12 Rappels de géométrie euclidienne classique

Avant de nous lancer dans les feuilles de TP basées sur le logiciel Geogebra, rappelons nous quelques notions de base de géométrie euclidienne classique. Nous accepterons la notion de point, droite, segment, cercle et demi-plan dans le plan. Deux droites sont parallèles si elles sont disjointes. Un angle est la portion du plan délimitée par deux demi-droites partant du même sommet. Il est convexe si pour tout ponts A, B dans l'angle, il contient aussi le segment $\overline{AB}$; autrement il est concave. La somme de deux angles convexes disjoints délimités respectivement par d, d' et $d'd''$ est l'angle délimité par d, d'' et contenant d'. Un angle plat est celui délimité par deux demi-droites dont l'union est une droite. Deux angles sont supplémentaires si leur somme est un angle plat (noté π en radians et 180° en degrés). Un angle rectangle est celui congruent à son supplémentaire (noté $\frac{\pi}{2}$ en radians et 90° en degrés).

Nous rappelons que les 5 axiomes d'Euclide disent que par deux points quelconque il existe une et une seule droite, que pour tout segment on peut tracer un cercle ayant le centre une des extrémités du segment et rayon le segment, que deux angles droits quelconques sont congruents (voir dessous). Mais surtout que si deux droites r et r' intersectent une troisième droite s en formant des angles intérieurs du même coté de s dont la somme est moins que deux angles droits alors $r \cap r' \neq \{\emptyset\}$ (ça c'est le 5^{eme} axiome d'Euclide).

Une figure est un sous ensemble du plan, typiquement elle sera une union de segments, arcs de cercles et droites.

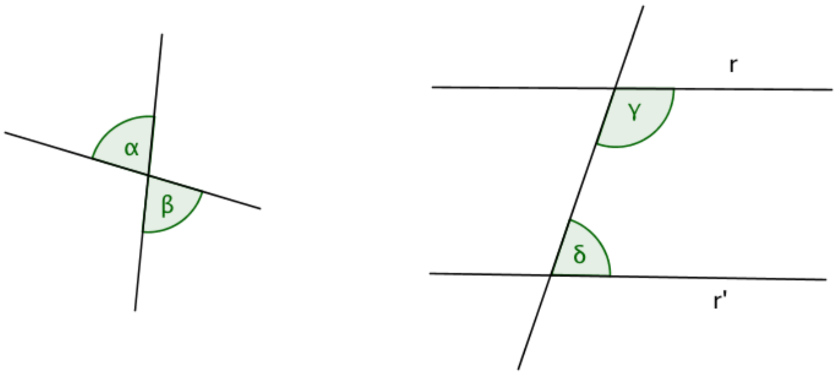
On dit que deux figures F et F' sont *congruentes* ou *isométriques* (noté $F \equiv F'$) si on peut transporter rigidement l'une sur l'autre. Donc F' est le résultat d'une suite de translations, rotations et symétries le long d'une droite appliquées à F. (Remarquez qu'en acceptant cette notion, vous acceptez implicitement l'existence d'un ensemble de transformations du plan dites “congruences" ou “isométries", dont par example les rotations, les translations et les refléxsions par rapport à un axe : bien que cela soit très intuitif, il faudrait axiomatiser correctement cela).

Un triangle est l'union de trois segments non alignés $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$. Il est isocèle si deux de ces segments sont congruents ; équilatéral si tous les trois le sont. Il est rectangle si un des angles $A\hat{B}C, C\hat{A}B, B\hat{C}A$ est rectangle. La hauteur de ABC par rapport à AB est la droite h passant par C et orthogonale à celle qui contient A, B ; son pied est sont intersection avec la droite par A et B. La médiatrice de $\overline{AB}$ est l'ensemble de points C tels que $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$. La médiane de $\overline{AB}$ est la droite par C et le milieu de $\overline{AB}$. La bissectrice d'un angle est la droite qui divise l'angle en deux angles congruents.

Si $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux segments, leur concatenation est le segment $\overline{AD'}$ où D' est le point de la droite par A et B tel que $\overline{BD'} \equiv \overline{CD}$ et $\overline{AB} \cap \overline{BD'} = \{B\}$. Si $\overline{AB}$ est un segment et $n \in \mathbb{N}$ alors le segment $n\overline{AB}$ est défini par récurrence en cocatenant $(n-1)\overline{AB}$ et $\overline{AB}$ (si $n = 1$ il est $\overline{AB}$). On note $\overline{AB} > \overline{CD}$ (resp. $\overline{AB} < \overline{CD}$) si $\overline{AB}$ est congruent à un segment qui contient (resp. est contenu dans) $\overline{CD}$. On dit que deux paires de segments $\overline{AB}, \overline{CD}$ et $\overline{A'B'}, \overline{C'D'}$ “ont le même rapport" (noté $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$) si pour tout entiers m, n on a $m\overline{AB} > n\overline{CD}$ ssi $m\overline{A'B'} > n\overline{C'D'}$, ainsi que l'on a $m\overline{AB} = n\overline{CD}$ ssi $m\overline{A'B'} > n\overline{C'D'}$ et encore $m\overline{AB} < n\overline{CD}$ ssi $m\overline{A'B'} < n\overline{C'D'}$. Deux triangles A, B, C et A', B', C' sont *semblables* si $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$.

Nous utiliserons très souvent le suivant :

Lemme 12.1. *Dans la figure ci dessous, en supposant que $r \parallel r'$ on a $\alpha \equiv \beta$ et $\gamma + \delta = \pi$.*



Démonstration. Les angles α et β sont supplémentaires du même angle, donc égaux. Pour le deuxième dessin, si par l'absurde $\gamma + \delta < \pi$ (l'angle plat) alors par le 5^{eme} axiome les droites r, r' s'intersecteraient, ce qu'on a supposé faux. Du coup $\delta + \gamma \geq \pi$. Si l'inégalité vaut, alors pour la même raison r, r' s'intersectent de l'autre coté et donc ne sont pas parallèles. Donc on a l'égalité. $\boxed{12.1}$

Exercice 136. *En utilisant le lemme précédent prouver que la somme des angles intérieurs d'un triangle est l'angle plat.*

Mais aussi les suivants "critères de congruence des triangles" :

Lemme 12.2 (Critères de congruence des traingles)**.** *Soient A, B, C et A', B', C' deux triangles alors ils sont congruents si et seulement si une des suivantes est vérifiée :*

1. $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ *et* $C\hat{A}B \equiv C'\hat{A}'B'$.
2. $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ *et* $C\hat{A}B \equiv C'\hat{A}'B', C\hat{B}A \equiv C'\hat{B}'A'$.
3. $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ *et* $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.

Un autre théorème fondamental est celui de Thalès :

Théorème 12.3 (Thalès)**.** *Si un ensemble de droites parallèles est coupé par deux transversales, alors les segments déterminés sur une transversale sont proportionnels aux correspondants segments de l'autre transversale.*

Une *similitude* est une bijection h du plan en soit telle que pour tout A,B,C,D les segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont dans le même rapport que $h(\overline{AB})$ et $h(\overline{CD})$. Deux triangles sont semblables s'il existe une similitude qui transforme l'un dans l'autre. Qui est à la base de la preuve des suivants critères de similitude :

Lemme 12.4 (Critères de similitude des triangles)**.** *Soient A,B,C et A',B',C' deux triangles alors ils sont semblable si et seulement si une des suivantes est vérifiée :*

1. $A\hat{C}B \equiv A'\hat{C}'B', C\hat{A}B \equiv C'\hat{A}'B'$ *et* $C\hat{B}A \equiv C'\hat{B}'A'$.
2. $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ *et* $C\hat{A}B \equiv C'\hat{A}'B'$.
3. *Si* $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$.

On rappelle qu'un parallelogramme est un quadrilatère $ABCD$ tel que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ et ils sont parallèles. Alors on a :

Lemme 12.5. *L'intersection de AC et BD est leur milieux. De plus $\overline{AD} = \overline{BC}$ et ils sont parallèles.*

Démonstration. Soit O le milieu de $\overline{AC}$. Alors les triangles AOB et OCD sont congruents car ils ont $OA \equiv OC$ (par construction), $CD \equiv AB$ (par hypothèse) et $D\hat{C}O \equiv O\hat{A}B$ car AB et CD sont parallèles (Lemme 12). Mais alors on a aussi $C\hat{O}D = B\hat{O}A$ et les points BDO sont alignés et que $OD = OB$. Cela prouve le premier énoncé. Pour le deuxième il suffit maintenant de remarquer que les traingles AOD et BCO sont congruents car $AO = OC, BO = DO$ et $A\hat{O}D = B\hat{O}C$: cela montre que donc $AD = BC$. Pour prouver qu'ils sont parallèles nous remarquons qu'ils forment angles supplémentaires avec la droite BD. $\boxed{12.5}$

13 Feuille de TP Numéro 1 : Géométrie euclidienne avec Geogebra

La droite d'Euler

Ouvrir un browser web et accéder à la version en ligne de Géogebra à l'adresse :

$$http://web.geogebra.org/app/\#geometry$$

1. Tracer trois points A, B, C distincts quelconques. Puis tracer les segments $\overline{AB}, \overline{AC}$ et $\overline{BC}$.
2. Tracer les médiatrices des segments $\overline{AB}, \overline{AC}$ et $\overline{BC}$. Appeler O leur intersection commune, et colorier la lettre O en rouge.
3. Constater (en bougéant A, B, C) que O existe toujours. Prouver (sur un cahier !) que O existe toujours.
4. Tracer le cercle de centre O et rayon $\overline{OA}$. Constater qu'il passe aussi par B et C. Pourquoi ? Quel est le nom de O ?
5. Rendre transparentes les médiatrices construites avant et créer un outil corréspondant à O : il doit rendre le point O donné trois points A, B, C.
6. Tracer les milieux des segments $\overline{BC}, \overline{AC}$ et $\overline{AB}$ respectivement. Puis tracer les droites qui les relient aux sommets opposés du triangle ABC et constater qu'elles s'intersecent en un point G que l'on coloriera en rouge. Comment appelle-t-on G ? Créer un outil pour obtenir G en partant de trois points.
7. Prouver (sur un cahier !) que G existe toujours. (Aide :En travaillant en coordonnées par rapport à l'origine o, on pourra remarquer que si G est el point tel que $\vec{oG} = \frac{\vec{oA}+\vec{oB}+\vec{oC}}{3}$ alors on a que le point $A + \frac{3}{2}\vec{AG}$ est le milieux de $\overline{BC}$ et donc G est sur la médiane de $\overline{BC}$ et raisonner de façon similaire pour les autres segments.)
8. Bouger A, B, C et observer le comportement de O et de G : que remarquez-vous ? Savez-vous expliquer cela ?
9. Tracer les droites perpendiculaires aux segments $\overline{AB}, \overline{AC}$ et $\overline{BC}$ et passantes respectivement par C, B et A. Appeler H leur intersection commune, colorier-le en rouge et créer un outil pour le calculer à partir de A, B, C. Comment appelle-t-on H ?
10. Prouver que H existe toujours. Un aide : tracer les droites par A, B, C parallèles respectivement à $\overline{BC}, \overline{AC}$ et $\overline{AB}$; elles formes un nouveau triangle ; que sont les hauteurs de A, B, C pour ce nouveaux triangle ?
11. Bouger A, B, C : que constatez vous ?
12. Créer les segments HG et GO et en visualiser la longueur. Que constatez-vous en bougéant A, B et C ? L'objet que vous venez de découvrir s'appelle la *droite d'Euler*.
13. Créer un texte dynamique (outil "ABC") qui visualise le rapport entre les longueurs $\overline{GH}$ et $\overline{GO}$. Pour ce faire vous pouvez écrire un texte entre guillemets et le concaténer (à l'aide du symbole +) à une formule comme (GH/DG).
14. Soit maintenant O le point construit avant et définissez un nouveau point, $H2$ par $\vec{OH}2 = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ (utiliser la case "saisie"). Que remarquez-vous ?
15. Prouver que $H2 = H$. (Aide : montrer que la droite par A et $H2$ est parallèle à la médiatrice de $\overline{BC}$ en trouvant un vecteur qui la dirige. Raisonnez de façon similaire en échangéant les rôles de A, B et C pour conclure.)
16. En utilisant le fait que $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ et que $\vec{oG} = \frac{\vec{oA}+\vec{oB}+\vec{oC}}{3}$ montrer que l'on a $\vec{OH} = 3\vec{OG}$. En conclure que la droite d'Euler existe et que le rapport entre $\overline{GH}$ et $\overline{GO}$ est bien 2. (Attention : le point o est l'origine du système de repère initial et O est le circocentre de ABC.)

A la fin de la séance enregistrez votre travail sur geogebra et envoyez-le sous forme de fichier .ggb à : francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Esquisse des solutions 2-4). Rappelons que la médiatrice d'un segment $\overline{AB}$ est l'ensemble des points C tels que $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. Soit maintenant $m(AB)$ la perpendiculaire au segment $\overline{AB}$ en son milieu M ; rappelons que sa construction se fait en construisant d'abord deux cercles ayant le même rayon et centres A et B respectivement. Si leur rayon est $> \overline{AB}$ leurs intersections seront alors deux points sur la médiatrice et on pourra alors la tracer. Mais puisque $m(\overline{AB})$ et la médiatrice de $\overline{AB}$ contiennent ces deux points elles coincident. Donc nous avons une autre caractérisation de la médiatrice d'un segment comme la perpendiculaire au segment en son milieu. Nous utiliserons cela librement dorenavant. Soit $O = m(\overline{AB}) \cap m(\overline{AC})$. Alors on a $\overline{OA} = \overline{OB}$ mais aussi $\overline{OA} = \overline{OC}$ et donc O est aussi sur la médiatrice de $\overline{BC}$. Donc les trois droites s'intersectent. En plus les égalités $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ montrent que le cercle de centre O et rayon $\overline{AB}$ passe par A, B, C. O est dit le centre du cercle circonscrit à ABC.

6-8). Le point G ainsi construit s'appelle centre de gravité ou barycentre. La preuve vectorielle proposée est la suivante : soit G le point caractérisé par $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$ alors

$$A+\frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = A+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}) = A+\frac{3}{2}(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}-\overrightarrow{OA}) = A+(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}) = A+\frac{\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})}{2} = A+\overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{BC}}{2} = A+\overrightarrow{AM} = M$$

où M est le milieu de $\overline{BC}$. Donc on a que G est sur la droit par A et M. En raisonnant de façon analogue en permutant A, B, C on a que G est aussi sur les droites par B et le milieu de $\overline{AC}$ et par C et le milieu de $\overline{BA}$. On remarque que G est toujours à l'intérieur de ABC.

9-10) Tracer les parallèles à AB, BC, AC respectivement par C, A, B. Alors si on appelle A' le point d'intersection entre les parallèles à AB et AC , B' le point d'intersection entre les parallèles à AB et BC et C' le point d'intersection entre les parallèles à AC et BC on peut remarquer que $A'B'C'$ est semblable à ABC (car ils ont les mêmes angles) et il en est exactement le double (car par example les triangle $C'AB$ et $A'BC$ sont congruents à ACB et donc $\overline{C'B} \equiv \overline{BA'} \equiv \overline{AC}$ et donc $\overline{A'C'} = 2\overline{AC}$). Mais alors les hauteurs de ABC sont aussi les mediatrices de $A'B'C'$ et donc le point H cherché est aussi le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$: on a déjà prouvé qu'il existe.

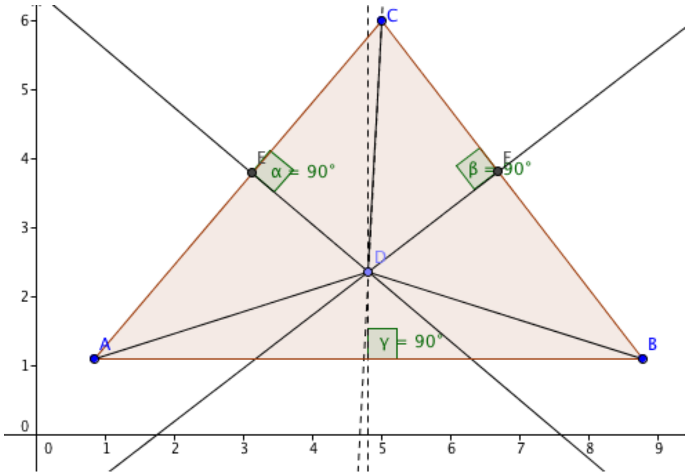
15) Nous donnons une preuve vectorielle car plus simple. Naturellement il existe une preuve de tous les énoncés de la feuille purement euclidienne. Le lecteur intéressé la trouvera facilement sur les principaux volumes sur la géométrie euclidienne ainsi qu'en ligne. Soit $H2$ comme dans le texte. Alors on a : $\overrightarrow{AH2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Mais ce vecteur dirige la médiatrice de $\overline{BC}$ car O appartient à cette médiatrice : en effet la symétrie axiale par rapport à la médiatrice de $\overline{BC}$ échange B et C et ne bouge pas O donc ce vecteur est invariant par cette symétrie et donc est sur la médiatrice. En raisonnant de façon analogue pour les autres points on a que $H2$ est sur les trois hauteurs du trangle et donc il coincide avec H.

16) On a $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$. Mais alors $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$.

14 Feuille de TP Numéro 2 : Géométrie euclidienne avec Geogebra ($2^{ème}$ partie)

Une fausse preuve

Soit ABC un triangle quelconque. Nous allons ici prouver qu'il est isocèle en C (i.e. que $\overline{AC} = \overline{BC}$). Cherchez la faute d'abord sur votre cahier et puis testez votre réponse par géogebra.



1. Soit D le point à l'intérieur du triangle ABC formé par l'intersection entre la mediatrice de AB et la biisectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ et soient E et F respectivement les projections de D sur AC et BC.
2. Prouver que les triangles rectangles CDE et CDF sont congruents. (Par construction ils ont combien d'angles égaux ?) En particulier $\overline{DE} = \overline{DF}$.
3. Prouver que $\overline{AD} = \overline{DB}$.
4. Prouver qu'alors les triangles ADE et BDF sont congruents. En particulier $\overline{AE} = \overline{BF}$.
5. Conclure du point 2) que $CE = CF$ et, avec le point 4) que $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Le cercle d'euler

1. Tracer un triangle ABC et son barycentre G son orthocentre H et le centre de son cercle circonscrit O. La dernière fois nous avons montré que $\vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{GH}$. (la droite d'Euler).
2. Tracer les milieux A', B', C' des cotés BC, AC, AB respectivement.
3. Tracer les milieux $A2, B2, C2$ des segments HA, HB, HC respectivement.
4. Tracer les pieds des hauteurs du triangles $H1, H2, H3$.
5. Que remarquez-vous sur les 9 dernier points que vous venez de tracer ?
6. Qui est le centre du cercle E que vous venez d'observer ?
7. Nous allons maintenant montrer que 6 des neuf points sont effectivement sur le cercle d'Euler. Commencer en prouvant que le triangle $OB'G$ et le triangle GHB sont semblables (quel est le rapport de similitude ?)
8. Soit E le centre du parallelogramme $OB'HB2$. En tirer que $\overline{EB2} = \overline{EB'}$.
9. Prouver que $2\overline{EB2} = OB$ et en conclure qu'alors $\overline{EA2} = \overline{EB2} = \overline{EC2}$.

10. Repeter l'argument du point 8) pour en conclure qu'alors on a aussi $\overline{EA'} = \overline{EB'} = \overline{EC'} = \overline{EA2} = \overline{EB2} = \overline{EC2}$.

Quelques théorèmes classiques sur les cercles.

1. Tracer un cercle c de centre O et une corde $\overline{AB}$ de c. Tracer un point $C \in c$ et calculer les angles $A\hat{C}B$ et $A\hat{O}B$. Que remarquez-vous ? Prouver votre remarque sur un cahier.
2. Tracer un quatrième point $D \in c$ de sorte que $ABCD$ soit un quadrilatère inscrit dans c. Calculer la somme des angles opposés. Que remarquez-vous ? Prouver votre remarque.
3. Effacer les dessins précédents. Tracer un triangle ABC et points $E \in \overline{BC}, F \in \overline{AC}, G \in \overline{AB}$. Soit c le cercle par A, F, G, d celui par B, E, G et e celui par C, E, F. Que remarquez-vous ? Prouvez votre remarque. (C'est le Théorème des trois cercles de Miquel).
4. Effacer les dessins précédents. Tracer un cercle c et un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans c. Soient $c1, c2, c3, c4$ des cercles différents de c et contenant respectivement $\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}$ et $\{D, A\}$. Soit $E = c_1 \cap c_2 \setminus \{B\}$, $F = c_2 \cap c_3 \setminus \{C\}$, $G = c_3 \cap c_4 \setminus \{D\}$, $H = c_4 \cap c_1 \setminus \{A\}$. Que remarquez vous ? Sauriez-vous prouver cette remarque ? (C'est le théorème des quatre cercles de Miquel).
5. Soient maintenant $E = AB \cap CD$ et $F = AC \cap BD$ (où on note AB la droite par A et B etc.). Tracer les cercles par EAD, EBC, FAB, FCD. Que remarquez-vous ? Il s'agit du théorème du pivot de Miquel. Sauriez-vous le prouver ? (Aide : Appelez O le point d'intersection entre les cercle par EAD et FAB différent de A. Alors on a $A\hat{O}D = A\hat{E}D$ et donc O appartient aussi au cercle par EBC car...)
6. Dans le dessin précedent observer les centres des 4 cercles construits. Que remarquez-vous ?

Esquisse de solution. Fausse preuve : le point D n'est jamais à l'intérieur du triangle.

Cercle d'Euler. 7). On a $B'\hat{G}O = H\hat{G}B$ (car ils sont opposés), $\frac{BG}{GB'} = 2$ car G est le barycentre de ABC et aussi $\frac{\overline{GH}}{\overline{OG}} = 2$ car on avait déjà prouvé cela dans la feuille précédente. Alors les deux triangles sont semblables par le deuxième critère et leur rapport est 2.

8-9) Alors on a $\overline{HB2} = \overline{HB'}$ et donc $HB2OB'$ est un parallélogramme. Du coup l'intersection de ses diagonales (E) est le milieu des diagonales et donc de $\overline{OH}$ et $EB' = EB2$. En appliquant le même raisonnement en échangeant le role de A, B, C on trouve que le milieu de OH est aussi le milieu de $A'A2$ et de $C'C2$.

Il ne reste qu'à prouver que $EA' \equiv EB' \equiv EC'$. A cet effet, remarquons que le triangle $EHB2$ est semblable à OHB et le rapport est $\frac{1}{2}$. Du coup on a que $2\overline{EB2} = \overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC}$ (car O est l'intersection des médiatrices de ABC). Mais alors on a aussi $\overline{EB'} \equiv \overline{EB2} \equiv \overline{EA2} \equiv \overline{EA'} \equiv \overline{EC2} \equiv \overline{EC'}$: ce qu'il fallait démontrer.

Théorèmes sur les cercles.

1) et 2). Si C est dumême coté que le centre O du cercle par rapport à la droite AB alors il y a deux cas : soit le triangle ABC contient O soit il ne le contient pas. Nous traitons le premier cas et nous laissons le deuxième au lecteur. Les triangles AOC et BOC sont isocèles donc les angles $A\hat{C}O$ et $B\hat{C}O$ sont égaux à $C\hat{A}O$ et $C\hat{B}O$ respectivement. En utilisant le fait que la somme des angles d'un triangle est π on a alors

$$\pi = 2A\hat{C}O + 2B\hat{C}O + 2O\hat{A}B = 2(A\hat{C}O + B\hat{C}O) + (\pi - A\hat{O}B) = 2A\hat{C}B + (\pi - A\hat{O}B) \implies A\hat{O}B = 2A\hat{C}B.$$

Cela montre aussi que l'angle en C ne dépend pas du choix de C sur la circonférence.

Si C est du coté opposé de la droite AB par rapport à O alors soit D l'opposé de C par rapport à O. Par le point précédent $A\hat{D}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$. Les angles $C\hat{A}D$ et $C\hat{B}D$ sont rectangles (car la preuve précédente marche aussi dans ce cas). Cela permet alors de conclure que $A\hat{C}B = A\hat{C}D + D\hat{C}B = \pi/2 - A\hat{D}C + \pi/2 - C\hat{D}B = \pi - A\hat{D}B$.

Les points précédents montrent que les points d'un cercle ayant AB comme corde eqt qui sont du même coté de AB sont tels que $A\hat{C}B$ est constant. Réciproquement on peut prouver que les points C tels que $A\hat{C}B = \alpha$ et qui sont d'un coté de la droite AB (pour $\alpha \in]0, \pi[$ fixé) forment un arcle de cercle. Une idée de preuve est la suivante : soit C une point tel que $A\hat{C}B = \alpha$ et soit c le cercle tel que les points dans c voient AB sous un angle de α. Si C n'appartient pas à c alors la droite AC doit intersecter le cercle c en un autre point C' mais alors les angles $B\hat{C}C'$ et $BC'C = \alpha$ devraient être supplémentaires ce qui est impossible. Donc $C \in c$.

Nous avons donc equissé une preuve du suivant :

Proposition 14.1 (Critère d'inscriptibilité des quadrilatères)**.** *Un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle ssi $A\hat{B}C + C\hat{D}A = \pi$.*

Nous allons l'utiliser plusieurs fois dans ce qui suit.

3). Soit D le point d'intersection des cercles par AFG et par BFE. Alors les quadrilatères $AFDG$ et $BFDE$ sont inscriptibles et donc $G\hat{D}F = \pi - C\hat{A}B$ et $E\hat{D}G = \pi - C\hat{B}A$. Mais alors l'angle $G\hat{D}E = 2\pi - G\hat{D}F - E\hat{D}G = C\hat{B}A + C\hat{A}B = \pi - A\hat{C}B$ et donc le quadrilatère $CEDF$ est inscriptible. Alors le cercle qui l'inscrit passe par CEF et par D.

4) Il s'agit d'appliquer cinq fois le critère d'inscriptibilité des quadrilatères...