \in F \setminus \{\vec{0}\}$ on a un résultat négatif. Supposons par l'absurde que $i_- > h$ alors par l'Exercice 45 on a que $F \cap V_{+,0} \ni \vec{z} \neq \vec{0}$ car $\dim(V_{+,0}) + \dim F > n$. Mais alors il existe $\vec{z} \neq 0 \in F \cap V_{+,0}$ et donc $b(\vec{z}, \vec{z})$ est à la fois non négatif (parce-que $\vec{z} \in V_{+,0}$) et négatif (parce-que $\vec{z} \in F$) ce qui est absurde. Du coup $i_- \leq h$ comme voulu. 5.16

Le théorème d'inertie de Sylvester, avec le suivant théorème spectral nous permet de calculer la signature d'une forme bilinéaire symétrique à partir de son écriture par une matrice symétrique dans une base.

Théorème 5.17 (Théorème Spectrale, Weierstrass, Première version). Soit b une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel V , $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base de V et $M = \phi_{\{\vec{v}_i\}}(b) \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ la matrice qui la représente (on a donc ${}^t M = M$). Alors il existe une matrice P telle que ${}^t P = P^{-1}$ et telle que $P^{-1} M P = {}^t P M P = D$ où D est une matrice diagonale. Par conséquent la signature de b est le couple formé par le nombre de valeurs propres positives de M suivi du nombre de valeurs propres négatives de M . En particulier M représente un produit scalaire ssi ses valeurs propres sont toutes positives.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 1$ l'énoncé est trivial. Supposons l'avoir prouvé pour $n - 1$ et prouvons-le pour n . Soit $S^{n-1} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 1\}$: remarquons que $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace compact, donc toute fonction continue y admet un maximum; en particulier soit $f(\vec{v}) := {}^t \vec{v} M \vec{v}$ et soit $\vec{v}_n \in S^{n-1}$ un point où le maximum est atteint. Nous allons prouver qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $M \vec{v}_n = \lambda_n \vec{v}_n$ et que si $\vec{w} \in \vec{v}_n^\perp$ alors $M \vec{w} \in \vec{v}_n^\perp$. En effet si $w \in \vec{v}_n^\perp$ et $\|\vec{w}\| = 1$ alors on a que le chemin $c(t) := \vec{v}_n \cos(t) + \vec{w} \sin(t), t \in [0, 2\pi]$ est à valeurs en S^{n-1} , $c(0) = \vec{v}_n$ et $c'(0) = \vec{w}$. Donc on a que $f(c(t))$ a son maximum en $t = 0$ et en dérivant $f(c(t))$ en $t = 0$ nous avons que $0 = 2({}^t \vec{w}) M \vec{v}_n$ et donc $M \vec{v}_n \in (\vec{w}^\perp)$. Puisque cela vaut pour tout $\vec{w} \in \vec{v}_n^\perp$ alors $M \vec{v}_n \in (\vec{v}_n^\perp)^\perp = \{\lambda \vec{v}_n \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$: c'est à dire \vec{v}_n est un vecteur propre de M . Complétons maintenant \vec{v}_n à une base orthonormale de \mathbb{R}^n (nous avons déjà montré qu'on peut le faire) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. La matrice $P_n = \text{Mat}_{\{\vec{v}_i\}, \{\vec{e}_i\}}(Id)$ est telle que ${}^t P_n P_n = Id$ (car les entrées de ce produit sont $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{i,j}$ par définition de base orthogonale) et en plus on a :

$${}^t P_n M P_n = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $Q = {}^t Q$ est une matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une matrice $S \in \text{Mat}_{n-1, n-1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^t S S = Id$ et telle que ${}^t S Q S$ est diagonale. Mais alors la matrice

$$P_{n-1} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est telle que ${}^t P_{n-1} P_{n-1} = Id \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ et ${}^t P_{n-1} {}^t P_n M P_n P_{n-1} = (P_n P_{n-1})^{-1} M (P_n P_{n-1})$ est diagonale. La matrice P cherchée est donc $P = P_n P_{n-1}$: en effet on a bien ${}^t P P = {}^t P_{n-1} {}^t P_n P_n P_{n-1} = {}^t P_{n-1} P_{n-1} = Id$. La signature de b est alors le couple $(\#\{\lambda_i > 0\}, \#\{\lambda_j < 0\})$ où λ_k sont les valeurs propres de M : en effet cela vient du Théorème 5.16. 5.17

Rappelons que si on a une matrice symétrique $Q \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$, on peut lui associer une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^n par

$$b_Q(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v}^t \cdot Q \cdot \vec{w}.$$

Corollaire 5.18. *Données deux matrices symétriques $Q, P \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$, il existe une matrice $A \in GL(n)$ telle que $A^t P A = Q$ si les signatures des formes b_Q et b_P sont les mêmes.*

Démonstration. Soient (i_+, i_-) et (j_+, j_-) les signatures de b_Q et b_P et soient $\vec{v}_i, i = 1, \dots, n$ et $\vec{w}_i, i = 1, \dots, n$ deux bases orthogonales pour b_Q et b_P respectivement. Dans la base \vec{v}_i (resp. \vec{w}_i) la forme b_Q s'écrit par une matrice diagonale aux entrées λ_i ; à moins de reordonner les indices des vecteurs et remplacer \vec{v}_i par $\frac{\vec{v}_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ (lorsque $\lambda_i \neq 0$) nous pouvons supposer que cette matrice, appelons D_Q a i_+ entrées égales à 1 suivies de i_- entrées égales à -1 et enfin d'un bloc 0 de taille $i_0 \times i_0$ (avec $i_0 = n - i_+ - i_-$). De façon similaire nous pouvons supposer que l'écriture de la forme b_P dans la base \vec{w}_i soit une matrice diagonale D_P ayant j_+ entrées égales à 1 suivies de j_- entrées égales à -1 et enfin d'un bloc 0 de taille $j_0 \times j_0$ (avec $j_0 = n - j_+ - j_-$). Soient X et Y respectivement la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^n à la base \vec{v}_i et de la base canonique de \mathbb{R}^n à la base \vec{w}_i . Alors par construction on a $X^t Q X = D_Q$ et $Y^t P Y = D_P$. Si $(i_+, i_-) = (j_+, j_-)$ alors $D_Q = D_P$ et la matrice A cherchée est $A = Y X^{-1}$. Autrement par le théorème de Sylvester il n'est pas possible qu'une telle A existe car la forme b_Q et b_P ont signatures différentes. 5.18

Remarque 5.19. *Le corollaire ci dessus montre que la classifications des matrices carrées à moins de "conjugaison par la transposée" (une façon de dire complètement informelle et incorrecte!) est beaucoup plus simple que la classification des matrices carrées à moins de conjugaison (qui correspond à la classification des endomorphismes et qui, au moins sur \mathbb{C} , est donnée par le théorème de décomposition en forme canonique de Jordan).*

Très souvent on a une matrice qui exprime une forme bilinéaire dans une base d'un espace vectoriel et on se demande si par exemple cette forme est dégénérée ou encore si elle est un produit scalaire. La réponse à la première question est donnée dans l'exercice suivant :

Exercice 46. *Soit V un espace vectoriel de dimension n , b une forme bilinéaire sur V , $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base de V et Q la matrice carrée qui exprime b dans la base $\{\vec{v}_i\}$. Alors prouver que b est dégénérée si et seulement si $\det(Q) = 0$.*

Par contre la réponse à la question "est b un produit scalaire?" est plus compliquée et est la suivante :

Proposition 5.20 (Critère de Sylvester). *Soit V un espace vectoriel de dimension n , b une forme bilinéaire sur V , $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base de V et Q la matrice carrée qui exprime b dans la base $\{\vec{v}_i\}$. Alors b est définie positive si et seulement si pour tout $k \leq n$ on a $\det Q_k > 0$ où $Q_k \in \text{Mat}(k \times k; \mathbb{R})$ est le premier mineur principal de taille k de Q (i.e. Q_k est la sous-matrice de Q obtenu en éliminant les dernières $n - k$ lignes et colonnes).*

Démonstration. Prouvons l'énoncé par récurrence sur $n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$. Si $n = 1$ l'énoncé est clair. Supposons l'avoir prouvé pour les couples (V, b) avec $\dim(V) < n$ et b une forme bilinéaire symétrique sur V . Soit V_{n-1} le sous espace de V engendré par $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$.

\Rightarrow . Supposons que b est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Par hypothèse de récurrence, puisque la restriction de b à V_{n-1} est une forme bilinéaire définie positive on a que $\det(Q_k) > 0 \forall k < n$. Il nous reste à prouver que $\det(Q) > 0$. Mais soit maintenant $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ une base orthogonale de V et soit P la matrice de passage de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$. Alors si Q' est la matrice qui exprime b dans la base $\{\vec{w}_i\}$ est $Q' = P^t Q P$ et donc $\det(Q') = \det(P^t) \det(Q) \det(P) = \det(P)^2 \det(Q)$. Mais alors $\det(Q) > 0$ si et seulement si $\det(Q') > 0$. Or si b est définie positive Q' est diagonale et tous les entrées de la diagonale (égales à $b(\vec{w}_i, \vec{w}_i)$) sont positive. Du coup $\det(Q') > 0$ et nous avons terminé.

\Leftarrow Réciproquement si on sait que $\det(Q_k) > 0 \forall k$ alors en particulier, par récurrence on sait que la restriction de b au sous-espace V_{n-1} est définie positive. Soit alors $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_{n-1}$ une base orthonormale de V_{n-1} . Alors en complétant cela à une base $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_{n-1}, \vec{v}_n$ de V on a que la matrice qui exprime b dans cette nouvelle base est de la forme :

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b(\vec{v}'_1, \vec{v}_n) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b(\vec{v}'_2, \vec{v}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & b(\vec{v}'_{n-1}, \vec{v}_n) \\ b(\vec{v}'_1, \vec{v}_n) & b(\vec{v}'_2, \vec{v}_n) & \cdots & b(\vec{v}'_{n-1}, \vec{v}_n) & b(\vec{v}_n, \vec{v}_n) \end{pmatrix}.$$

Mais alors posons $\vec{v}'_n := \vec{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} b(\vec{v}'_i, \vec{v}_n) \vec{v}'_i$, par construction $b(\vec{v}'_i, \vec{v}'_n) = 0, \forall i < n$ et puisque $\vec{v}_n \notin \text{span}(\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_{n-1}) = \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}) = V_{n-1}$ on a aussi $\vec{v}'_n \notin V_{n-1}$. Mais alors $\vec{v}'_i, i = 1, \dots, n$ forment une base de V et dans cette base la matrice qui exprime b est :

$$Q'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b(\vec{v}'_n, \vec{v}'_n) \end{pmatrix}.$$

Du coup $\det(Q'') > 0$ si et seulement si $b(\vec{v}'_n, \vec{v}'_n) > 0$ et donc si et seulement si il existe une base $(\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n)$ dans laquelle la matrice qui exprime b est diagonale et positive donc si et seulement si b est définie positive. Mais $\det(Q'') = \det(P)^2 \det(Q)$ si P est la matrice de passage de \vec{v}_i à \vec{v}'_i et on a terminé. 5.20

5.1 Exercices

Exercice 47. Soit $V = \mathbb{R}^2$ et b la forme bilinéaire qui dans la base canonique est décrite par la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dire si b est une forme symétrique et dans ce cas si elle est non-dégénérée et encore si elle est définie positive. Trouver une base orthogonale \vec{v}_1, \vec{v}_2 pour b puis écrire la matrice Q' qui exprime b dans cette nouvelle base. Peut-on trouver une base orthonormale? Quelle est la signature de b ? Écrire la matrice de passage de la base \vec{e}_i à la base \vec{v}_i puis vérifier que $Q' = P^t Q P$.

Solution de l'exercice. b est symétrique et non-dégénérée parce que respectivement $Q^t = Q$ et $\det(Q) \neq 0$. Par le critère de Sylvester b n'est pas définie positive car bien que $\det(Q_1) = 1 > 0$ on a $\det(Q_2) = \det(Q) = -1 < 0$. Pour trouver une base orthogonale choisissons un premier vecteur v_2 tel que $b(\vec{v}_2, \vec{v}_2) \neq 0$, par exemple soit $\vec{v}_2 := (0, 1)$ (on a en effet $b(\vec{v}_2, \vec{v}_2) = 3 \neq 0$). Pour compléter \vec{v}_2 à une base orthogonale il nous faut maintenant un vecteur non nul \vec{v}_1 tel que $b(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$. Si alors les coordonnées dans la base canonique de \mathbb{R}^2 de \vec{v}_1 sont (x, y) alors nous devons avoir :

$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

et donc $2x + 3y = 0$. Par exemple nous pouvons poser $x = 3$ et donc $y = -2$. On a $b(\vec{v}_1, \vec{v}_1) = 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2)^2 = -3$. Alors l'écriture de b dans la base \vec{v}_1, \vec{v}_2 est :

$$Q' := \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il est donc évident que b n'est pas définie positive et par conséquent qu'elle n'admet pas de base orthonormale. La matrice de passage est

$$P := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc on a

$$P^t Q P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = Q'$$

comme il le fallait.

Exercice 48. Soit $V = \mathbb{R}^3$ et b la forme bilinéaire qui dans la base canonique est décrite par la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dire si b est une forme symétrique et dans ce cas si elle est non-dégénérée et encore si elle est définie positive. Trouver une base orthogonale $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_3$ pour b puis écrire la matrice Q' qui exprime b dans cette nouvelle base. Peut-on trouver une base orthonormale? Quelle est la signature de b ? Écrire la matrice de passage de la base \vec{e}_i à la base \vec{v}_i puis vérifier que $Q' = P^t Q P$.

Solution de l'exercice. b est symétrique et non-dégénérée parce que respectivement $Q^t = Q$ et $\det(Q) \neq 0$. b est définie positive par le critère de Sylvester car : $\det(Q_1) = 2 > 0$, $\det(Q_2) = 6 - 4 > 0$ et $\det(Q_3) = \det(Q) = -1 \cdot 3 + 2(6 - 4) = 1 > 0$. Soit $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ (mais on aurait pu prendre n'importe quel vecteur tel que $b(\vec{v}_3, \vec{v}_3) \neq 0$) alors $b(\vec{v}_3, \vec{v}_3) = 2$. Cherchons une base orthogonale de $V_2 = (\vec{v}_3)^\perp$. On a que $V_2 = \{(x, y, z) \mid -x + 2z = 0\}$ Donc une base de V_2 est donnée par $\vec{w}_1 = (2, 0, 1)$ et $\vec{w}_2 = (0, 1, 0)$. Il nous faut maintenant trouver une base orthogonale de V_2 . Soit alors $\vec{v}_2 := \vec{w}_2$ (mais on aurait pu prendre n'importe quel vecteur de V_2 !) parmi les vecteurs $a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2$ nous en cherchons un qui soit b orthogonal à \vec{v}_2 donc nous imposons :

$$(2a, b, a) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

et donc $4a + 3b = 0$: par exemple $a = -3$ et $b = 4$ et donc $\vec{v}_1 = (-6, 4, -3)$. On a $b(\vec{v}_2, \vec{v}_2) = 3$ et

$$b(\vec{v}_1, \vec{v}_1) = (-6, 4, -3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = (-6, 4, -3) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$$

et donc

$$Q' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ce qui confirme bien que b est définie positive). Une base orthonormale de b est $\vec{v}'_i := \frac{\vec{v}_i}{\sqrt{b(\vec{v}_i, \vec{v}_i)}}$, $i = 1, 2, 3$ et donc

$$\vec{v}'_1 = \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{6}} \\ \frac{4}{\sqrt{6}} \\ \frac{-3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \vec{v}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Enfin on a

$$P = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$P^t Q P = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Q'$$

comme il le fallait.

Exercice 49. Trouver la signature de la forme bilinéaire b sur \mathbb{R}^3 qui est exprimée dans la base canonique par la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice. Si on trouve une base orthogonale et on exprime la forme bilinéaire b dans cette base, pour obtenir la signature de b il suffira de compter combien d'éléments positifs sont sur cette matrice diagonale et combien de négatif il y a. Or posons $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ (mais nous aurions pu choisir n'importe quel vecteur tel que $b(\vec{v}_3, \vec{v}_3) \neq 0$). L'orthogonal de \vec{v}_3 est $(\vec{v}_3^\perp) = \{(x, y, z) | 2x + 2z = 0\}$ et donc une base de cet espace est donnée par $\vec{v}'_2 = (0, 1, 0)$ et par $\vec{v}'_1 = (1, 0, -1)$. Choisissons alors \vec{v}'_2 comme deuxième vecteur \vec{v}_2 de notre base orthogonale (mais nous aurions pu choisir n'importe quel vecteur de (\vec{v}_3^\perp) tel que $b(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$). Il s'agit maintenant de modifier \vec{v}'_1 à un vecteur \vec{v}_1 qui est orthogonal aussi à $\vec{v}_2 = \vec{v}'_2$: il faut donc chercher une combinaison linéaire $\vec{v}_1 = a\vec{v}'_1 + b\vec{v}'_2$ tel que $b(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$ et donc puisque $b(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2) = 2$ et $b(\vec{v}'_2, \vec{v}'_2) = 3$ nous avons donc $2a + 3b = 0$. Alors le vecteur $\vec{v}_1 := 3\vec{v}'_1 - 2\vec{v}'_2 = (3, -2, -3)$ est orthogonal à la fois à \vec{v}_3 et à \vec{v}'_2 . Donc la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ est b -orthogonale. Soit P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$: sa i -ème colonne est \vec{v}_i donc

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour avoir la forme de b dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ nous calculons alors :

$$Q' = P^t Q P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La signature de b est donc $(2, 1)$.

Exercice 50. Donner un exemple de forme bilinéaire non-dégénérée qui admet un vecteur isotrope.

Solution de l'exercice. Par exemple soit $V = \mathbb{R}^2$ et b la forme bilinéaire symétrique non dégénérée qui dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est représentée par

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors le vecteur $(1, 1)$ est isotrope (mais b est bien non dégénérée car $\det Q \neq 0$ et symétrique car ${}^t Q = Q$).

Exercice 51. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel V de dimension n . Prouver que si b est non dégénérée et $\vec{v} \in V$ est tel que $b(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$ alors la restriction de b à $(\vec{v})^\perp$ est non dégénérée.

Solution de l'exercice. L'application linéaire $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(\vec{w}) = b(\vec{v}, \vec{w})$ est non nulle car $f(\vec{v}) \neq 0$ par hypothèse. Alors son image est tout \mathbb{R} et donc a dimension 1 et donc son noyau, qui est exactement \vec{v}^\perp , a dimension $n - 1$. Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$ une base de \vec{v}^\perp . Alors $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}$ sont une base de V (prouver cela par exercice en montrant qu'ils sont linéairement indépendants) et dans cette base la forme bilinéaire est représentée par une matrice de la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & b(\vec{v}, \vec{v}) \end{pmatrix}.$$

où $Q' \in \text{Mat}_{n-1, n-1}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique. Puisque par hypothèse b n'est pas dégénérée alors $\det(Q) \neq 0$ et donc, puisque $\det(Q) = \det(Q') b(\vec{v}, \vec{v})$ et $b(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$ alors $\det(Q') \neq 0$. Mais Q' représente exactement la restriction de b au sous-espace \vec{v}^\perp .

Exercice 52. Soit V un espace vectoriel de dimension n et b une forme bilinéaire symétrique sur V . Montrer que si $\forall \vec{v} \in V$ on a $b(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ alors b est la forme bilinéaire nulle (c'est à dire $b(\vec{v}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{v}, \vec{w}$).

Solution de l'exercice. Comme vu en classe : si $b(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \forall \vec{v} \in V$ alors on a $b(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) = 0, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ et donc

$$0 = b(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) = b(\vec{v}, \vec{v}) + 2b(\vec{v}, \vec{w}) + b(\vec{w}, \vec{w}) = 0 + 2b(\vec{v}, \vec{w}) + 0, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V.$$

Exercice 53. Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et b une forme bilinéaire symétrique sur V .

1. Montrer que si $U \subseteq W \subseteq V$ sont deux sous-espaces vectoriels alors $W^\perp \subseteq U^\perp$.
2. Montrer que si $U \subseteq V$ est un sous-espace vectoriel alors $U \subseteq (U^\perp)^\perp$.
3. Si $V = \mathbb{R}^2$ trouver un exemple de b et de $U \subset V$ tels que $U^\perp = U$. (Aide : essayer avec une forme bilinéaire symétrique représentée par une matrice diagonale dans la base canonique de \mathbb{R}^2).
4. Trouver un exemple de (V, b) et de U tels que $U \subsetneq (U^\perp)^\perp$ (Aide : essayer avec une forme bilinéaire symétrique dégénérée b sur $V = \mathbb{R}^2$).
5. Montrer que si $U, W \subset V$ sont deux sous-espaces vectoriels alors $(\text{Vect}(U, W))^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

Solution de l'exercice. 1. Par définition on a $U^\perp = \{\vec{v} \in V \text{ t.q. } \forall \vec{u} \in U, b(\vec{v}, \vec{u}) = 0\}$; de façon similaire $W^\perp = \{\vec{x} \in V \text{ t.q. } \forall \vec{w} \in W, b(\vec{x}, \vec{w}) = 0\}$. Mais alors si $U \subset W$ on a $W^\perp \subset U^\perp$ car si \vec{x} est tel que $b(\vec{x}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{w} \in W$ alors il est d'autant plus vrai que $b(\vec{x}, \vec{u}) = 0, \forall \vec{u} \in U$.

2. Par définition on a $U^\perp = \{\vec{v} \in V \text{ t.q. } \forall \vec{u} \in U, b(\vec{v}, \vec{u}) = 0\}$; de façon similaire $(U^\perp)^\perp = \{\vec{x} \in V \text{ t.q. } \forall \vec{w} \in U^\perp, b(\vec{x}, \vec{w}) = 0\}$. Mais alors si $\vec{x} \in U$ on a que $\forall \vec{w} \in U^\perp, b(\vec{w}, \vec{x}) = 0$ (par définition de U^\perp) et donc, puisque b est symétrique aussi que $b(\vec{x}, \vec{w}) = 0 \forall \vec{w} \in U^\perp$ donc $\vec{x} \in (U^\perp)^\perp$.
3. Par exemple b la forme bilinéaire symétrique non dégénérée qui dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est représentée par

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $U = \{(\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4. Par exemple b la forme bilinéaire symétrique dégénérée qui dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est représentée par

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $U = \{(0, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$: remarquer que $U^\perp = \mathbb{R}^2$.

5. Par définition on a $U^\perp = \{\vec{v} \in V \text{ t.q. } \forall \vec{u} \in U, b(\vec{v}, \vec{u}) = 0\}$; de façon similaire $W^\perp = \{\vec{x} \in V \text{ t.q. } \forall \vec{w} \in W, b(\vec{x}, \vec{w}) = 0\}$. Par définition de "Vect" on a que $\text{Vect}(U, W) = \{\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{v} \in U, \vec{w} \in W\}$. Si $\vec{x} \in U^\perp \cap W^\perp$ alors $b(\vec{x}, \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda b(\vec{x}, \vec{v}) + \mu b(\vec{x}, \vec{w}) = 0 + 0 = 0, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{v} \in U, \vec{w} \in W$, donc $\vec{x} \in (\text{Vect}(U, W))^\perp$. Réciproquement si $\vec{x} \in (\text{Vect}(U, W))^\perp$ alors $b(\vec{x}, \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = 0, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{v} \in U, \vec{w} \in W$ et notamment en prenant $\lambda = 1, \mu = 0$ nous obtenons que $b(\vec{x}, \vec{v}) = 0 \forall \vec{v} \in U$ et donc $\vec{x} \in U^\perp$. De façon similaire en prenant $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ on a que $b(\vec{x}, \vec{w}) = 0 \forall \vec{w} \in W$ et donc $\vec{x} \in W^\perp$. Donc $\vec{x} \in U^\perp \cap W^\perp$. Alors on a que $U^\perp \cap W^\perp \subset (\text{Vect}(U, W))^\perp$ et $(\text{Vect}(U, W))^\perp \subset U^\perp \cap W^\perp$ et donc l'égalité.

Exercice 54. Soit b un produit scalaire sur \mathbb{R}^n et soit Q la matrice qui exprime b dans la base canonique. Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ deux bases orthogonales de \mathbb{R}^n et soit X la matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{w}_i\}$. Montrer qu'on a $X^t X = Id$. (Aide : écrire les matrices de passage P_1 (resp. P_2) de la base canonique à $\{\vec{v}_i\}$ (resp. $\{\vec{w}_i\}$), puis écrire les équation qu'elles satisfont.)

Exercice 55 (Un exemple du théorème spectral). Soit

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

Trouver vecteurs propres \vec{v}_1 et \vec{v}_2 de M ayant norme 1 et leur valeurs propres respectives. Montrer que la matrice R dont les colonnes sont \vec{v}_1 et \vec{v}_2 satisfait $R^t \cdot R = Id$ et que, à moins de remplacer \vec{v}_2 par $-\vec{v}_2$ elle a déterminant 1. R est une rotation de quel angle ?

Exercice 56 (Un autre exemple du théorème spectral). Soit

$$M := \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Trouver vecteurs propres $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ de M ayant norme 1 et leur valeurs propres respectives. Montrer que la matrice R dont les colonnes sont \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 satisfait

$$R^t \cdot R = Id$$

et que, à moins de remplacer \vec{v}_3 par $-\vec{v}_3$ elle a déterminant 1. R est une rotation autour de quel axe ?

Solution de l'exercice. Les valeurs propres de M sont 9, 6 et 3. Un vecteur propre de valeur propre 9 et de norme 1 (par rapport au produit scalaire standard de \mathbb{R}^3) est $\vec{v}_1 = (\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$. Un vecteur propre de valeur propre 6 et de norme 1 (par rapport au produit scalaire standard de \mathbb{R}^3) est $\vec{v}_2 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$. Un vecteur propre de valeur propre 3 et norme 1 (par rapport au produit scalaire standard de \mathbb{R}^3) est $\vec{v}_3 = (\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$. On a que $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{i,j}$ (vérification directe). La matrice R cherchée est donc

$$R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet on peut tester qu'on a bien :

$${}^t R M R = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \det(R) = 1, \text{ et } {}^t R \cdot R = Id.$$

Donc $R \in SO(3)$ et elle représente une isométrie de $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$. Un vecteur propre de valeur propre 1 de R est $\vec{v} = (0, 1, -1)$ (on remarque bien qu'on a $R\vec{v} = \vec{v}$), donc R est une rotation autour de l'axe $\{\lambda\vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ce qui suit **n'est pas demandé dans l'exercice**, et explique comment calculer l'angle de la rotation R . En complétant \vec{v} à une base orthonormale (par rapport au produit scalaire standard de \mathbb{R}^3) on ajouterait deux vecteurs \vec{w}, \vec{x} . Puisque R représente une isométrie de \mathbb{R}^3 alors $R\vec{w} \in (R\vec{v})^\perp = \vec{v}^\perp$ et $R\vec{x} \in (R\vec{v})^\perp = \vec{v}^\perp$. Alors l'expression dans cette base de l'isométrie représentée par R devient donc :

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

pour un certain $\theta \in [0, 2\pi[$ inconnu. Pour trouver θ (ce qui n'est pas demandé dans l'exercice) on peut regarder la trace de R' qui est égale à la trace de R et donc égale à $2\cos(\theta) + 1 = \frac{5}{3}$, et donc on trouve que $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$. Alors $\theta \in \{\arccos(\frac{1}{3}), 2\pi - \arccos(\frac{1}{3})\}$: ce qui nous laisse choix entre la rotation d'angle $\arccos(\frac{1}{3})$ autour de la direction $(0, 1, -1)$ ou de celle d'angle $-\arccos(\frac{1}{3})$ autour du même axe. Pour choisir entre ces deux angle remarquons que si $\vec{w} \in \vec{v}^\perp$ (par exemple $\vec{w} = (1, 0, 0)$) alors $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \wedge \vec{w}$ est un vecteur de norme 1 orthogonal à \vec{v} à \vec{w} et qui est obtenu de \vec{w} en appliquant une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe \vec{v} . Mais donc $\langle R(w), \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle > 0$ si et seulement si $\theta = \arccos(\frac{1}{3}) \in [0, \pi]$. On calcule alors $\langle R(w), \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = \langle (1, -2, -2), (0, -1, -1) \rangle = 4 > 0$ donc $\theta = \arccos(\frac{1}{3})$.

6 Généralités sur les espaces vectoriels euclidiens

Définition 6.1 (Espaces vectoriels euclidiens). *Un espace euclidien vectoriel de dimension n est la donnée d'un espace vectoriel V de dimension n sur \mathbb{R} et d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur V . On appelle norme euclidienne la fonction $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$. Un plan euclidien est un espace euclidien de dimension 2.*

Proposition 6.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *On a pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in V$:*

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$$

et l'égalité vaut ssi \vec{v} et \vec{w} sont colinéaires.

Démonstration. Il est suffisant de travailler sur le plan vectoriel engendré par \vec{v}, \vec{w} :

$$\langle \vec{v} + t\vec{w}, \vec{v} + t\vec{w} \rangle = \|\vec{v}\|^2 + t^2\|\vec{w}\|^2 + 2t\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \geq 0$$

mais pour que le polynôme en t à droite soit toujours non négatif il faut et il suffit que son discriminant soit négatif (car son coefficient directeur est positif). Le discriminant est bien $4\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 - 4\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2$, ce qui prouve la thèse. Enfin remarquons que l'égalité peut valoir seulement si $\vec{v} + t\vec{w} = \vec{0}$ car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est supposé défini positif. Mais dans ce cas on a que \vec{v} et \vec{w} sont colinéaires. 6.2

Lemme 6.3. *La norme euclidienne est bien une norme, c'est à dire :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V, \|\vec{v}\| \iff \vec{v} = \vec{0}, \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|, \|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|.$$

Démonstration. $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$ parce que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire définie positive. $\|\lambda\vec{v}\| = \sqrt{\langle \lambda\vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = |\lambda| \|\vec{v}\|$. Enfin

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \leq \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2$$

(où nous avons utilisé Cauchy-Schwarz) et donc on peut conclure par positivité de la norme. 6.3

Définition 6.4 (Distance euclidienne). *Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien. La distance euclidienne sur V est définie comme*

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{\langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle}.$$

Exercice 57. *Prouver que la distance euclidienne est bien une distance (c'est à dire que $\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{t} \in E$ on a $d(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \implies \vec{v} = \vec{w}$, $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$ et $d(\vec{v}, \vec{w}) \leq d(\vec{v}, \vec{t}) + d(\vec{t}, \vec{w})$).*

Solution de l'exercice. Si $d(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ alors $\langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = 0$ et donc puisque le produit scalaire est défini positif on a $\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$. On a aussi $\langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} - \vec{v}, \vec{w} - \vec{v} \rangle$ par bilinéarité et donc $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$. Pour l'inégalité triangulaire :

$$\langle \vec{w} - \vec{v}, \vec{w} - \vec{v} \rangle = \langle \vec{w} - \vec{t} + \vec{t} - \vec{v}, \vec{w} - \vec{t} + \vec{t} - \vec{v} \rangle = d(\vec{w}, \vec{t})^2 + d(\vec{t}, \vec{v})^2 + 2\langle \vec{w} - \vec{t}, \vec{t} - \vec{v} \rangle \leq d(\vec{w}, \vec{t})^2 + d(\vec{t}, \vec{v})^2 + 2\sqrt{\langle \vec{w} - \vec{t}, \vec{w} - \vec{t} \rangle \langle \vec{t} - \vec{v}, \vec{t} - \vec{v} \rangle}$$

où dans la dernière nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc :

$$d(\vec{v}, \vec{w})^2 \leq d(\vec{w}, \vec{t})^2 + d(\vec{t}, \vec{v})^2 + 2\sqrt{d(\vec{w}, \vec{t})^2 d(\vec{t}, \vec{v})^2} = (d(\vec{v}, \vec{t}) + d(\vec{t}, \vec{w}))^2.$$

Puisque toutes les distances sont non-négatives nous pouvons donc conclure $d(\vec{v}, \vec{w}) \leq d(\vec{v}, \vec{t}) + d(\vec{t}, \vec{w})$. La preuve montre aussi que on a l'égalité si est seulement si $\langle \vec{w} - \vec{t}, \vec{t} - \vec{v} \rangle = \sqrt{\langle \vec{w} - \vec{t}, \vec{w} - \vec{t} \rangle \langle \vec{t} - \vec{v}, \vec{t} - \vec{v} \rangle}$ et donc si et seulement si $\vec{w} - \vec{t}$ et $\vec{t} - \vec{v}$ (et donc $\vec{w} - \vec{t}$ et $\vec{w} - \vec{v}$) sont colinéaires et \vec{t} appartient à l'intervalle $\{s\vec{v} + (1-s)\vec{w} \mid s \in [0, 1]\}$.

Définition 6.5 (Isométries vectorielles). Soient E, F espaces vectoriels euclidiens. Un plongement isométrique vectoriel $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire telle que $\forall \vec{v}, \vec{w}$ on a :

$$\langle f(\vec{v}), f(\vec{w}) \rangle_F = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_E.$$

En particulier $\|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$, $\forall \vec{v} \in V$; par conséquent $\ker f = \{\vec{0}\}$. On appelle f aussi isométrie vectorielle entre E et son image par f (c'est à dire $f(E) \subset F$) ; si $\dim E = \dim F$ on dit que f est une isométrie vectorielle.

On dit qu'une isométrie $f : E \rightarrow E$ est directe si son déterminant est positif, et elle est indirecte autrement.

Nous laissons la preuve du suivant comme exercice :

Lemme 6.6. Soit (V, \langle, \rangle_V) un espace vectoriel euclidien et $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base orthonormale. Alors l'application $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$ associe le vecteur $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une isométrie entre (V, \langle, \rangle_V) et $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$.

Exercice 58. Soient E et F deux espaces euclidiens de la même dimension. Montrer qu'alors il existe une isométrie vectorielle entre E et F .

Définition 6.7 (Droites, demidroites, plans, angles géométriques et arithmétiques). Soit E un espace vectoriel euclidien.

- La demi-droite dirigée par un vecteur non nul $\vec{v} \in E$ est l'ensemble $D(\vec{v}) := \{\lambda \vec{v} | \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset E$.
- L'angle géométrique formé par deux vecteurs non-nuls $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$ est l'union des deux demi-droites $D(\vec{v}_1), D(\vec{v}_2)$.
- L'angle arithmétique formé par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 la valeur $\alpha = \arccos\left(\frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}\right) \in [0, \pi]$.
- La droite affine par le point \vec{w} et dirigée par le vecteur non nul \vec{v} est l'ensemble $\{\vec{w} + \lambda \vec{v} | \lambda \in \mathbb{R}\} \subset E$. Elle est vectorielle si elle contient $\vec{0}$.
- Le plan affine par le point \vec{w} et dirigé par les vecteurs non colinéaires \vec{v}_1, \vec{v}_2 est l'ensemble $\{\vec{w} + \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \subset E$. Il est vectoriel s'il contient $\vec{0}$.
- Plus en général si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de dimension k alors le " k -sous espace affine" (ou k -plan affine) de E par \vec{w} est l'ensemble

$$\{\vec{w} + \vec{v} | \vec{v} \in F\}$$

et il est dit k -sous espace vectoriel s'il contient $\vec{0}$.

Exercice 59. Dire pourquoi l'angle arithmétique entre deux vecteurs non-nuls est défini.

Définition 6.8 (Écart angulaire entre deux droites en un espace vectoriel euclidien). Soit E un espace vectoriel euclidien et r_1 et r_2 deux droites affines qui passent par un même point. On définit l'écart angulaire entre r_1 et r_2 comme l'angle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{\sqrt{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}}$ où \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont deux vecteurs qui dirigent r_1 et r_2 respectivement.

Définition 6.9 (Groupes orthogonal et spécial orthogonal). Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n . L'ensemble des isométries vectorielles de $E \rightarrow E$ est appelé "Groupe Orthogonal" et est noté $O(E)$. L'ensemble des isométries vectorielles directes de $E \rightarrow E$ est appelé le "Groupe Spécial Orthogonal" et est noté $SO(E)$. Comme les noms l'indiquent ils sont deux groupes (si $n > 2$ ils ne sont pas abéliens !) par rapport à la composition, avec élément neutre $Id : E \rightarrow E$ et $SO(E)$ est un sous groupe d'indice 2 (et donc distingué) de $O(E)$.

Je conseille très fortement de résoudre l'exercice suivant.

Exercice 60. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ une base orthonormale. Identifions alors par le biais de cette base $O(E)$ et $SO(E)$ avec des ensembles de matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels que nous notons $O(n)$ et $SO(n)$.

1. Montrer que les colonnes d'une matrice en $O(n)$ forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire standard (aide : que représentent les colonnes d'une matrice ?).

2. Prouver que $O(n) = \{M \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \mid M^t \cdot M = Id\}$;
3. Prouver que $SO(n) = \{M \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \mid M^t \cdot M = Id \text{ et } \det(M) = 1\}$.
4. Montrer que $O(n)$ et $SO(n)$ sont deux groupes par rapport au produit des matrices.

Proposition 6.10.

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$$

$$O(2) \setminus SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$$

En particulier $SO(2)$ est abélien et chaque matrice de $SO(2)$ (à l'exception de Id) agit sur \mathbb{R}^2 sans vecteurs fixes non triviaux. Au contraire, toute matrice de $O(2) \setminus SO(2)$ agit sur \mathbb{R}^2 comme une symétrie axiale (ou réflexion) par rapport à une droite vectorielle.

Démonstration. Si $M \in O(2)$, par le premier point de l'exercice 60 on peut trouver $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la première colonne de M soit $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. Par le même point la deuxième colonne doit être l'un des vecteurs $\pm \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$. En le premier cas on a que $M \in SO(2)$ et qu'elle représente une rotation R_θ d'angle θ dans le plan ; donc elle n'a pas de vecteurs fixes. Dans le deuxième cas on peut écrire

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc le vecteur \vec{v} qui forme un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des x (donc $\vec{v} = \cos(\frac{\theta}{2})e_1 + \sin(\frac{\theta}{2})e_2$) est fixé car il est envoyé par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en le vecteur formant un angle de $-\frac{\theta}{2}$ (et donc en $\cos(\frac{\theta}{2})e_1 - \sin(\frac{\theta}{2})e_2$ et puis par la rotation R_θ sur le vecteur v de départ. Donc $M\vec{v} = \vec{v}$. Puisque M est une isométrie indirecte alors $M\vec{v}^\perp = -\vec{v}^\perp$ donc M est une "réflexion orthogonale" (ou "symétrie axiale") par rapport à la droite vectorielle engendrée par \vec{v} .

6.10

Remarque 6.11. Attention parmi les $O(n)$, $SO(n)$, $n \geq 2$ seul $SO(2)$ est abélien!

6.1 Produit mixte

Dans cette section nous allons supposer que E est un espace vectoriel euclidien orienté. Soit $\mathcal{B}_{0,n}^+$ l'ensemble des bases orthonormales positives de E . Donnée une base orthonormale $\{\vec{e}_i\} \in \mathcal{B}_{0,n}^+$ et un ensemble de m vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in E$ nous noterons $Mat(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)_e$ la matrice de taille $n \times m$ dont la $j^{\text{ème}}$ -colonne sont les coordonnées de \vec{v}_j par rapport à $\{\vec{e}_i\}$. En particulier, si $m = n$ et les $\{\vec{v}_i\}$ forment une base, la matrice $Mat(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)_e$ est la matrice de passage de la base $\{\vec{e}_i\}$ à la base $\{\vec{v}_i\}$.

Lemme 6.12. Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ un ensemble quelconque de n -vecteurs de E et $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ et $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ deux bases orthonormales positives (i.e. $\{\vec{e}_i\}, \{\vec{f}_i\} \in \mathcal{B}_{0,n}^+$). Alors $\det(Mat(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)_e) = \det(Mat(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)_f)$.

Démonstration. La matrice M de passage de $\{\vec{e}_i\}$ à $\{\vec{f}_i\}$ est une matrice de $SO(n)$ parce que les deux bases sont orthonormales et directes. Mais alors $\det(M) = 1$ (voir l'exercice 60) et $Mat(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)_e = M \cdot Mat(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)_f$. On conclut donc par la formule de Binet : $\det(Mat(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)_e) = \det(Mat(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)_f) \det(M)$.

6.12

Le lemme précédent nous assure que la suivante est une bonne définition :

Définition 6.13. Le produit mixte de n vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ est $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n] := \det(\text{Mat}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)_e)$ où $\{\vec{e}_i\}$ est une base orthonormale directe quelconque de E (i.e. $\{\vec{e}_i\} \in \mathcal{B}_{o,n}^+$).

Définition 6.14. Le paralléloétope construit sur $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ est $P(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) := \{\sum_{i=1}^n t_i \vec{v}_i \mid t_i \in [0, 1]\}$.

L'interprétation géométrique du produit mixte de n -vecteurs est la suivante : $|\llbracket \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \rrbracket|$ est le volume du paralléloétope construit sur $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ et son signe est $+$ si et seulement si les vecteurs forment une base positive de E (qui par hypothèse est orienté).

6.2 Le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 et dans \mathbb{R}^n

Si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ sont deux vecteurs leur produit scalaire est défini comme le vecteur

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_2 w_3 - w_2 v_3, v_3 w_1 - w_3 v_1, v_1 w_2 - w_1 v_2).$$

D'où vient cette définition? Remarquons que la suivante formule est vraie : $\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ (de coordonnées $v_i, w_i, x_i, i = 1, 2, 3$ respectives) on a :

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & x_1 \\ v_2 & w_2 & x_2 \\ v_3 & w_3 & x_3 \end{pmatrix} = \langle \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{x} \rangle.$$

Cela implique donc qu'on a que $\langle \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$.

Remarque 6.15. ATTENTION : le produit vectoriel n'est pas associatif, c'est à dire qu'il n'est PAS VRAI que $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3, (\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{z} = \vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z})$. En effet il est suffisant de prendre $\vec{x} = \vec{e}_1, \vec{y} = \vec{z} = \vec{e}_2$. Plutôt le produit vectoriel satisfait la suivante "identité de Jacobi" : $\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) + \vec{u} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{v}) + \vec{w} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}) = 0, \forall \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 61. Soient \vec{v}, \vec{w} deux vecteurs non-colinéaires en \mathbb{R}^3 et soit π le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 qu'ils engendrent (π est aussi dit un 2-plan). Écrire une équation pour le plan π . (RAPPEL : Si (x, y, z) sont les coordonnées d'un vecteur quelconque su \mathbb{R}^3 alors une équation d'un plan vectoriel s'écrit par $ax + by + cz = 0$ pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls).

Exercice 62 (Vecteurs orthogonaux à un vecteur donné). Soit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ un vecteur de \mathbb{R}^3 (muni de son produit scalaire standard). Écrire trois vecteurs orthogonaux à \vec{v} . Sont-ils indépendants ?

Exercice 63 (Propriétés du produit vectoriel de \mathbb{R}^3). En \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire standard prouver les propriétés suivantes :

1. $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v} \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$;
2. $\vec{v} \wedge (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{w} \forall \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$;
3. $(c \cdot \vec{v}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge (c \cdot \vec{u}) = c \cdot (\vec{v} \wedge \vec{u}), \forall c \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$;
4. $\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u} - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{w} \forall \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$;
5. $\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) + \vec{u} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{v}) + \vec{w} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}) = 0, \forall \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ (Identité de Jacobi) ;
6. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ (Identité de Lagrange).

La définition ci dessus se généralise au cas de \mathbb{R}^n : dans ce qui suit nous allons définir le produit vectoriel de $n - 1$ vecteurs de \mathbb{R}^n ; le résultat est un autre vecteur de \mathbb{R}^n . Dans toute cette section nous allons supposer que E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n . Nous allons utiliser plusieurs fois le lemme suivant :

Lemme 6.16. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. Alors il existe un et un seul vecteur $\vec{x} \in E$ tel que $\forall \vec{v} \in E$ on ait $f(\vec{v}) = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle$.

Remarque 6.17. Si $E = \mathbb{R}^n$ et f est une application linéaire x n'est rien d'autre que le gradient de f .

Démonstration. Existence. Si $f = 0$ alors $\vec{x} = 0$ fait l'affaire. Si $f \neq 0$ alors soit $K = \ker(f) \subset E$; il s'agit d'un espace vectoriel de dimension $n - 1$ (ce qu'on appelle un hyperplan de E) car en général on a $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim E$ pour toute application linéaire f de E à valeurs dans un espace vectoriel quelconque W (ici $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = W$). Soit alors $X = K^\perp$: il s'agit d'une droite vectorielle et si $\vec{0} \neq \vec{a} \in X$ alors $f(\vec{a}) \neq 0$; le vecteur cherché est alors $\vec{x} := \frac{f(\vec{a})}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{a}$. **Unicité.** Si \vec{x} et \vec{x}' sont deux vecteurs ayant les propriétés souhaitées alors $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}', \vec{v} \rangle$, $\forall \vec{v} \in E$ et donc $\vec{x} - \vec{x}'$ est un vecteur qui a produit scalaire nul avec tout autre vecteur: il est donc nul parce que, par définition, un produit scalaire n'est pas dégénéré. 6.17

Dans la définition suivante nous allons appliquer le lemme précédent à l'application linéaire qui, une fois fixés $n - 1$ vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$ associe à un vecteur \vec{w} le nombre réel $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w}]$:

Définition 6.18 (Produit vectoriel de $n - 1$ vecteurs). Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1} \in E$; leur produit vectoriel est le seul vecteur de E que nous noterons $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}$ tel que l'on ait:

$$\forall \vec{w} \in E \quad [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w}] = \langle \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}, \vec{w} \rangle.$$

Proposition 6.19. Le produit vectoriel $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}$ les suivantes propriétés:

1. Il est linéaire par rapport à chacun des vecteurs \vec{v}_i ;
2. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$ on a $\vec{v}_{\sigma(1)} \wedge \vec{v}_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \vec{v}_{\sigma(n-1)} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}$ où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ (i.e. le déterminant de la matrice de taille $(n - 1) \times (n - 1)$ aux entrées 1 et 0 qui représente l'application linéaire qui sur la base canonique est définie par $\sigma(\vec{e}_i) = \vec{e}_{\sigma(i)} \forall i$, i.e; $S(\sigma)$ est la matrice dont l'entrée i, j est $\delta_{i, \sigma(j)}$).
3. Si $M \in SO(n)$ alors $M(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}) = (M \cdot \vec{v}_1) \wedge (M \cdot \vec{v}_2) \wedge \dots \wedge (M \cdot \vec{v}_{n-1})$, $\forall \vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Les premiers deux points sont une conséquence directe des propriétés des déterminants des matrices. En effet 1) découle du fait que le déterminant d'une matrice est linéaire par rapport à chaque colonne de la matrice donc par exemple pour prouver $\vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1} = \lambda \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x} \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1} + \mu \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{y} \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}$ (où \vec{x} et \vec{y} sont placés en position $i^{\text{ème}}$) nous remarquons que $\det(\text{Mat}(\vec{v}_1, \dots, \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w})) = \lambda \det(\text{Mat}(\vec{v}_1, \dots, \vec{x}, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w})) + \mu \det(\text{Mat}(\vec{v}_1, \dots, \vec{y}, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w}))$ (ce qui est une der propriétés des déterminants des matrices). Mais alors en utilisant cela dans la définition du vecteur $\vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}$, nous voyons qu'il est le seul vecteur tel que:

$$\forall \vec{w} \in E \quad \langle \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}, \vec{w} \rangle = \lambda \det(\text{Mat}(\vec{v}_1, \dots, \vec{x}, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w})) + \mu \det(\text{Mat}(\vec{v}_1, \dots, \vec{y}, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w})).$$

Mais par linéarité du produit scalaire e par définition de $\vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x} \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}$ et de $\vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{y} \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}$, aussi le vecteur $\lambda \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x} \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1} + \mu \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{y} \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}$ satisfait cette inégalité: donc ces deux vecteurs sont les mêmes.

Pour 2) nous remarquons que si $T(\sigma) = \left(\begin{array}{c|c} S(\sigma) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$ alors $\det(T(\sigma)) = \det(S(\sigma))$ et

$$\text{Mat}(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(n-1)}, \vec{w}) = \text{Mat}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w}) \cdot T(\sigma).$$

Cela implique que $\vec{v}_{\sigma(1)} \wedge \vec{v}_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \vec{v}_{\sigma(n-1)} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1} \cdot \det(S(\sigma))$. Enfin pour 3) puisque M est surjective on a que $\forall \vec{w} \exists \vec{w}' \in \mathcal{E}$ t.q. $\vec{w} = M \cdot \vec{w}'$. Mais alors le vecteur $(M \cdot \vec{v}_1) \wedge (M \cdot \vec{v}_2) \wedge \dots \wedge (M \cdot \vec{v}_{n-1})$ est par définition caractérisé par l'égalité:

$$\forall \vec{w}' \in E \det(\text{Mat}((M \cdot \vec{v}_1), (M \cdot \vec{v}_2), \dots, (M \cdot \vec{v}_{n-1}), M \cdot \vec{w}')) = \langle (M \cdot \vec{v}_1) \wedge (M \cdot \vec{v}_2) \wedge \dots \wedge (M \cdot \vec{v}_{n-1}), M \cdot \vec{w}' \rangle.$$

Mais nous remarquons aussi que l'on a :

$$\text{Mat}((M \cdot \vec{v}_1), (M \cdot \vec{v}_2), \dots, (M \cdot \vec{v}_{n-1}), M \cdot \vec{w}') = M \cdot \text{Mat}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w}')$$

et donc en passant aux déterminants et en utilisant le fait que puisque $M \in SO(n)$ alors $\det(M) = 1$ nous trouvons que le vecteur $(M \cdot \vec{v}_1) \wedge (M \cdot \vec{v}_2) \wedge \dots \wedge (M \cdot \vec{v}_{n-1})$ est aussi caractérisé par :

$$\forall \vec{w}' \in E \quad \det(\text{Mat}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w}')) = \langle (M \cdot \vec{v}_1) \wedge (M \cdot \vec{v}_2) \wedge \dots \wedge (M \cdot \vec{v}_{n-1}), M \cdot \vec{w}' \rangle.$$

Mais puisque $M \in SO(n)$ on peut appliquer M^{-1} à chaque'un des deux termes du coté droit sans changer la valeur du produit scalaire et nous obtenons : que le vecteur $M^{-1}((M \cdot \vec{v}_1) \wedge (M \cdot \vec{v}_2) \wedge \dots \wedge (M \cdot \vec{v}_{n-1}))$ est aussi caractérisé par :

$$\forall \vec{w}' \in E \quad \det(\text{Mat}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w}')) = \langle M^{-1}((M \cdot \vec{v}_1) \wedge (M \cdot \vec{v}_2) \wedge \dots \wedge (M \cdot \vec{v}_{n-1})), \vec{w}' \rangle.$$

Mais par définition cette égalité caractérise aussi le vecteur $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}$ et donc on a :

$$(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1}) = M^{-1}((M \cdot \vec{v}_1) \wedge (M \cdot \vec{v}_2) \wedge \dots \wedge (M \cdot \vec{v}_{n-1})).$$

6.19

6.3 Exercices sur les droites et plans affines en \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3

Exercice 64 (Vecteur perpendiculaire à un vecteur). Soit E un plan vectoriel euclidien orienté et \vec{e}_1, \vec{e}_2 une base orthonormale positive. Si les coordonnées d'un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ par rapport à cette base sont (v_x, v_y) écrire les coordonnées d'un vecteur non nul et orthogonal à \vec{v} .

Exercice 65 (Équation de la droite vectorielle dirigée par un vecteur). Soit E un plan vectoriel euclidien orienté et \vec{e}_1, \vec{e}_2 une base orthonormale positive. Si les coordonnées d'un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ par rapport à cette base sont (v_x, v_y) écrire une équation satisfaite par les coordonnées d'exactement tous les points de la droite dirigée par \vec{v} . Cette équation est elle unique ?

Exercice 66 (Équation de la droite vectorielle orthogonale à vecteur). Soit E un plan vectoriel euclidien orienté et \vec{e}_1, \vec{e}_2 une base orthonormale positive. Si les coordonnées d'un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ par rapport à cette base sont (v_x, v_y) écrire une équation satisfaite par les coordonnées d'exactement tous les points de la droite orthogonale à \vec{v} . Cette équation est elle unique ?

Exercice 67 (Rotation d'un système de repères : effet sur les coordonnées d'un vecteur). Soit E un plan vectoriel euclidien orienté et \vec{e}_1, \vec{e}_2 une base orthonormale positive. Si \vec{f}_1, \vec{f}_2 est la base orthonormale positive obtenue en appliquant une rotation d'angle θ à \vec{e}_1, \vec{e}_2 , c'est à dire $f_i = \text{rot}_\theta(e_i)$, et si les coordonnées d'un vecteur \vec{v} par rapport à la base \vec{e}_1, \vec{e}_2 sont (x, y) alors écrire les coordonnées de \vec{v} par rapport à \vec{f}_1, \vec{f}_2 .

Exercice 68 (Rotation d'un système de repères : effet sur l'équation d'une droite). Soit E un plan vectoriel euclidien orienté et \vec{e}_1, \vec{e}_2 une base orthonormale positive. Si \vec{f}_1, \vec{f}_2 est la base orthonormale positive obtenue en appliquant une rotation d'angle θ à \vec{e}_1, \vec{e}_2 , c'est à dire $f_i = \text{rot}_\theta(e_i)$, et si l'équation d'une droite vectorielle dans les coordonnées par rapport à la base \vec{e}_1, \vec{e}_2 est $ax + by = 0$ alors écrire une équation de la même droite dans les coordonnées par rapport à \vec{f}_1, \vec{f}_2 .

Exercice 69. Donné un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ et un point $P \in \mathbb{R}^2$ écrire une équation de la droite affine par P et dirigée par \vec{v} . Réciproquement si $P = (x_0, y_0)$ est un point de la droite d'équation $r : ax + by + c = 0$ alors donner une paramétrisation des points de r . (Rappel : une paramétrisation d'une droite affine est une écriture de la forme $r = \{P + \lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ pour un certain $\vec{v} \neq \vec{0}$).

Solution de l'exercice. L'équation d'une droite affine dans \mathbb{R}^2 est une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a^2 + b^2 > 0$; une telle équation identifie une droite affine comme l'ensemble de ses solutions :

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } ax + by + c = 0\}$$

Remarquons que si $ax + by + c = 0$ est l'équation de r alors toute autre équation de r est de la forme $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $P = (P_x, P_y)$ et $\vec{v} = (v_x, v_y)$ alors deux points de la droite affine $r = \{P + \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont P (correspondant à $\lambda = 0$) et $Q = P + \vec{v}$ (correspondant à $\lambda = 1$). Alors on cherche a, b, c , tels que le système suivant admette comme solutions P et Q :

$$\begin{cases} aP_x + bP_y + c = 0 \\ a(P_x + v_x) + b(P_y + v_y) + c = 0 \end{cases}$$

En prenant la différence entre les deux équations on voit donc qu'il doit valoir $av_x + bv_y = 0$ et donc que le vecteur de coordonnées $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ doit être orthogonal à \vec{v} . Par exemple nous pouvons prendre $(a, b) = (v_y, -v_x)$. Alors en remplaçant dans la première équation du système nous trouvons que $c = -(v_y P_x - v_x P_y)$. Réciproquement si $P = (x_0, y_0) \in r = \{(x, y) \text{ t.q. } ax + by + c = 0\}$, alors un vecteur orthogonal aux vecteurs qui dirigent r est le vecteur $\vec{w} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donc un vecteur qui dirige la droite est $\vec{v} = (b, -a)$ et donc une paramétrisation de r est :

$$r = \{P + \lambda(b, -a), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 70. Soient $P = (x_0, y_0)$ et $Q = (x_1, y_1)$ deux points de \mathbb{R}^2 , donner l'équation de la droite affine r qui passe par P et Q , ainsi qu'un vecteur qui la dirige et un vecteur qui dirige une droite orthogonale.

Si $R = (x_3, y_3)$ est un autre point dans \mathbb{R}^2 et $S = \pi(R) \in r$ est le projeté orthogonal de R sur r , prouver que le vecteur \vec{RS} est orthogonal à la droite r . Trouver S .

Après l'avoir fait en général, contrôlez vos résultats sur chacun des cas suivants :

$$P = (1, 1), Q = (1, 2), R = (1, 1); P = (1, 1), Q = (2, 3), R = (2, 1); P = (1, 1), Q = (2, 2), R = (-1, 0).$$

Solution de l'exercice. Pour trouver une équation il suffit de considérer un vecteur qui dirige la droite par P et Q , à l'occurrence $\vec{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, et appliquer l'exercice précédent. Une équation sera donc :

$$(y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y - ((y_1 - y_0)x_0 - (x_1 - x_0)y_0) = 0.$$

Exercice 71. En \mathbb{R}^3 donnés trois points $P = (x_0, y_0, z_0)$, $Q = (x_1, y_1, z_1)$ et $R = (x_3, y_3, z_3)$, donner l'équation du plan affine π qui passe par P, Q et R , ainsi qu'un vecteur qui dirige une droite orthogonale à ce plan. Donner aussi l'équation dans le plan π_{12} engendré par les vecteurs e_1, e_2 de la droite affine $\pi \cap \pi_{12}$ par ce plan (est-ce qu'il s'agit toujours d'une droite affine ? Sous quelles conditions elle ne l'est pas ?). Si π' est un autre plan, d'équation $kx + hy + lz = m$ trouver une paramétrisation de la droite $\pi' \cap \pi$ (et dire sous quelles conditions elle existe).

Solution de l'exercice. Une équation du plan π est une équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Une telle équation identifie le plan comme suit : $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } ax + by + cz + d = 0\}$. Elle n'est pas unique mais unique à multiplication par scalaire non nul près (comme dans le cas des droites dans \mathbb{R}^2). En imposant le passage par P, Q et R on obtient que a, b, c, d doivent satisfaire le système suivant :

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la deuxième et de la troisième on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0 \\ a(x_3 - x_0) + b(y_3 - y_0) + c(z_3 - z_0) = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations disent que le vecteur (a, b, c) doit être orthogonal à la fois au vecteur $\overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ et au vecteur $\overrightarrow{PR} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$. Les points P, Q et R ne sont pas alignés si et seulement si \overrightarrow{PQ} et \overrightarrow{PR} sont linéairement indépendants et donc, si P, Q, R ne sont pas alignés, (a, b, c) doit être un multiple scalaire de leur produit vectoriel (et ce vecteur, dirige donc une droite orthogonale à π). On peut donc prendre :

$$(a, b, c) = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}.$$

En remplaçant ces valeurs dans la première équation du système on trouve aussi la valeur de d .

Si P, Q, R sont alignés alors le plan π n'est pas unique; cela se voit aussi parce que les vecteurs \overrightarrow{PQ} et \overrightarrow{PR} sont colinéaires et leur produit vectoriel est donc nul : l'espace $(\text{Vect}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}))^\perp$ est de dimension 2. Dans ce cas on pourra donc prendre $(a, b, c) \in (\text{Vect}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}))^\perp$ quelconque et calculer d comme avant en imposant la première équation du système, mais, comme déjà dit, le plan π ne sera pas unique.

Exercice 72. Soit \mathbb{R}^2 vu comme plan affine; on appelle une "affinité" une transformation $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{v}$$

où $M \in GL(2; \mathbb{R})$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Remarquons que ϕ est une "translations de vecteur \vec{v} ssi $M = Id$. Un point fixé par ϕ est un point $P_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $\phi(P_1) = P_1$.

1. Montrer que ϕ est une isométrie du plan euclidien (muni de sa distance euclidienne) ssi $M \in O(2)$.
2. Montrer que si chaque valeur propre de M est différente de 1 alors il existe exactement un point $P_1 \in \mathbb{R}^2$ fixé par ϕ .
3. Donner un exemple d'affinité ϕ qui n'est pas une translation mais qui n'admet pas de points fixes.
4. Montrer que si $r \subset \mathbb{R}^2$ est une droite affine alors $\phi(r) \subset \mathbb{R}^2$ est une droite affine.
5. Montrer que si M a exactement une valeur propre égale à 1 alors soit ϕ n'a pas de points fixes, soit il existe une droite affine r formée par des points fixes de ϕ .
6. Soit

$$\phi(P) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{OP} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donner une équation de la droite affine formée par les points fixes de ϕ .

Solution.

1. ϕ est une isométrie ssi $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$ on a $d(P, Q) = d(\phi(P), \phi(Q))$ et donc $\|P - Q\| = \|\phi(P) - \phi(Q)\| = \|M(P - Q)\|$. Par l'arbitrarité de P et Q il faut donc que $\|M\vec{e}_1\|^2 = 1 = \|M\vec{e}_2\|^2$ mais aussi que

$$2 = \|M(e_1 - e_2)\|^2 = \langle M(e_1 - e_2), M(e_1 - e_2) \rangle = \|Me_1\|^2 + \|Me_2\|^2 - \langle Me_1, Me_2 \rangle \implies \langle Me_1, Me_2 \rangle = 0.$$

Donc ${}^tMM = Id$ et donc $M \in O(2)$.

2. Il s'agit de résoudre $M \cdot \overrightarrow{OP} + \vec{v} = \overrightarrow{OP}$ et donc $(M - Id)\overrightarrow{OP} = -\vec{v}$. Si M n'a pas de valeurs propres égales à 1 alors la matrice $M - Id$ est inversible et on a $\overrightarrow{OP} = (M - Id)^{-1}(-\vec{v})$ et cela est la seule solution de notre équation. Alors le point fixe cherché est $O + \overrightarrow{OP}$.

3. D'après le point précédent, il suffit de chercher parmi les ϕ dont la partie linéaire a une valeur propre égale à 1. Soit par exemple $\phi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{OP} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un point fixe resolverait

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mais cela est impossible.

4. Si M a une valeur propre égale à 1 (et l'autre différente de 1) alors la matrice $M - Id$ a un noyau de dimension 1 (engendré par le vecteur propre \vec{v}_1 de M de valeur propre 1) et image de dimension 1. On trouve une solution à l'équation $(M - Id)\vec{OP} = \vec{v}$ ssi $\vec{v} \in Im(M - Id)$. Si donc cela n'est pas le cas, alors ϕ n'a pas de points fixes. Si par contre elle en a 1, disons P , alors tout autre point de la forme $P + c\vec{v}_1$ est encore fixé par ϕ .

5. Si $P = (x, y)$ on a le système

$$4x + 4y - 2 = x \text{ et } \frac{-3x}{2} - y + 1 = y$$

et donc $2y = -\frac{3x}{2} + 1$ et en remplaçant dans la première équation on trouve $x = x$ ce qui nous donne une infinité de solutions (comme voulu). L'équation cherchée est donc $\frac{3x}{2} + 2y - 1 = 0$.

Exercice 73. Soient $P_0 = (1, 1, 0)$, $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (0, 0, 2)$ et $Q = (1, 1, 1)$ des points de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer qu'il existe un et un seul plan affine π qui contient P_0, P_1 et P_2 . Soit F le plan vectoriel qui dirige π .
2. Trouver deux vecteurs \vec{v}_1, \vec{v}_2 qui dirigent le plan vectoriel F .
3. Donner un vecteur $\vec{v}_3 \neq \vec{0}$ orthogonal au plan vectoriel F et ayant norme 1.
4. Écrire une équation de π .
5. Décomposer le vecteur $\vec{P_0Q}$ en la forme $\vec{x} + c\vec{v}_3$ avec $\vec{x} \in F$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit $Q' = P_0 + \vec{x}$.
6. Montrer que $Q' \in \pi$, que pour tout point $Y \in \pi$ on a $d(Q, Y) \geq d(Q, Q')$ (où d est la distance euclidienne) et qu'on a l'égalité ssi $Y = Q'$. La distance de Q à π est alors définie comme $d(Q, Q')$ et Q' est la projection orthogonale de Q sur π .

Soit maintenant $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à un point de coordonnées (x, y, z) associe $ax + by + cz + d$ avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et soit π_2 le plan affine d'équation $f(x, y, z) = 0$. Soient aussi P un point de π_2 et R un point quelconque de \mathbb{R}^3 .

7. Montrer que le vecteur $\vec{v} = (a, b, c)$ est orthogonale à π et a norme 1.
8. Montrer qu'on a $\langle \vec{PR}, \vec{v} \rangle = f(R)$. En conclure que $d(R, \pi_2) = |f(R)|$.
9. Trouver le point R' qui est l'image de R par la réflexion orthogonale par rapport au plan π_2 .

Solution

1. Les vecteurs $\vec{P_0P_1} = (0, -1, 1)$ et $\vec{P_1P_2} = (-1, -1, 2)$ ne sont pas colinéaires donc il existe exactement un plan affine par P_0, P_1, P_2 .
2. Le plan F est dirigé par $\vec{v}_1 = \vec{P_0P_1} = (0, -1, 1)$ et $\vec{v}_2 = \vec{P_1P_2} = (-1, -1, 2)$.
3. $\vec{v}_3 = \frac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|} = \frac{(-1, -1, -1)}{\sqrt{3}}$.
4. On a déjà le vecteur orthogonal à F et donc l'équation cherchée sera de la forme $-\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z + d = 0$. En imposant que le plan passe par P_0 on a $d = 2\frac{1}{\sqrt{3}}$.
5. On a $\vec{P_0Q} = (0, 0, 1)$ et $\langle \vec{P_0Q}, \vec{v}_3 \rangle = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. En tenant compte du fait que $\|\vec{v}_3\| = 1$ on a alors que $\vec{P_0Q} = \frac{-1}{\sqrt{3}}\vec{v}_3 + \vec{x}$, et donc $\vec{x} = (0, 0, 1) + \frac{1}{3}(-1, -1, -1) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. On a alors $Q' = (1, 1, 0) + (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
6. On a $d(Q, Y) = \sqrt{\langle \vec{QY}, \vec{QY} \rangle}$ et par construction $\vec{QQ'} \in F^\perp$. Mais alors si $Y \neq Q'$ on a $\vec{QY} = \vec{QQ'} + \vec{Q'Y}$ qui sont deux vecteurs orthogonaux (car $\vec{Q'Y} \in F$) et donc $\|\vec{QY}\|^2 = \|\vec{QQ'}\|^2 + \|\vec{Q'Y}\|^2 > \|\vec{QQ'}\|^2$.
7. Le vecteur cherché est $\vec{v} = (a, b, c)$: en effet si P et P' sont deux points de π_2 alors le vecteur $\vec{PP'}$ satisfait l'équation $\langle \vec{v}, \vec{PP'} \rangle = 0$ car par construction on a $\langle \vec{v}, \vec{OP} \rangle = -d = \langle \vec{v}, \vec{OP'} \rangle$.
8. Si O est l'origine de \mathbb{R}^3 on a $\langle \vec{PR}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{OR} - \vec{OP}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{OR}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{OP}, \vec{v} \rangle = (f(R) - d) - (-d) = f(R)$. En décomposant \vec{PR} en $\langle \vec{v}, \vec{PR} \rangle \vec{v} + \vec{x}$ pour un certain $\vec{x} \in F$ on trouve que la distance de R à π_2 est $\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{PR} \rangle^2} = |\langle \vec{v}, \vec{PR} \rangle| = |f(R)|$.

9. Si R' est le point cherché il doit valoir $\|\overrightarrow{RR'}\| = 2d(R, \pi_2) = 2|f(R)|$ et $\overrightarrow{RR'} = \lambda \vec{v}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais alors on a aussi $\langle \overrightarrow{PR'}, \vec{v} \rangle = -f(R)$ et donc $R' = R - 2f(R)\vec{v}$.

6.4 Les groupes diédraux

Soit E un plan euclidien et $P_n \subset E$ un polygone régulier i.e. la donnée de vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ distincts tous ayant la même norme (non nulle) et tels que $\overrightarrow{v_i v_{i+1}} = \frac{2\pi}{n}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ (où si $i = n$ nous entendons l'angle entre \vec{v}_n et \vec{v}_1).

Définition 6.20 (Les groupes diédraux). *Le sous ensemble D_n de $O(E)$ formé par les isométries qui préservent P_n est dit le $n^{\text{ème}}$ groupe diédral. Il contient exactement $2n$ éléments, et il n'est pas commutatif.*

Exercice 74. *Montrer qu'il existe deux éléments $r, s \in D_n$ tels que $s^2 = 1$, $sr s^{-1} = r^{-1}$ et $r^n = 1$ et tout élément de D_n s'écrit sous la forme $s^\epsilon r^a$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$ et $a \in \{0, \dots, n-1\}$. En particulier montrer que D_n n'est pas commutatif.*

Exercice 75. *Montrer que si s, r sont deux matrices carrées de taille 2×2 telles que $r \neq Id$, $s^2 = Id$, $sr s^{-1} = r^{-1}$ et $r^n = Id$ alors $\det(s) < 0$.*

6.5 Radians, degrés, grades

Jusqu'à présent nous avons parlé des mesures des angles en termes de multiples de π , c'est à dire nous avons mesuré les angles en *radians*. Cependant, dans la pratique on utilise parfois d'autres unités de mesure pour les angles.

Définition 6.21 (Degré sexagésimal). *Un degré sexagésimal est la mesure d'un angle dont la mesure en radians est $\frac{\pi}{180}$ (c'est à dire $1^\circ = \frac{2\pi}{360}$).*

Exercice 76. *Si on mesure la largeur moyenne de l'angle formé par un fuseau horaire de la terre, quelle valeur on obtient en radians ? Et en degrés ?*

Définition 6.22 (Grade centesimal). *Un grade centesimal (symbole **gr**) est la mesure d'un angle dont la mesure en radians est $\frac{\pi}{200}$ (c'est à dire $1\text{gr} = \frac{2\pi}{400}$).*

Exercice 77. *Effectuer la conversion des angles suivants dans toutes les autres unités de mesure :*

$$15\text{gr}, \frac{\pi}{10}, 20^\circ, 30^\circ, \frac{\pi}{3}, 50\text{gr}, 150\text{gr}.$$

6.6 Projections orthogonales et réflexions

Définition 6.23 (Projecteurs et projecteurs orthogonaux). *Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Une application linéaire $f : V \rightarrow V$ est un "projecteur" si $f^2 = f$. Si V est muni d'un produit scalaire on dit que f est un projecteur orthogonal si en plus $\ker(f) = \text{Im}(f)^\perp$; dans ce cas on appelle aussi f la "projection orthogonale sur le sous-espace $F = \text{Im}(f)$ " et on la note π_F .*

Remarquons que pour tout sous-espace vectoriel F de E il existe le projecteur orthogonal π_F : en effet il est suffisant de remarquer que $E = F \oplus F^\perp$ et que si donc on écrit un vecteur $\vec{v} \in E$ quelconque comme $\vec{v} = \vec{v}_F + \vec{v}_{F^\perp}$ (avec $\vec{v}_F \in F$ et $\vec{v}_{F^\perp} \in F^\perp$) alors peut définir $\pi_F(\vec{v}) = \vec{v}_F$. Plus explicitement, si $\vec{f}_i, i = 1, \dots, m$ est une base orthogonale de F alors nous pouvons définir $\pi_F(\vec{v}) = \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{f}_i \rangle \vec{f}_i$. Il est simple de prouver que $\pi_F \circ \pi_F = \pi_F$ et que son noyau est formé exactement par F^\perp :

Lemme 6.24. 1. $\pi_F \circ \pi_F = \pi_F$ et $\text{Im}(\pi_F) = F$.

2. $\ker(\pi_F) = F^\perp$.

3. Si $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$ est une autre base orthonormale de F alors $\pi_F(\vec{v}) = \sum_i \langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$ (c'est à dire le projecteur défini π_F ne dépend pas du choix d'une base orthonormale sur F).

Démonstration. D'abord il est clair que $Im(\pi_F) \subset F$ car par définition $\pi_F(\vec{v}) \in Vect(f_1, \dots, f_m) = F$; de plus $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ on a $\pi_F(f_k) = \sum_{i=1}^m \langle \vec{f}_k, \vec{f}_i \rangle \vec{f}_i = f_k$ donc $F \subset Im(\pi_F)$; donc $Im(\pi_F) = F$. De plus

$$\forall \vec{v} \in E, \pi_F(\pi_F(\vec{v})) = \pi_F \left(\sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{f}_i \rangle \vec{f}_i \right) = \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{f}_i \rangle \pi_F(\vec{f}_i) = \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{f}_i \rangle \vec{f}_i$$

(où dans le deuxième passage nous avons utilisé la linéarité de π_F et dans le troisième le fait que $\pi_F(f_k) = f_k, \forall k \in \{1, \dots, m\}$).

Il est clair que $F^\perp \subset \ker \pi_F$ car si $\vec{v} \in F^\perp$ alors $\pi_F(\vec{v}) = \vec{0}$ car $\langle \vec{v}, \vec{f}_i \rangle = 0, \forall i$. Réciproquement si $\langle \vec{v}, \vec{f}_i \rangle = 0, \forall i$ alors $\forall \vec{w} \in F$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \sum_i \lambda_i \vec{f}_i$ (car f_1, \dots, f_m est une base de F) et donc

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \sum_i \lambda_i \vec{f}_i \rangle = \sum_i \lambda_i \langle \vec{v}, \vec{f}_i \rangle = 0$$

et donc $\vec{v} \in F^\perp$. Donc $\ker \pi_F \subset F^\perp$ et par la double inclusion on a $\ker \pi_F = F^\perp$.

Par les deux points précédents nous avons que $\dim Im(\pi_F) = m = \dim F$ et donc $\dim \ker \pi_F = n - m$ (où $n = \dim E$). De plus $\ker \pi_F \cap F = \{\vec{0}\}$ car si $\vec{v} \in \ker \pi_F \cap F$ alors $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \pi_F(\vec{v}) \rangle = 0$ (parce que $\pi_F|_F = Id_F$) et le produit scalaire est défini positif. Alors $E = F \oplus F^\perp$ et $\pi_F = Id_F \oplus 0|_{F^\perp}$. Cette expression de π_F ne dépend pas du choix d'une base de F et donc le dernier énoncé est déjà prouvé. Nous en donnons cependant une autre preuve directe : si $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$ est une autre base orthonormale de F alors $\forall i, \vec{f}_i = \sum_j m_{j,i} \vec{e}_j$ où $m_{j,i}$ sont les entrées de la matrice de passage $M = Mat_{\{\vec{f}_i\}, \{\vec{e}_j\}}(Id)$. On sait que puisque $\{\vec{e}_j\}$ et $\{\vec{f}_i\}$ sont bases orthonormales alors $M \in O(m)$ et donc $M^{-1} = {}^t M$. Alors on a :

$$\pi_F(\vec{v}) = \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{f}_i \rangle \vec{f}_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \langle \vec{v}, \vec{f}_i \rangle m_{j,i} \vec{e}_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle \vec{v}, m_{k,i} \vec{e}_k \rangle m_{j,i} \vec{e}_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle m_{j,i} {}^t m_{i,k} \vec{e}_j = \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle (M {}^t M)_{j,k} \vec{e}_j = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle \delta_{j,k} \vec{e}_j = \sum_{j=1}^m \langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j. \quad (4)$$

Cela montre que le choix de la base orthonormale pour l'expression de π_F n'influ pas sur l'application linéaire résultante.

6.24

Exercice 78. Écrire un exemple de projecteur. Écrire un exemple de projecteur orthogonal. Écrire un exemple de projecteur non orthogonal.

Exercice 79. Prouver que les seuls valeurs propres possibles pour un projecteur sont 0 et 1.

Exercice 80. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul et soit F l'espace vectoriel (de dimension 1 !) engendré par \vec{v} et $\pi_F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le projecteur orthogonal sur F . Montrer que pour tout $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\pi_F(\vec{w}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}.$$

Exercice 81. Soit E un espace euclidien de dimension n et $F \subset E$ un sous espace vectoriel de dimension $m \leq n$. Prouver que l'endomorphisme $\pi_F + \pi_{F^\perp} = Id_E$.

Définition 6.25 (Refléxion orthogonale par rapport à un sous-espace). Soit E un espace euclidien de dimension n et $F \subset E$ un sous espace vectoriel de dimension $m \leq n$. La refléxion orthogonale par rapport à F est l'endomorphisme s_F défini par $s_F(\vec{v}) = \pi_F(\vec{v}) - \pi_{F^\perp}(\vec{v})$.

Exercice 82. Prouver que $s_F \in O(E)$.

Exercice 83. Si $V = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire standard, et $\vec{v} = (a, b)$ écrire la matrice qui exprime le projecteur orthogonal $\pi_F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sur la droite engendrée par \vec{v} .

Exercice 84. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et soit $\pi_F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le projecteur orthogonal sur F . Montrer que $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on a que $\vec{v} - \pi_F(\vec{v}) \in F^\perp$.

Exercice 85. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et soit $\pi_F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le projecteur orthogonal sur F . Montrer que $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on a que

$$\inf\{d(\vec{v}, \vec{w}) \mid \vec{w} \in F\} = d(\vec{v}, \pi_F(\vec{v})).$$

Exercice 86. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et soit $\pi_F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le projecteur orthogonal sur F . Montrer que $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ on a $d(\vec{v}, \vec{w}) \geq d(\pi_F(\vec{v}), \pi_F(\vec{w}))$.

Exercice 87. Avec la notation de la Définition 6.25, montrer que $s_F \in SO(E)$ si et seulement si $n - m$ est pair.

6.7 A propos de \mathbb{R}^3

Rappelons que nous avons défini le produit vectoriel de $n - 1$ vecteurs en \mathbb{R}^n , et qu'en particulier, pour $n = 3$ on a :

Lemme 6.26 (Produit vectoriel de \mathbb{R}^3). Soient $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Leur produit vectoriel est le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique sont :

$$(\vec{v} \wedge \vec{w})_1 = v_2 w_3 - v_3 w_2, (\vec{v} \wedge \vec{w})_2 = v_3 w_1 - v_1 w_3, (\vec{v} \wedge \vec{w})_3 = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

De façon géométrique il est le vecteur qui est orthogonal au plan par \vec{v}, \vec{w} , a comme norme $\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin(\alpha)$ (où α est l'angle formé par \vec{v} et \vec{w}) et tel que si on place le pouce de la main droite sur \vec{v} et l'indice sur \vec{w} alors le majeur pointe dans la direction de $\vec{v} \wedge \vec{w}$ (cette dernière condition peut être formulée de façon équivalente par "la matrice dont la première colonne est \vec{v} , la deuxième est \vec{w} et la troisième $\vec{v} \wedge \vec{w}$ a déterminant positif").

Exercice 88. Écrire une équation du plan vectoriel de dimension 2 orthogonal à un vecteur \vec{v} . Puis écrire une équation du plan vectoriel de dimension 2 qui est engendré par deux vecteurs \vec{v}_1, \vec{v}_2 .

Exercice 89. Soit $F \subset \mathbb{R}^3$ un plan vectoriel de dimension 2 et $\vec{v} \in F^\perp \setminus \{\vec{0}\}$. Prouver que le projecteur sur F est

$$\pi_F(\vec{w}) = \vec{w} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}.$$

Exercice 90. Soit $F \subset \mathbb{R}^3$ un plan vectoriel de dimension 2 et $\vec{v} \in F^\perp \setminus \{\vec{0}\}$. Prouver que la réflexion orthogonale par rapport au plan F est

$$s_F(\vec{w}) = \vec{w} - 2 \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}.$$

Exercice 91. Soit $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Écrire les matrices qui représentent le projecteur sur \vec{v}^\perp et la réflexion par rapport à \vec{v}^\perp .

Exercice 92 (Équation d'une droite vectorielle dans \mathbb{R}^3). Soit \vec{v} un vecteur et \vec{v}_1, \vec{v}_2 deux vecteurs qui engendrent \vec{v}^\perp . Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(\vec{x}) = (\langle \vec{x}, \vec{v}_1 \rangle, \langle \vec{x}, \vec{v}_2 \rangle)$. Montrer qu'une équation de la droite vectorielle dirigée par \vec{v} est $f(\vec{x}) = (0, 0)$.

Théorème 6.27 (Le théorème d'Euler pour les rotations de \mathbb{R}^3). Toute isométrie directe de \mathbb{R}^3 est une rotation autour d'un axe.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé que les isométries directes de \mathbb{R}^n s'expriment exactement par les matrices de $SO(n)$. Il s'agit donc de montrer qu'il y a un vecteur \vec{v} fixe par rapport à M car si c'est le cas alors l'espace des vecteurs orthogonaux à \vec{v} sera préservé et donc M restreinte à cet espace est une isométrie positive de \mathbb{R}^2 , qu'on a déjà montré être une rotation. On a $\det(M) = \det(M^{-1}) = 1$ et $M^{-1} = M^t$ et donc :

$$\det(M - I) = \det(M(I - M^{-1})) = \det(M) \det(I - M^t) = \det(M - I)(-1)^3 \implies \det(M - I) = 0.$$

Mais alors 1 est une valeur propre de M et donc il existe un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tel que $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$: c'est l'axe de la rotation!

6.27

Corollaire 6.28. *Puisque si $A, B \in SO(3)$ alors aussi $AB \in SO(3)$ on en déduit donc que la composition de deux rotations est encore une rotation (peut-être autour d'un troisième axe!).*

Remarque 6.29. *Attention : $SO(3)$ est bien formé de rotations mais, différemment de $SO(2)$, il n'est pas commutatif!*

7 Le plan complexe, exp, cos, sin et π

Dans la section précédente nous avons librement utilisé les fonctions cos et sin ainsi que le nombre π . Mais qu'est-ce que π ? Probablement la première définition qu'on a envie de citer est "le rapport entre la demi-circonférence d'un cercle et son rayon". Mais il y a un problème avec cette définition (qui est correcte, après tout) : comment mesure-t-on la longueur de la demi-circonférence d'un cercle, puisqu'elle n'est pas une union de segments? En effet pour donner un sens rigoureux à cette définition il faut définir ce qu'est un chemin rectifiable dans le plan et sa longueur. Puis il faut effectivement calculer cette longueur pour la demi-circonférence et montrer que le rapport avec le rayon ne dépend pas de la demi-circonférence choisie. C'est possible, mais ça demande un certain travail analytique non trivial.

Une autre possibilité, que nous allons explorer en cette section, est de définir π comme "le double du plus petit nombre réel positif x tel que $\cos(x) = 0$ ". Cela nous ramène à un autre problème : qui est cos? Si nous prenons le cercle trigonométrique, et nous considérons les angles et les coordonnées x et y des points sur ce cercle nous allons retomber sur le problème de définir π ; réfléchissez-y : pourquoi l'angle plat devrait-il être π ?

Alors nous allons d'abord définir $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$ et de l'utiliser pour définir cos et sin (on peut aussi les définir directement mais ça vaut le coût de passer par exp). Nous allons faire maintenant, par le biais d'une longue liste d'exercices.

Soit E un plan euclidien réel orienté et soit $\vec{v} \in E$ un vecteur de norme 1. Nous pouvons compléter \vec{v} à une base positive orthonormale (\vec{v}, \vec{v}^\perp) . **Avec le choix de cette base** nous pouvons identifier E au plan des nombres complexes en assignant à \vec{v} le nombre 1 et à \vec{v}^\perp le nombre i et puis en étendant par linéarité cette application. Cela nous identifie donc E à \mathbb{C} . Mais attention :

1. Pour effectuer cette identification nous avons eu besoin d'une base orthonormale.
2. \mathbb{C} est beaucoup plus qu'un espace vectoriel euclidien de dimension 2. Il est un **corps commutatif** qui en plus est **algebriquement clos**. (En effet dans un espace vectoriel il n'a en général pas de sens de multiplier deux vecteurs entre eux pour obtenir un autre vecteur!) Nous ne rappellerons pas ces notions ici : allez les revoir dans vos cours d'algèbre précédents.

Nous allons utiliser à plusieurs reprises le suivant critère de d'Alembert :

Lemme 7.1 (Critère de d'Alembert). Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \ell < 1$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolument.

Définition 7.2 (Fonction exp). La fonction exponentielle est la fonction $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad (5)$$

où nous rappelons que $n! = \prod_{j=1}^n j$ et $0! = 1$.

Exercice 93. Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$ la série qui définit $\exp(z)$ est absolument convergente.

Exercice 94 (Théorème du binôme de Newton). Soient x, y nombres complexes quelconques et $n \in \mathbb{N}$. Prouver qu'on a : $(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$ où nous rappelons que $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ et $n! = \prod_{j=1}^n j$ et $0! = 1$.

Exercice 95 (\exp est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ en (\mathbb{C}^*, \cdot)). Soient x, y nombres complexes quelconques. Montrer qu'on a $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$. Conclure que $\exp(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

Exercice 96. Montrer que $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$. En conclure que si $\Re(z) = 0$ alors $\|\exp(z)\| = 1$.

Définition 7.3 (cos, sin, cosh, sinh). On définit :

$$\begin{aligned} \cos(z) &:= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, & \sin(z) &:= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \\ \cosh(z) &:= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}, & \sinh(z) &:= \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 97. Montrer que les fonctions \cos, \sin, \cosh et \sinh sont définies sur tout \mathbb{C} et qu'on a :

$$\cos(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

En particulier conclure que la restriction des fonctions \cos et \sin à \mathbb{R} donne des fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 98 (Formules de base de la trigonométrie). Soit $\zeta \in \mathbb{C}$. Montrer qu'on a $\exp(i\zeta) = \cos(\zeta) + i \sin(\zeta)$. En conclure que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ et $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$. Conclure aussi que $\forall \theta \in \mathbb{R}$ on a $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$.

Exercice 99 (Formule de de Moivre). Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$.

Exercice 100. Soit $C_n := \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^j}{(2j)!} 2^{2j}$. Montrer que C_n est une suite décroissante. En conclure que $\cos(2) < 0$.

Exercice 101. Soit $Z = \{x \in \mathbb{R}_{>0} \mid \cos(x) = 0\}$. Montrer qu'il existe $\min(Z) \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice. Nous devons montrer que $\inf(Z) \in Z$. Tout d'abord remarquons que Z est non-vide car $\cos(0) = 1$ et $\cos(2) < 0$ et \cos est une fonction continue donc pour le théorème de Bolzano il existe un zéro de \cos dans l'intervalle $[0, 2]$. Maintenant remarquons que Z est fermé car la fonction \cos est continue donc pour tout $y \in \mathbb{R}$ la préimage de y par \cos est un fermé : $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \cos(\theta) = y\}$ est fermé. En particulier aussi $Z = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \cos(\theta) = 0\} \cap \{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \geq 0\}$ est fermé. Mais alors si on prend une suite de points en Z qui tend vers $\inf(Z)$ cette suite converge en \mathbb{R} à $\inf(Z)$ et donc $\inf(Z) \in Z$ parce que Z est fermé.

Définition 7.4 (Définition de π). Soit Z comme dans l'exercice précédent. Nous définissons π comme $\pi \doteq 2 \min(Z)$.

Exercice 102. Montrer que $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$; en conclure que la restriction de $\cos(x)$ à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ est une bijection continue entre l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et l'intervalle $[0, 1]$.

Solution de l'exercice. La première égalité vient du fait que $\cos(x)$ est une série de puissance absolument convergente et donc sa dérivée est la série de puissance dérivée, que l'on voit rapidement être celle de $-\sin(x)$. De façon similaire on a la seconde égalité. Mais alors puisque $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ sur l'intervalle $]0, \pi/2[$ et $\sin(0) = 0$ alors $\sin(x) > 0$ sur cet intervalle et donc \cos est strictement décroissante sur le même intervalle. Mais alors elle donne une bijection entre $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $[0, 1]$.

Exercice 103. Montrer qu'on a $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$, $e^{i\pi} + 1 = 0$ (c'est ce qu'on appelle la "formule d'Euler"), et encore $\exp(i\frac{3\pi}{2}) = -i$, $\exp(2i\pi) = 1$, $\exp(\frac{i\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. En général montrer qu'on a $\exp(z + 2\pi i k) = \exp(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 104. Montrer que la restriction de $\exp(ix)$ à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ est une bijection continue entre l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et l'arc de cercle de rayon 1 compris entre 1 et i et inclus dans le premier secteur. En conclure que la restriction de $\exp(ix)$ à l'intervalle $[0, 2\pi[$ est une bijection continue entre l'intervalle $[0, 2\pi[$ et le cercle de centre 0 et rayon 1.

Exercice 105. Dans cet exercice nous allons montrer comment récupérer la définition de π comme rapport entre la demi-circonférence et le rayon en partant de ce qui précède.

1. Montrer qu'une paramétrisation de la demi-circonférence de centre 0 et rayon R est $c(t) := (R\cos(t), R\sin(t))$, $t \in [0, \pi]$. (C'est à dire pourquoi cette application est surjective ? Pourquoi est-elle injective ?)
2. Rappelons que si $c(t) = (x(t), y(t))$ est une courbe plane paramétrée, avec $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 , alors sa longueur est définie comme $\ell(c) := \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. Montrer que la longueur de la demi-circonférence de centre 0 et rayon R est πR .

3. En conclure que la Définition 7.4 est équivalente à “ π est le rapport entre la longueur d’une demi-circonférence et son rayon”.

Proposition 7.5 (Division euclidienne de polynômes). Soient $P_1(z)$ et $P_2(z)$ deux polynômes à coefficients en \mathbb{C} . Il existe un et un seul couple $(Q(z), R(z))$ de polynômes à coefficients complexes, appelés respectivement le quotient et le reste de la division de P_1 par P_2 , tel que :

1. $\deg(R(z)) < \deg(P_2(z))$
2. $P_1(z) = Q(z)P_2(z) + R(z)$.

Exercice 106. Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients complexes et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$. Prouver qu’alors le polynôme $(z - z_0)$ divise $P(z)$ (ce que l’on note $(z - z_0) \mid P(z)$), c’est à dire qu’il existe un polynôme $Q(z)$ à coefficients complexes tel que $P(z) = Q(z)(z - z_0)$.

Exercice 107. Prouver qu’un polynôme de degré n a au plus n racines complexes distinctes.

En effet le suivant est vrai :

Théorème 7.6 (Théorème fondamental de l’algèbre). Si $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ est un polynôme à coefficients complexes de degré n alors $P(z) = a_n \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ où $z_j \in \mathbb{C}$ (possiblement non distincts) sont toutes et seules les racines de $P(z)$.

Exercice 108 (Racines de l’unité). Soit $n \geq 1$ un entier. Prouver que les solutions de l’équation $z^n = 1$ en \mathbb{C} sont exactement $\{\exp(i \frac{2\pi k}{n}) \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$. Montrer que ces solutions sont les sommets d’un n -gone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique et ayant 1 parmi ses sommets.

8 Rappels de géométrie euclidienne classique

Avant de nous lancer dans les feuilles de TP basées sur le logiciel Geogebra, rappelons nous quelques notions de base de géométrie euclidienne classique. Nous accepterons la notion de point, droite, segment, cercle et demi-plan dans le plan. Deux droites sont parallèles si elles sont disjointes. Un angle est la portion du plan délimitée par deux demi-droites partant du même sommet. Il est convexe si pour tout points A, B dans l'angle, il contient aussi le segment \overline{AB} ; autrement il est concave. La somme de deux angles convexes disjoints délimités respectivement par d, d' et d', d'' est l'angle délimité par d, d'' et contenant d' . Un angle plat est celui délimité par deux demi-droites dont l'union est une droite. Deux angles sont supplémentaires si leur somme est un angle plat (noté π en radians et 180° en degrés). Un angle rectangle est celui congruent à son supplémentaire (noté $\frac{\pi}{2}$ en radians et 90° en degrés).

Nous rappelons que les 5 axiomes d'Euclide disent que par deux points quelconque il existe une et une seule droite, que pour tout segment on peut tracer un cercle ayant le centre une des extrémités du segment et rayon le segment, que deux angles droits quelconques sont congruents (voir dessous). Mais surtout que si deux droites r et r' intersectent une troisième droite s en formant des angles intérieurs du même coté de s dont la somme est moins que deux angles droits alors $r \cap r' \neq \{\emptyset\}$ (ça c'est le 5^{ème} axiome d'Euclide).

Une figure est un sous ensemble du plan, typiquement elle sera une union de segments, arcs de cercles et droites.

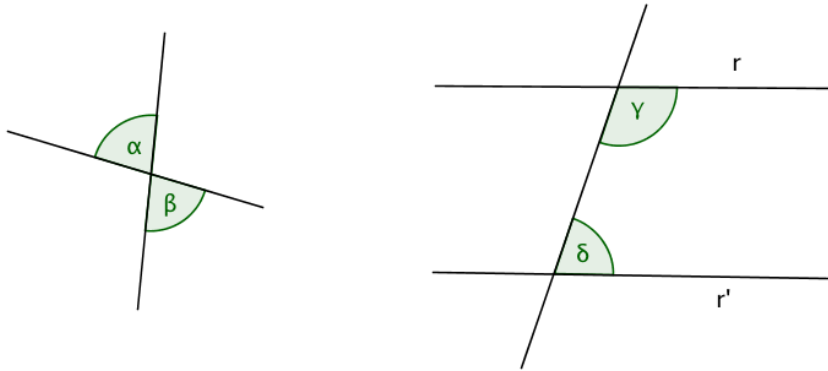
On dit que deux figures F et F' sont *congruentes* ou *isométriques* (noté $F \equiv F'$) si on peut transporter rigidement l'une sur l'autre. Donc F' est le résultat d'une suite de translations, rotations et symétries le long d'une droite appliquées à F . (Remarquez qu'en acceptant cette notion, vous acceptez implicitement l'existence d'un ensemble de transformations du plan dites "congruences" ou "isométries", dont par exemple les rotations, les translations et les réflexions par rapport à un axe : bien que cela soit très intuitif, il faudrait axiomatiser correctement cela).

Un triangle est l'union de trois segments non alignés $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$. Il est isocèle si deux de ces segments sont congruents; équilatéral si tous les trois le sont. Il est rectangle si un des angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ est rectangle. La hauteur de ABC par rapport à AB est la droite h passant par C et orthogonale à celle qui contient A, B ; son pied est son intersection avec la droite par A et B . La médiatrice de \overline{AB} est l'ensemble de points C tels que $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. La médiane de \overline{AB} est la droite par C et le milieu de \overline{AB} . La bissectrice d'un angle est la droite qui divise l'angle en deux angles congruents.

Si \overline{AB} et \overline{CD} sont deux segments, leur concatenation est le segment $\overline{AD'}$ où D' est le point de la droite par A et B tel que $\overline{BD'} \equiv \overline{CD}$ et $\overline{AB} \cap \overline{BD'} = \{B\}$. Si \overline{AB} est un segment et $n \in \mathbb{N}$ alors le segment $n\overline{AB}$ est défini par récurrence en cocaténant $(n-1)\overline{AB}$ et \overline{AB} (si $n = 1$ il est \overline{AB}). On note $\overline{AB} > \overline{CD}$ (resp. $\overline{AB} < \overline{CD}$) si \overline{AB} est congruent à un segment qui contient (resp. est contenu dans) \overline{CD} . On dit que deux paires de segments $\overline{AB}, \overline{CD}$ et $\overline{A'B'}, \overline{C'D'}$ "ont le même rapport" (noté $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$) si pour tout entiers m, n on a $m\overline{AB} > n\overline{CD}$ ssi $m\overline{A'B'} > n\overline{C'D'}$, ainsi que l'on a $m\overline{AB} = n\overline{CD}$ ssi $m\overline{A'B'} = n\overline{C'D'}$ et encore $m\overline{AB} < n\overline{CD}$ ssi $m\overline{A'B'} < n\overline{C'D'}$. Deux triangles A, B, C et A', B', C' sont *semblables* si $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$.

Nous utiliserons très souvent le suivant :

Lemme 8.1. Dans la figure ci dessous, en supposant que $r \parallel r'$ on a $\alpha \equiv \beta$ et $\gamma + \delta = \pi$.



Démonstration. Les angles α et β sont supplémentaires du même angle, donc égaux. Pour le deuxième dessin, si par l'absurde $\gamma + \delta < \pi$ (l'angle plat) alors par le 5^{ème} axiome les droites r, r' s'intersecteraient, ce qu'on a supposé faux. Du coup $\delta + \gamma \geq \pi$. Si l'inégalité vaut, alors pour la même raison r, r' s'intersectent de l'autre coté et donc ne sont pas parallèles. Donc on a l'égalité. 8.1

Exercice 109. En utilisant le lemme précédent prouver que la somme des angles intérieurs d'un triangle est l'angle plat.

Mais aussi les suivants "critères de congruence des triangles" :

Lemme 8.2 (Critères de congruence des triangles). Soient A, B, C et A', B', C' deux triangles alors ils sont congruents si et seulement si une des suivantes est vérifiée :

1. $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ et $C\hat{A}B \equiv C'\hat{A}'B'$.
2. $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ et $C\hat{A}B \equiv C'\hat{A}'B', C\hat{B}A \equiv C'\hat{B}'A'$.
3. $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ et $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.

Un autre théorème fondamental est celui de Thalès :

Théorème 8.3 (Thalès). Si un ensemble de droites parallèles est coupé par deux transversales, alors les segments déterminés sur une transversale sont proportionnels aux correspondants segments de l'autre transversale.

Une *similitude* est une bijection h du plan en soit telle que pour tout A, B, C, D les segments \overline{AB} et \overline{CD} sont dans le même rapport que $h(\overline{AB})$ et $h(\overline{CD})$. Deux triangles sont semblables s'il existe une similitude qui transforme l'un dans l'autre. Qui est à la base de la preuve des suivants critères de similitude :

Lemme 8.4 (Critères de similitude des triangles). *Soient A, B, C et A', B', C' deux triangles alors ils sont semblable si et seulement si une des suivantes est vérifiée :*

1. $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}, \widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$ et $\widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}$.

2. $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ et $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$.

3. Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$.

On rappelle qu'un parallélogramme est un quadrilatère $ABCD$ tel que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ et ils sont parallèles. Alors on a :

Lemme 8.5. *L'intersection de AC et BD est leur milieux. De plus $\overline{AD} = \overline{BC}$ et ils sont parallèles.*

Démonstration. Soit O le milieu de \overline{AC} . Alors les triangles AOB et OCD sont congruents car ils ont $OA \equiv OC$ (par construction), $CD \equiv AB$ (par hypothèse) et $\widehat{DCO} \equiv \widehat{OAB}$ car AB et CD sont parallèles (Lemme 8). Mais alors on a aussi $\widehat{CÔD} = \widehat{BÔA}$ et les points BDO sont alignés et que $OD = OB$. Cela prouve le premier énoncé. Pour le deuxième il suffit maintenant de remarquer que les triangles AOD et BCO sont congruents car $AO = OC, BO = DO$ et $\widehat{AÔD} = \widehat{BÔC}$: cela montre que donc $AD = BC$. Pour prouver qu'ils sont parallèles nous remarquons qu'ils forment angles supplémentaires avec la droite BD .

8.5

9 Feuille de TP Numéro 1 : Géométrie euclidienne avec Geogebra

La droite d'Euler

Ouvrir un browser web et accéder à la version en ligne de Géogebra à l'adresse :

<http://web.geogebra.org/app/#geometry>

1. Tracer trois points A, B, C distincts quelconques. Puis tracer les segments $\overline{AB}, \overline{AC}$ et \overline{BC} .
2. Tracer les médiatrices des segments $\overline{AB}, \overline{AC}$ et \overline{BC} . Appeler O leur intersection commune, et colorier la lettre O en rouge.
3. Constater (en bougeant A, B, C) que O existe toujours. Prouver (sur un cahier!) que O existe toujours.
4. Tracer le cercle de centre O et rayon \overline{OA} . Constater qu'il passe aussi par B et C . Pourquoi? Quel est le nom de O ?
5. Rendre transparentes les médiatrices construites avant et créer un outil correspondant à O : il doit rendre le point O donné trois points A, B, C .
6. Tracer les milieux des segments $\overline{BC}, \overline{AC}$ et \overline{AB} respectivement. Puis tracer les droites qui les relient aux sommets opposés du triangle ABC et constater qu'elles s'intersectent en un point G que l'on coloriera en rouge. Comment appelle-t-on G ? Créer un outil pour obtenir G en partant de trois points.
7. Prouver (sur un cahier!) que G existe toujours. (Aide : En travaillant en coordonnées par rapport à l'origine o , on pourra remarquer que si G est el point tel que $\vec{oG} = \frac{\vec{oA} + \vec{oB} + \vec{oC}}{3}$ alors on a que le point $A + \frac{3}{2}\vec{AG}$ est le milieu de \overline{BC} et donc G est sur la médiane de \overline{BC} et raisonner de façon similaire pour les autres segments.)
8. Bouger A, B, C et observer le comportement de O et de G : que remarquez-vous? Savez-vous expliquer cela?
9. Tracer les droites perpendiculaires aux segments $\overline{AB}, \overline{AC}$ et \overline{BC} et passant respectivement par C, B et A . Appeler H leur intersection commune, colorier-le en rouge et créer un outil pour le calculer à partir de A, B, C . Comment appelle-t-on H ?
10. Prouver que H existe toujours. Un aide : tracer les droites par A, B, C parallèles respectivement à $\overline{BC}, \overline{AC}$ et \overline{AB} ; elles formes un nouveau triangle; que sont les hauteurs de A, B, C pour ce nouveaux triangle?
11. Bouger A, B, C : que constatez vous?
12. Créer les segments HG et GO et en visualiser la longueur. Que constatez-vous en bougeant A, B et C ? L'objet que vous venez de découvrir s'appelle la *droite d'Euler*.
13. Créer un texte dynamique (outil "ABC") qui visualise le rapport entre les longueurs \overline{GH} et \overline{GO} . Pour ce faire vous pouvez écrire un texte entre guillemets et le concaténer (à l'aide du symbole +) à une formule comme (GH/DG) .
14. Soit maintenant O le point construit avant et définissez un nouveau point, $H2$ par $\vec{OH2} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ (utiliser la case "saisie"). Que remarquez-vous?
15. Prouver que $H2 = H$. (Aide : montrer que la droite par A et $H2$ est parallèle à la médiatrice de \overline{BC} en trouvant un vecteur qui la dirige. Raisonner de façon similaire en échangeant les rôles de A, B et C pour conclure.)
16. En utilisant le fait que $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ et que $\vec{oG} = \frac{\vec{oA} + \vec{oB} + \vec{oC}}{3}$ montrer que l'on a $\vec{OH} = 3\vec{OG}$. En conclure que la droite d'Euler existe et que le rapport entre \overline{GH} et \overline{GO} est bien 2. (Attention : le point o est l'origine du système de repère initial et O est le circocentre de ABC .)

A la fin de la séance enregistrez votre travail sur geogebra et envoyez-le sous forme de fichier .ggb à : francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Esquisse des solutions 2-4). Rappelons que la médiatrice d'un segment \overline{AB} est l'ensemble des points C tels que $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. Soit maintenant $m(AB)$ la perpendiculaire au segment \overline{AB} en son milieu M ; rappelons que sa construction se fait en construisant d'abord deux cercles ayant le même rayon et centres A et B respectivement. Si leur rayon est $> \overline{AB}$ leurs intersections seront alors deux points sur la médiatrice et on pourra alors la tracer. Mais puisque $m(\overline{AB})$ et la médiatrice de \overline{AB} contiennent ces deux points elles coïncident. Donc nous avons une autre caractérisation de la médiatrice d'un segment comme la perpendiculaire au segment en son milieu. Nous utiliserons cela librement dorenavant. Soit $O = m(AB) \cap m(AC)$. Alors on a $\overline{OA} = \overline{OB}$ mais aussi $\overline{OA} = \overline{OC}$ et donc O est aussi sur la médiatrice de \overline{BC} . Donc les trois droites s'intersectent. En plus les égalités $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ montrent que le cercle de centre O et rayon \overline{AB} passe par A, B, C . O est dit le centre du cercle circonscrit à ABC .

6-8). Le point G ainsi construit s'appelle centre de gravité ou barycentre. La preuve vectorielle proposée est la suivante : soit G le point caractérisé par $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$ alors

$$A + \frac{3}{2} \overrightarrow{AG} = A + \frac{3}{2} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG}) = A + \frac{3}{2} \left(\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} - \overrightarrow{OA} \right) = A + \left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} \right) = A + \frac{\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})}{2} = A + \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = A + \overrightarrow{AM} = M$$

où M est le milieu de \overline{BC} . Donc on a que G est sur la droite par A et M . En raisonnant de façon analogue en permutant A, B, C on a que G est aussi sur les droites par B et le milieu de \overline{AC} et par C et le milieu de \overline{BA} . On remarque que G est toujours à l'intérieur de ABC .

9-10) Tracer les parallèles à AB, BC, AC respectivement par C, A, B . Alors si on appelle A' le point d'intersection entre les parallèles à AB et AC , B' le point d'intersection entre les parallèles à AB et BC et C' le point d'intersection entre les parallèles à AC et BC on peut remarquer que $A'B'C'$ est semblable à ABC (car ils ont les mêmes angles) et il en est exactement le double (car par exemple les triangles $C'AB$ et $A'BC$ sont congruents à ACB et donc $\overline{C'B} \equiv \overline{BA'} \equiv \overline{AC}$ et donc $\overline{A'C'} = 2\overline{AC}$). Mais alors les hauteurs de ABC sont aussi les médianes de $A'B'C'$ et donc le point H cherché est aussi le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$: on a déjà prouvé qu'il existe.

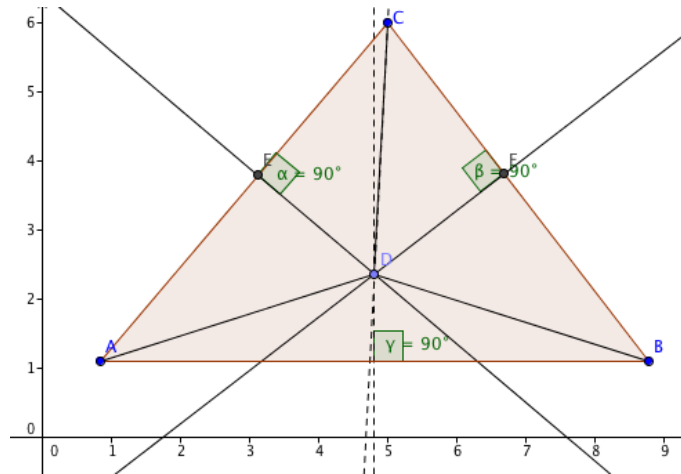
15) Nous donnons une preuve vectorielle car plus simple. Naturellement il existe une preuve de tous les énoncés de la feuille purement euclidienne. Le lecteur intéressé la trouvera facilement sur les principaux volumes sur la géométrie euclidienne ainsi qu'en ligne. Soit H_2 comme dans le texte. Alors on a : $\overrightarrow{AH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Mais ce vecteur dirige la médiatrice de \overline{BC} car O appartient à cette médiatrice : en effet la symétrie axiale par rapport à la médiatrice de \overline{BC} échange B et C et ne bouge pas O donc ce vecteur est invariant par cette symétrie et donc est sur la médiatrice. En raisonnant de façon analogue pour les autres points on a que H_2 est sur les trois hauteurs du triangle et donc il coïncide avec H .

16) On a $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OH}$. Mais alors $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$.

10 Feuille de TP Numéro 2 : Géométrie euclidienne avec Geogebra (2^{ème} partie)

Une fausse preuve

Soit ABC un triangle quelconque. Nous allons ici prouver qu'il est isocèle en C (i.e. que $\overline{AC} = \overline{BC}$). Cherchez la faute d'abord sur votre cahier et puis testez votre réponse par géogebra.



1. Soit D le point à l'intérieur du triangle ABC formé par l'intersection entre la médiatrice de AB et la bissectrice de l'angle \widehat{ACB} et soient E et F respectivement les projections de D sur AC et BC .
2. Prouver que les triangles rectangles CDE et CDF sont congruents. (Par construction ils ont combien d'angles égaux?) En particulier $\overline{DE} = \overline{DF}$.
3. Prouver que $\overline{AD} = \overline{DB}$.
4. Prouver qu'alors les triangles ADE et BDF sont congruents. En particulier $\overline{AE} = \overline{BF}$.
5. Conclure du point 2) que $CE = CF$ et, avec le point 4) que $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Le cercle d'euler

1. Tracer un triangle ABC et son barycentre G son orthocentre H et le centre de son cercle circonscrit O . La dernière fois nous avons montré que $\vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{GH}$. (la droite d'Euler).
2. Tracer les milieux A', B', C' des cotés BC, AC, AB respectivement.
3. Tracer les milieux A_2, B_2, C_2 des segments HA, HB, HC respectivement.
4. Tracer les pieds des hauteurs du triangles H_1, H_2, H_3 .
5. Que remarquez-vous sur les 9 dernier points que vous venez de tracer ?
6. Qui est le centre du cercle E que vous venez d'observer ?
7. Nous allons maintenant montrer que 6 des neuf points sont effectivement sur le cercle d'Euler. Commencer en prouvant que le triangle $OB'G$ et le triangle GHB sont semblables (quel est le rapport de similitude ?)
8. Soit E le centre du parallélogramme $OB'HB_2$. En tirer que $\overline{EB_2} = \overline{EB'}$.
9. Prouver que $2\overline{EB_2} = \overline{OB}$ et en conclure qu'alors $\overline{EA_2} = \overline{EB_2} = \overline{EC_2}$.

10. Repeter l'argument du point 8) pour en conclure qu'alors on a aussi $\overline{EA'} = \overline{EB'} = \overline{EC'} = \overline{EA2} = \overline{EB2} = \overline{EC2}$.

Quelques théorèmes classiques sur les cercles.

1. Tracer un cercle c de centre O et une corde \overline{AB} de c . Tracer un point $C \in c$ et calculer les angles \widehat{ACB} et \widehat{AOB} . Que remarquez-vous ? Prouver votre remarque sur un cahier.
2. Tracer un quatrième point $D \in c$ de sorte que $ABCD$ soit un quadrilatère inscrit dans c . Calculer la somme des angles opposés. Que remarquez-vous ? Prouver votre remarque.
3. Effacer les dessins précédents. Tracer un triangle ABC et points $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{AC}$, $G \in \overline{AB}$. Soit c le cercle par A, F, G , d celui par B, E, G et e celui par C, E, F . Que remarquez-vous ? Prouvez votre remarque. (C'est le Théorème des trois cercles de Miquel).
4. Effacer les dessins précédents. Tracer un cercle c et un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans c . Soient c_1, c_2, c_3, c_4 des cercles différents de c et contenant respectivement $\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}$ et $\{D, A\}$. Soit $E = c_1 \cap c_2 \setminus \{B\}$, $F = c_2 \cap c_3 \setminus \{C\}$, $G = c_3 \cap c_4 \setminus \{D\}$, $H = c_4 \cap c_1 \setminus \{A\}$. Que remarquez vous ? Sauriez-vous prouver cette remarque ? (C'est le théorème des quatre cercles de Miquel).
5. Soient maintenant $E = AB \cap CD$ et $F = AC \cap BD$ (où on note AB la droite par A et B etc.). Tracer les cercles par EAD, EBC, FAB, FCD . Que remarquez-vous ? Il s'agit du théorème du pivot de Miquel. Sauriez-vous le prouver ? (Aide : Appelez O le point d'intersection entre les cercle par EAD et FAB différent de A . Alors on a $\widehat{AOD} = \widehat{AED}$ et donc O appartient aussi au cercle par EBC car...)
6. Dans le dessin précédent observer les centres des 4 cercles construits. Que remarquez-vous ?

Esquisse de solution. Fausse preuve : le point D n'est jamais à l'intérieur du triangle.

Cercle d'Euler. 7). On a $B'\hat{G}O = H\hat{G}B$ (car ils sont opposés), $\frac{BG}{GB'} = 2$ car G est le barycentre de ABC et aussi $\frac{GH}{OG} = 2$ car on avait déjà prouvé cela dans la feuille précédente. Alors les deux triangles sont semblables par le deuxième critère et leur rapport est 2.

8-9) Alors on a $\overline{HB2} = \overline{HB'}$ et donc $HB2OB'$ est un parallélogramme. Du coup l'intersection de ses diagonales (E) est le milieu des diagonales et donc de \overline{OH} et $EB' = EB2$. En appliquant le même raisonnement en échangeant le rôle de A, B, C on trouve que le milieu de OH est aussi le milieu de $A'A2$ et de $C'C2$.

Il ne reste qu'à prouver que $EA' \equiv EB' \equiv EC'$. A cet effet, remarquons que le triangle $EHB2$ est semblable à OHB et le rapport est $\frac{1}{2}$. Du coup on a que $2\overline{EB2} = \overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC}$ (car O est l'intersection des médiatrices de ABC). Mais alors on a aussi $\overline{EB'} \equiv \overline{EB2} \equiv \overline{EA2} \equiv \overline{EA'} \equiv \overline{EC2} \equiv \overline{EC'}$: ce qu'il fallait démontrer.

Théorèmes sur les cercles.

1) et 2). Si C est du même côté que le centre O du cercle par rapport à la droite AB alors il y a deux cas : soit le triangle ABC contient O soit il ne le contient pas. Nous traitons le premier cas et nous laissons le deuxième au lecteur. Les triangles AOC et BOC sont isocèles donc les angles $A\hat{C}O$ et $B\hat{C}O$ sont égaux à $C\hat{A}O$ et $C\hat{B}O$ respectivement. En utilisant le fait que la somme des angles d'un triangle est π on a alors

$$\pi = 2A\hat{C}O + 2B\hat{C}O + 2O\hat{A}B = 2(A\hat{C}O + B\hat{C}O) + (\pi - A\hat{O}B) = 2A\hat{C}B + (\pi - A\hat{O}B) \implies A\hat{O}B = 2A\hat{C}B.$$

Cela montre aussi que l'angle en C ne dépend pas du choix de C sur la circonférence.

Si C est du côté opposé de la droite AB par rapport à O alors soit D l'opposé de C par rapport à O . Par le point précédent $A\hat{D}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$. Les angles $C\hat{A}D$ et $C\hat{B}D$ sont rectangles (car la preuve précédente marche aussi dans ce cas). Cela permet alors de conclure que $A\hat{C}B = A\hat{C}D + D\hat{C}B = \pi/2 - A\hat{D}C + \pi/2 - C\hat{D}B = \pi - A\hat{D}B$.

Les points précédents montrent que les points d'un cercle ayant AB comme corde eqt qui sont du même côté de AB sont tels que $A\hat{C}B$ est constant. Réciproquement on peut prouver que les points C tels que $A\hat{C}B = \alpha$ et qui sont d'un côté de la droite AB (pour $\alpha \in]0, \pi[$ fixé) forment un arc de cercle. Une idée de preuve est la suivante : soit C un point tel que $A\hat{C}B = \alpha$ et soit c le cercle tel que les points dans c voient AB sous un angle de α . Si C n'appartient pas à c alors la droite AC doit intersecter le cercle c en un autre point C' mais alors les angles $B\hat{C}C'$ et $BC'C = \alpha$ devraient être supplémentaires ce qui est impossible. Donc $C \in c$.

Nous avons donc esquissé une preuve du suivant :

Proposition 10.1 (Critère d'inscriptibilité des quadrilatères). *Un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle ssi $A\hat{B}C + C\hat{D}A = \pi$.*

Nous allons l'utiliser plusieurs fois dans ce qui suit.

3). Soit D le point d'intersection des cercles par AFG et par BFE . Alors les quadrilatères $AFDG$ et $BFDE$ sont inscriptibles et donc $G\hat{D}F = \pi - C\hat{A}B$ et $E\hat{D}G = \pi - C\hat{B}A$. Mais alors l'angle $G\hat{D}E = 2\pi - G\hat{D}F - E\hat{D}G = C\hat{B}A + C\hat{A}B = \pi - A\hat{C}B$ et donc le quadrilatère $CEFD$ est inscriptible. Alors le cercle qui l'inscrit passe par CEF et par D .

4) Il s'agit d'appliquer cinq fois le critère d'inscriptibilité des quadrilatères...

Feuille TP 3. : Le théorème d'Euler sur les rotations 3D et l'inversion du plan

La théorème d'Euler sur les rotations en 3D.

1. A l'aide de l'outil algèbre de Geogebra, introduire un curseur α et la matrice $R_z(\alpha)$ de rotation d'angle α autour de l'axe z dans \mathbb{R}^3 .
2. Puis introduire un curseur β et la matrice $S_x(\beta)$ de rotation d'angle β autour de l'axe des x .
3. Calculer $S_x(\beta) \cdot R_z(\alpha)$. Qu'est-ce que représente cette matrice ?
4. Calculer le déterminant de $S_x(\beta) \cdot R_z(\alpha)$.
5. En utilisant le logiciel, montrer qu'il existe un vecteur \vec{v} tel que $S_x(\beta) \cdot R_z(\alpha) \vec{v} = \vec{v}$. (Aide : il vous faut utiliser vos connaissances d'algèbres linéaires : la matrice $S_x(\beta) \cdot R_z(\alpha) - Id$ doit avoir un noyau donc...)
6. En acceptant le point précédent, en tirer que la matrice $S_x(\beta) \cdot R_z(\alpha)$ est encore une rotation autour d'un axe.
7. En utilisant la section Graphique 3D du logiciel, visualiser l'image des trois axes par la matrice $S_x(\beta) \cdot R_z(\alpha)$.

Une transformation du plan

1. Dessiner trois points dans le plan, A, B, C . Avec l'outil vecteur, créer les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .
2. En utilisant la ligne de commande créer le vecteur $\vec{X} = \vec{AC} \frac{\text{Longueur}(\vec{AB})}{\text{Longueur}(\vec{AC})} \frac{\text{Longueur}(\vec{AB})}{\text{Longueur}(\vec{AC})}$.
3. Créer un outil qui donnés A, B, C rend le point $A + \vec{X}$. Appeller cet outil i .
4. Dessiner une droite r dans le plan et tracer plusieurs points P_j sur la droite (au moins 5 points distincts). Puis appliquer l'outil i aux triplets A, B, P_j .
5. Bouger A et B et si nécessaire les points P_j . Sauriez-vous dire quelle est l'image de r par l'application $P \rightarrow i(A, B, P)$? (Rappel : l'image d'un ensemble r par une application f est l'ensemble $f(r) := \{f(x) | x \in r\}$).
6. Sauriez-vous prouver votre idée ? (Il pourrait être utile de commencer par la droite perpendiculaire en B à \overline{AB})
7. Tracer un cercle dans le plan et puis plusieurs points Q_j sur ce cercle. Puis tracer les points $i(A, B, Q_j)$. Sauriez-vous dire qui est l'image du cercle par l'application $x \rightarrow i(A, B, x)$?
8. Prouvez votre conjecture à l'aide de la géométrie analytique (c'est à dire si vous le souhaitez vous pouvez utiliser des coordonnées cartésiennes dans le plan).

11 Feuille de TP 2 : les transformations du plan complexe

1. Dessiner un nombre complexe z_1 et trois lignes brisées A, B, C, D, E, F puis A, C, D, G et enfin H, D, E, I comme dans la Figure 1. Ajouter un second graphique (par le biais du menu affichage). Nous allons visualiser l'action de différentes transformations du plan complexe $z \rightarrow f(z)$ (Géogebra identifie automatiquement \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} grace au choix d'un système de repères cartésien).

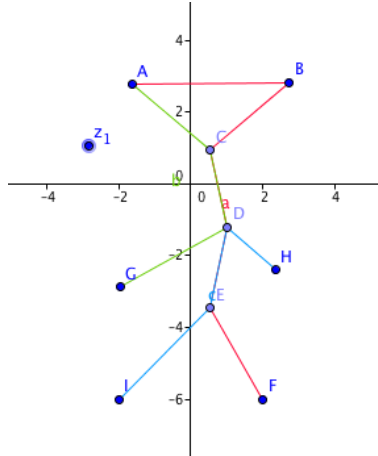


FIGURE 1 – Ce dessin est composé de trois lignes brisées différentes que nous avons coloré en trois couleurs différentes.

2. Tracer points J, K, L appartenant respectivement à la ligne brisée par A, B, C, D, E, F , à celle par A, C, D, G et enfin à celle par H, D, E, I . Définir $J_1 = z_1 J$, $K_1 = z_1 K$ et $L_1 = z_1 L$.
3. En utilisant l'outil "lieu" tracer l'image de la figure 1 par la transformation $z \rightarrow z_1 z$. Puis en éditant les trois lieux ainsi obtenus, les visualiser sur le second graphique et en rouge. Quel est l'effet de la transformation $z \rightarrow z_1 z$? Sauriez-vous le prouver?
4. Définir maintenant $J_2 = z_1 / J$, $K_2 = z_1 / K$ et $L_2 = z_1 / L$, puis tracer les lieux correspondants (comme avant) en bleu dans le graphique de droite. Sauriez-vous dire quelle est l'image d'une droite par l'application $z \rightarrow z_1 / z$? Sauriez-vous prouver votre conjecture pour la droite $x = 1$ lorsque $z_1 = 1$?
5. Maintenant créer quatre curseurs a, b, c, d à valeurs complexes et dessiner l'image par l'application $z \rightarrow f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ du dessin. Les transformations de cette forme sont les "homographies" ou "transformations de Moebius". Prouver qu'une telle $f(z)$ réalise une bijection entre $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. Quelle est l'image d'une droite par une homographie?
6. Dorenavant nous allons nous intéresser à d'autres transformations du plan complexe. Pour simplifier les analyses nous allons maintenant effacer tous les dessins précédents, et nous allons dessiner un polygône régulier à n sommets où $n \geq 3$ est un entier que l'on peut choisir à l'aide d'un curseur. Introduire un deuxième curseur entier $m \geq 1$ et dessiner l'image du polygône régulier par l'application $z \rightarrow z^m$. Si A, B sont les premiers deux points du polygône pour $n = 4$ et on place A en l'origine et B sur l'axe réel, que remarquez-vous lorsque l'on change m ?
7. Répéter les étapes précédentes pour dessiner le lieu image par l'application $z \rightarrow e^z$. Quel est l'image par cette application d'une droite vectorielle?
8. Fixer $n = 4$ et changer m ou bien changer la fonction $f(z) = z^m$ en la fonction $f(z) = \exp(z)$ ou encore $f(z) = \cos(z)$. Pour tout point de l'image des quatre sommets du polygone effectuer un agrandissement autour du point. Que remarquez-vous? Sauriez-vous prouver ce que vous remarquez?
9. Maintenant choisissez une fonction $f(z)$ (à vous de la choisir!). Sous-quelle condition votre remarque précédente reste valide?

Cours de Géométrie L3 MEEF Feuille TD
Formes bilinéaires et produits scalaires

Exercice 110. Soit $V = \mathbb{R}^2$ et b la forme bilinéaire qui dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est représentée par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dire si b est une forme symétrique. Soient $\vec{v}_i, i = 1, 2$ comme suit :

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dire si \vec{v}_1, \vec{v}_2 forment une base de V et, dans le cas positif, écrire la matrice qui exprime la forme bilinéaire b dans cette base. Dire si b est un produit scalaire.

Exercice 111. Soit $V = \mathbb{R}^2$ et b la forme bilinéaire qui dans la base canonique est décrite par la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dire si b est une forme symétrique et dans ce cas si elle est non-dégénérée et encore si elle est définie positive. Trouver une base orthogonale \vec{v}_1, \vec{v}_2 pour b puis écrire la matrice Q' qui exprime b dans cette nouvelle base. Peut-on trouver une base orthonormale? Quelle est la signature de b ? Écrire la matrice de passage de la base \vec{e}_i à la base \vec{v}_i puis vérifier que $Q' = P^t Q P$.

Exercice 112. Soit $V = \mathbb{R}^3$ et b la forme bilinéaire qui dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est représentée par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 2 \\ 10 & 9 & -5 \\ 2 & -5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Dire si b est une forme symétrique. Soient $\vec{v}_i, i = 1, 2, 3$ comme suit :

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dire si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_3$ forment une base de V et, dans le cas positif, écrire la matrice qui exprime la forme bilinéaire b dans cette base. Dire si b est un produit scalaire; dans le cas positif, trouver une base orthonormale pour b . Quelle est l'expression de b dans cette nouvelle base?

Exercice 113. Soit $V = \mathbb{R}^3$ et b la forme bilinéaire qui dans la base canonique est décrite par la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dire si b est une forme symétrique et dans ce cas si elle est non-dégénérée et encore si elle est définie positive. Trouver une base orthogonale $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_3$ pour b puis écrire la matrice Q' qui exprime b dans cette nouvelle base. Peut-on trouver une base orthonormale? Quelle est la signature de b ? Écrire la matrice de passage de la base \vec{e}_i à la base \vec{v}_i puis vérifier que $Q' = P^t Q P$.

Exercice 114. Donner un exemple de forme bilinéaire non-dégénérée qui admet un vecteur isotrope.

Solution de l'exercice. Par exemple soit $V = \mathbb{R}^2$ et b la forme bilinéaire symétrique non dégénérée qui dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est représentée par

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors le vecteur $(1, 1)$ est isotrope (mais b est bien non dégénérée car $\det Q \neq 0$ et symétrique car ${}^t Q = Q$).

Exercice 115. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel V de dimension n . Prouver que si b est non dégénérée et $\vec{v} \in V$ est tel que $b(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$ alors la restriction de b à $(\vec{v})^\perp$ est non dégénérée.

Solution de l'exercice. L'application linéaire $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(\vec{w}) = b(\vec{v}, \vec{w})$ est non nulle car $f(\vec{v}) \neq 0$ par hypothèse. Alors son image est tout \mathbb{R} et donc a dimension 1 et donc son noyau, qui est exactement \vec{v}^\perp , a dimension $n - 1$. Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$ une base de \vec{v}^\perp . Alors $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}$ sont une base de V (prouver cela par exercice en montrant qu'ils sont linéairement indépendants) et dans cette base la forme bilinéaire est représentée par une matrice de la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & b(\vec{v}, \vec{v}) \end{pmatrix}.$$

où $Q' \in \text{Mat}_{n-1, n-1}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique. Puisque par hypothèse b n'est pas dégénérée alors $\det(Q) \neq 0$ et donc, puisque $\det(Q) = \det(Q')b(\vec{v}, \vec{v})$ et $b(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$ alors $\det(Q') \neq 0$. Mais Q' représente exactement la restriction de b au sous-espace \vec{v}^\perp .

Exercice 116. Soit V un espace vectoriel de dimension n et b une forme bilinéaire symétrique sur V . Montrer que si $\forall \vec{v} \in V$ on a $b(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ alors b est la forme bilinéaire nulle (c'est à dire $b(\vec{v}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{v}, \vec{w}$).

Solution de l'exercice. Comme vu en classe : si $b(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \forall \vec{v} \in V$ alors on a $b(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) = 0, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ et donc

$$0 = b(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) = b(\vec{v}, \vec{v}) + 2b(\vec{v}, \vec{w}) + b(\vec{w}, \vec{w}) = 0 + 2b(\vec{v}, \vec{w}) + 0, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V.$$

Exercice 117. Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et b une forme bilinéaire symétrique sur V .

1. Montrer que si $U \subseteq W \subseteq V$ sont deux sous-espaces vectoriels alors $W^\perp \subseteq U^\perp$.
2. Montrer que si $U \subseteq V$ est un sous-espace vectoriel alors $U \subseteq (U^\perp)^\perp$.
3. Si $V = \mathbb{R}^2$ trouver un exemple de b et de $U \subset V$ tels que $U^\perp = U$. (Aide : essayer avec une forme bilinéaire symétrique représentée par une matrice diagonale dans la base canonique de \mathbb{R}^2).
4. Trouver un exemple de (V, b) et de U tels que $U \subsetneq (U^\perp)^\perp$ (Aide : essayer avec une forme bilinéaire symétrique dégénérée b sur $V = \mathbb{R}^2$).
5. Montrer que si $U, W \subset V$ sont deux sous-espaces vectoriels alors $(\text{Vect}(U, W))^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

Solution de l'exercice. 1. Par définition on a $U^\perp = \{\vec{v} \in V \text{ t. q. } \forall \vec{u} \in U, b(\vec{v}, \vec{u}) = 0\}$; de façon similaire $W^\perp = \{\vec{x} \in V \text{ t. q. } \forall \vec{w} \in W, b(\vec{x}, \vec{w}) = 0\}$. Mais alors si $U \subset W$ on a $W^\perp \subset U^\perp$ car si \vec{x} est tel que $b(\vec{x}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{w} \in W$ alors il est d'autant plus vrai que $b(\vec{x}, \vec{u}) = 0, \forall \vec{u} \in U$.

2. Par définition on a $U^\perp = \{\vec{v} \in V \text{ t. q. } \forall \vec{u} \in U, b(\vec{v}, \vec{u}) = 0\}$; de façon similaire $(U^\perp)^\perp = \{\vec{x} \in V \text{ t. q. } \forall \vec{w} \in U^\perp, b(\vec{x}, \vec{w}) = 0\}$. Mais alors si $\vec{x} \in U$ on a que $\forall \vec{w} \in U^\perp, b(\vec{w}, \vec{x}) = 0$ (par définition de U^\perp) et donc, puisque b est symétrique aussi que $b(\vec{x}, \vec{w}) = 0 \forall \vec{w} \in U^\perp$ donc $\vec{x} \in (U^\perp)^\perp$.

3. Par exemple b la forme bilinéaire symétrique non dégénérée qui dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est représentée par

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $U = \{(\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4. Par exemple b la forme bilinéaire symétrique dégénérée qui dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est représentée par

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $U = \{(0, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$: remarquer que $U^\perp = \mathbb{R}^2$.

5. Par définition on a $U^\perp = \{\vec{v} \in V \text{ t.q. } \forall \vec{u} \in U, b(\vec{v}, \vec{u}) = 0\}$; de façon similaire $W^\perp = \{\vec{x} \in V \text{ t.q. } \forall \vec{w} \in W, b(\vec{x}, \vec{w}) = 0\}$. Par définition de "Vect" on a que $\text{Vect}(U, W) = \{\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{v} \in U, \vec{w} \in W\}$. Si $\vec{x} \in U^\perp \cap W^\perp$ alors $b(\vec{x}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda b(\vec{x}, \vec{v}) + \mu b(\vec{x}, \vec{w}) = 0 + 0 = 0, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{v} \in U, \vec{w} \in W$, donc $x \in (\text{Vect}(U, W))^\perp$. Réciproquement si $\vec{x} \in (\text{Vect}(U, W))^\perp$ alors $b(\vec{x}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w},) = 0, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{v} \in U, \vec{w} \in W$ et notamment en prenant $\lambda = 1, \mu = 0$ nous obtenons que $b(\vec{x}, \vec{v}) = 0 \forall \vec{v} \in U$ et donc $\vec{x} \in U^\perp$. De façon similaire en prenant $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ on a que $b(\vec{x}, \vec{w}) = 0 \forall \vec{w} \in W$ et donc $\vec{x} \in W^\perp$. Donc $x \in U^\perp \cap W^\perp$. Alors on a que $U^\perp \cap W^\perp \subset (\text{Vect}(U, W))^\perp$ et $(\text{Vect}(U, W))^\perp \subset U^\perp \cap W^\perp$ et donc l'égalité.

Exercice 118. Trouver la signature de la forme bilinéaire b sur \mathbb{R}^3 qui est exprimée dans la base canonique par la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 119. Soit b un produit scalaire sur \mathbb{R}^n et soit Q la matrice qui exprime b dans la base canonique. Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ deux bases b -orthogonales de \mathbb{R}^n et soit X la matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{w}_i\}$. Montrer qu'on a $X^t X = Id$. (Aide : écrire les matrices de passage P_1 (resp. P_2) de la base canonique à $\{\vec{v}_i\}$ (resp. $\{\vec{w}_i\}$), puis écrire les équation qu'elles satisfont.)

Exercice 120 (Un exemple du théorème spectral). Soit

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

Trouver vecteurs propres \vec{v}_1 et \vec{v}_2 de M ayant norme (par rapport au produit scalaire standard) 1 et leur valeurs propres respectives. Montrer que la matrice R dont les colonnes sont \vec{v}_1 et \vec{v}_2 satisfait $R^t \cdot R = Id$ et que, à moins de remplacer \vec{v}_2 par $-\vec{v}_2$ elle a déterminant 1. R est une rotation de quel angle ?

Exercice 121 (Un autre exemple du théorème spectral). Soit

$$M := \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Trouver vecteurs propres $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ de M ayant norme (par rapport au produit scalaire standard) 1 et leur valeurs propres respectives. Montrer que la matrice R dont les colonnes sont \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 satisfait

$$R^t \cdot R = Id$$

et que, à moins de remplacer \vec{v}_3 par $-\vec{v}_3$ elle a déterminant 1. R est une rotation autour de quel axe ?

Références

- [1] Arnaudiès, Delezoide, Freysse - *Exercices résolus du cours d'algèbre*.
- [2] Audin, - *Géométrie*
- [3] Godement, - *Algèbre*.
- [4] Gourdon, - *Les maths en tête : algèbre*.