

Cours de mathématiques pour la Licence 1 de Sciences de la Vie et de la Terre

Université Paul Sabatier - Toulouse 3

FRANÇOIS CHAPON

2016-2017

This work is licensed under the Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 3.0 France License. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/fr/>



Avant-propos

Références :

- (1) Mathématiques pour les SV-ST, E. Azoulay, EdiScience : Dunod, 2006.
- (2) Biomathématiques - Probabilités - Statistiques, S. Bénazeth, P. Deschamps, C. Guihenneuc, P. Landais, Elsevier/Masson, 2013
- (3) Driss Boularas, Daniel Fredon, Daniel Petit, Mini manuel de mathématiques pour les sciences de la vie et de l'environnement, Dunod, 2009

Table des matières

Avant-propos	3
Chapitre 1. Probabilités	7
1. Rappels	7
2. Variables aléatoires	10
3. Théorèmes limites	15
Chapitre 2. Suites numériques	19
1. Généralités	19
2. Propriétés	20
3. Exemples de modélisation d'une croissance de population	21
Chapitre 3. Analyse réelle	25
1. Fonctions usuelles	25
2. Quelques généralités sur les fonctions : rappels et compléments	31
Chapitre 4. Intégration	39
1. Primitives	39
2. Intégrale	39
Chapitre 5. Équations différentielles	43
1. Introduction	43
2. Définition générale	43
3. Equations différentielles linéaires du premier ordre.	44
4. Exemples d'évolution de population	48
Chapitre 6. Compléments	51
1. Méthode des moindres carrés	51

Probabilités

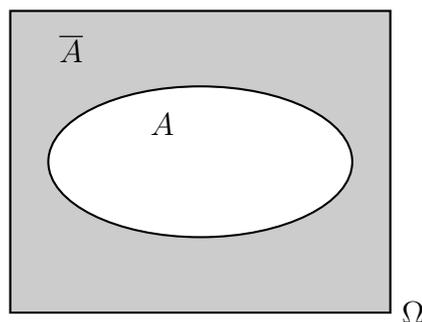
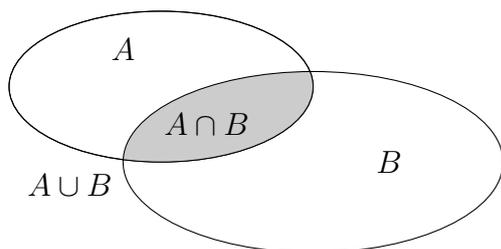
1. Rappels

1.1. Rappels ensemblistes. Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat est soumis au hasard. On lui associe l'**ensemble fondamental** Ω formé de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire. L'ensemble Ω peut être fini ou infini.

Un **événement** A est une partie (sous-ensemble) de Ω , c'est-à-dire que $A \subset \Omega$. Un **événement élémentaire** est un singleton $\{\omega\}$ de Ω ($\omega \in \Omega$). Notons les deux événements particuliers : Ω est l'événement **certain** et \emptyset est l'événement **impossible**.

Si $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$ sont des événements, on note

- $A \cup B$, l'**union** de A et de B : c'est l'événement A **ou** B est réalisé
- $A \cap B$, l'**intersection** de A et de B : les événements A **et** B sont réalisés
- \bar{A} (ou cA ou A^c), le **complémentaire** de A : l'événement A **n'est pas** réalisé



1.2. Probabilité, définition. Il existe une définition mathématique de probabilité que l'on ne donnera pas ici. Pour nous, une probabilité est une application \mathbb{P} qui à un événement $A \subset \Omega$ associe un réel $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$, appelé probabilité de A . Il est naturel d'imposer que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour tous événements A, B **disjoints**, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

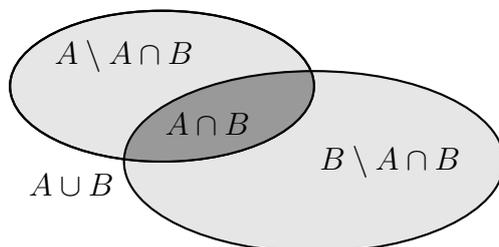
Par conséquent, on a $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Remarque : Attention, si $\mathbb{P}(A) = 0$, on a pas forcément $A = \emptyset$.

On peut aussi montrer la formule bien connue suivante :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

En effet,



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \setminus A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \quad \square\end{aligned}$$

On va se concentrer par la suite sur des exemples. Donnons déjà l'exemple de la **probabilité uniforme** :

Soit $\Omega = 1, \dots, n$ un ensemble fini. Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}.$$

On a alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{"nombre de cas favorables"}}{\text{"nombre total de cas"}},$$

où $|A|$ désigne le **cardinal** d'un ensemble A , c'est-à-dire son nombre d'éléments.

EXEMPLE 1.1. Exemple très classique : le lancer d'un dé équilibré à 6 faces. L'univers s'écrit alors $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, et le dé étant équilibré chaque face a une probabilité de $1/6$ d'apparaître.

Soit par exemple A l'événement "on tombe sur un nombre impair". Alors, $A = \{1, 3, 5\}$, et on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

1.3. Probabilités conditionnelles. Lorsqu'on connaît une information supplémentaire, la probabilité de réalisation d'un événement peut s'en trouver modifiée. On introduit alors le concept de probabilité conditionnelle. Commençons par exemple dans un cadre équiprobable.

EXEMPLE 1.2. On considère une population de 200 coccinelles, composée de 110 coccinelles femelles et de 90 coccinelles mâles. Les coccinelles sont de deux types différents : rouge et jaune, et parmi les 110 coccinelles femelles, il y en a 60 qui sont de couleurs rouges. La proportion de coccinelles rouges parmi les coccinelles femelles est donc évidemment

$$\frac{\text{nombre de coccinelles femelles et rouge}}{\text{nombre de coccinelles femelles}} = \frac{60}{110} = \frac{60/200}{110/200}$$

On définit alors naturellement la notion de probabilité conditionnelle :

DÉFINITION 1.3. *On considère deux événements A et B . La **probabilité conditionnelle de A sachant B** est définie par :*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

On la note aussi $\mathbb{P}_B(A)$. On suppose bien sûr que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

On a immédiatement :

$$\mathbb{P}_B(B) = 1, \quad \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(\bar{A}) = 1.$$

DÉFINITION 1.4. *Deux événements A, B sont dits **indépendants** si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Remarque : on comprend bien sur la deuxième écriture la notion d'indépendance : la connaissance de B n'influe en rien sur la probabilité que l'événement A se réalise.

EXEMPLE 1.5. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Soient les événements $A =$ "la carte est un 7" et $B =$ "la carte est un pique". On modélise le problème par (Ω, \mathbb{P}) où $\Omega = \{1, \dots, 32\}$ et \mathbb{P} est la probabilité uniforme.

On a alors $\mathbb{P}(A) = 4/32 = 1/8$ (il y a 4 cartes "7" dans le jeu) et $\mathbb{P}(B) = 8/32 = 1/4$ (il y a 8 piques). Et

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\text{"la carte est le 7 de pique"}) = 1/32 = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B).$$

Les événements A et B sont donc indépendants.

On a la proposition suivante.

PROPOSITION 1.6 (**Formule de Bayes**). Soient A, B deux événements de probabilités non nulles. Alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

□

EXEMPLE 1.7. On effectue un test de dépistage d'une maladie sur une population dont 15% de la population est atteinte. On sait que le test donne 95% de résultats positifs sur les personnes présentant la maladie. Le test donne 20% de résultats positifs. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit atteinte de la maladie sachant que le test est positif?

Introduisons les événements : M "être malade", T "test positif". Les données du problème sont alors :

$$\mathbb{P}(M) = \frac{15}{100}, \quad \mathbb{P}(T) = \frac{20}{100}, \quad \mathbb{P}(T|M) = \frac{95}{100}.$$

Par la formule de Bayes, on obtient donc :

$$\mathbb{P}(M|T) = \mathbb{P}(T|M) \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{95}{100} \frac{15}{20} \simeq 0.71.$$

On a aussi :

PROPOSITION 1.8 (**Formule des probabilités totales**). On considère des événements B_1, B_2, \dots, B_n , qui forment une partition de Ω , c'est-à-dire, qu'ils sont deux à deux disjoints et que leur réunion est égale à Ω . On dit qu'ils forment un **système de probabilité totale** ou un **système complet d'événements**. On a alors la formule :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1) \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) \mathbb{P}(B_2) + \dots + \mathbb{P}(A|B_n) \mathbb{P}(B_n).$$

DÉMONSTRATION. Les événements B_1, \dots, B_n formant une partition de Ω , on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A \cap \bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A|B_k) \mathbb{P}(B_k).$$

□

EXEMPLE 1.9. On considère deux urnes 1 et 2. L'urne 1 contient 2 boules rouges et 1 boule noire, et l'urne 2 contient 1 boule rouge et 4 boules noires. On tire à pile ou face pour choisir une urne, puis on tire une boule de l'urne choisie. Quelle est la probabilité de tomber sur une boule rouge?

Introduisons les événements R "tirer une boule rouge", et U_i "choisir l'urne i ", pour $i = 1, 2$. Les événements U_1, U_2 formant un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R|U_1) \mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(R|U_2) \mathbb{P}(U_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{30}.\end{aligned}$$

2. Variables aléatoires

Soit Ω un espace fondamental muni d'une probabilité \mathbb{P} . Cet espace représente "l'aléa" d'une expérience aléatoire auquel on a pas toujours accès.

On appelle (dans ce cours) **variable aléatoire** X (en abrégé **v.a.**) toute application de Ω dans \mathbb{R} . Là encore, il existe une définition mathématique plus correcte qu'on ne donnera pas ici. Intuitivement, une variable aléatoire X représente alors le résultat d'une expérience aléatoire.

Plusieurs types de variables aléatoires existent, les v.a. discrètes et les continues.

2.1. Variables aléatoires discrètes. Une variable aléatoire X est dite **discrète** si l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est un sous-ensemble fini ou infini dénombrable de \mathbb{R} (c'est-à-dire que l'on peut le "compter").

DÉFINITION 2.1 (Loi de probabilité). *Soit X est une variable aléatoire discrète avec pour ensemble de valeurs $\{x_1, x_2, \dots\}$. Sa loi de probabilité est définie par tous les nombres $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, $i \geq 1$. Bien sûr, on a $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$.*

On peut aussi caractériser la loi d'une v.a. par sa fonction de répartition :

DÉFINITION 2.2. *La fonction de répartition de la v.a. X est la fonction $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Elle a quelques propriétés :*

- F est une fonction en escalier,
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$,
- F est croissante,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,
- $\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - F(a)$.

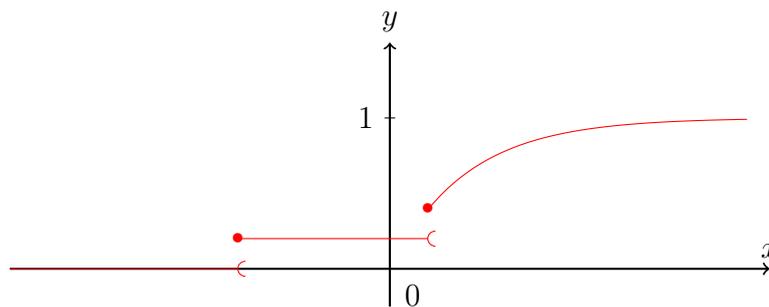


FIGURE 1. Exemple de fonction de répartition

2.1.1. Variables aléatoires indépendantes.

DÉFINITION 2.3. *On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si pour tous réels x et y , les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, c'est à dire,*

$$\mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

EXEMPLE 2.4. On lance successivement 2 pièces de monnaie. Si on note 1 = pile et 0 = face, l'ensemble de tous les résultats possibles est $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Soit X la v.a. égale au résultat du premier lancer, et Y celle du second. Alors X et Y sont indépendantes. Exo!

2.1.2. Moyenne et Variance.

DÉFINITION 2.5. Soit X une variable aléatoire discrète. Son **espérance** ou **moyenne** est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k k \mathbb{P}(X = k),$$

où la somme est prise sur toutes les valeurs possibles prises par X (en nombre fini ou infini).

La **variance** de X est définie par

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\ &= \sum_k (k - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = k) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \sum_k k^2 \mathbb{P}(X = k) - \left(\sum_k k \mathbb{P}(X = k) \right)^2. \end{aligned}$$

Là encore, la somme est prise sur toutes les valeurs possibles prises par X . Pour voir que les formules sont égales, il suffit de développer le carré.

On appelle **écart-type** de X , la racine de la variance de X : $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

L'espérance de X représente bien la moyenne de X , c'est la somme sur toutes les valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités. La variance représente l'écart de X par rapport à sa moyenne, comme on peut le comprendre sur la première formule.

Propriétés : Si α et β sont deux réels, on a :

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$$

et si X et Y sont indépendantes, on a :

$$\text{Var}(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \text{Var}(X) + \beta^2 \text{Var}(Y).$$

Attention, la formule sur la moyenne est vraie même si les variables X et Y ne sont pas indépendantes. Elle exprime que l'espérance est linéaire. Par contre, la formule sur les variances nécessite bien l'hypothèse d'indépendance.

On remarque aussi que si X ne prend que des valeurs positives, alors $\mathbb{E}(X)$ est positive. La variance est par contre toujours positive.

2.1.3. *Lois usuelles discrètes.* On se contente de donner ici les lois les plus usuelles avec leurs paramètres.

Loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On a déjà rencontré la loi uniforme. Une variable aléatoire X suit donc la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, n.$$

Son espérance est $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$, et sa variance $\text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$. En effet, l'espérance s'écrit

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n k \frac{1}{n}.$$

Il s'agit donc de calculer la somme $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$. Pour cela, il suffit de remarquer que

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ + & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline = & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

on somme donc n fois le terme $n+1$. Ainsi, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$. Un calcul similaire montre que $\text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si elle ne prend que deux valeurs : 0 et 1, avec $\mathbb{P}(X = 1) = p$. La loi de probabilité de X est alors

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p,$$

et on a $\mathbb{E}(X) = p$ et $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.

EXEMPLE 2.6. On modélise un jeu de pile ou face par la loi de Bernoulli. On lance une fois une pièce de monnaie. Soit X la v.a. égale à 1 si on tombe sur pile, et 0 si on tombe sur face. Alors X suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ (ou p si la pièce est truquée).

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On fait de façon indépendante n fois la même expérience de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Plus précisément, on répète n fois, de manière indépendante, la même expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : les événements A et \bar{A} , avec $\mathbb{P}(A) = p$. La variable X correspond alors au nombre de fois où le résultat de l'expérience a été A .

Les valeurs de X sont donc $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, et sa loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \text{pour } k = 0, \dots, n.$$

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

où $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1$ est la factorielle de n . Par convention $0! = 1$. On a par exemple,

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

⋮

$$13! = 13 \times 12 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = 6227020800$$

etc

D'un point de vue combinatoire, la factorielle $n!$ représente le nombre de façons de permuter n objets (en effet, pour le 1^{er} objet, on a n choix possibles, pour le 2^e, $n-1$ choix possibles, et ainsi de suite).

Le coefficient binomial, quand à lui, compte le nombre de façons de choisir k éléments non ordonnés parmi n . Par exemple, si je choisis dans l'amphi 50 étudiant·e·s parmi les 180 (présent·e·s ?) sans ordre particulier, j'aurais $\binom{180}{50}$ choix différents. Notons que :

$$\binom{180}{50} = 1021417739423692125202791377020552362530865606$$

On peut alors "représenter" la loi binomiale comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes. Considérons un expérience à deux issues possibles répétée n fois de

façon indépendante, et dont la probabilité d'un "succès" est p . Introduisons les v.a.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si on obtient un "succès" à l'expérience } i \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les v.a. X_1, \dots, X_n sont donc des v.a. de Bernoulli de paramètre p indépendantes, et la somme

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

représente le nombre de succès obtenus lors des n expériences. Pour calculer la loi de X , on raisonne de la sorte : pour que $X = k$ il faut que k variables soient égales à 1 et $n - k$ égales à 0. Chacune des v.a. valant 1 contribue avec probabilité p , et celles valant 0 avec probabilité $1 - p$. L'indépendance des v.a. justifie alors le terme $p^k(1 - p)^{n-k}$, et le coefficient binomial compte donc le nombre de façon de choisir les k variables égales à 1. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \text{pour } k = 0, \dots, n.$$

On obtient alors facilement par cette représentation (en utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance) que $\mathbb{E}(X) = np$ et $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.

EXEMPLE 2.7. Dans un jeu de pile ou face, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est la loi du nombre de "succès" obtenus en n lancers.

EXEMPLE 2.8. Dans une expérience sur le comportement, on fait pénétrer successivement n personnes dans un labyrinthe en forme de H. Chaque personne choisit au hasard une des branches du H avec probabilité $1/4$, indépendamment les uns des autres. Soit X la v.a. égale au nombre de personnes qui choisissent le coin supérieur gauche. Alors, X suit une loi binomiale de paramètres $n, 1/4$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(k \text{ personnes choisissent la branche supérieur gauche}) \\ &= \binom{n}{k} (1/4)^k (3/4)^{n-k}, \end{aligned}$$

on "choisit" k personnes parmi les n , d'où le coefficient $\binom{n}{k}$, k personnes choisissent la bonne branche indépendamment les uns des autres, d'où le $(1/4)^k$, et $n - k$ choisissent les autres branches, d'où le $(3/4)^{n-k}$.

Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. C'est la loi du temps d'atteinte d'un "succès". Une v.a. X suit une loi géométrique de paramètre p si elle prend ses valeurs dans \mathbb{N}^* et sa loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = n) = (1 - p)^{n-1} p, \quad \text{pour } n \geq 1.$$

On a que $\mathbb{E}(X) = 1/p$ et $\text{Var}(X) = (1 - p)/p^2$. En effet,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k \mathbb{P}(X = k).$$

Attention, la v.a. X prend ses valeurs dans \mathbb{N}^* , on somme donc sur un nombre infini de valeurs ! Cette somme pourrait très bien ne pas être fini. . .

Pour la calculer, on peut remarquer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{P}(X = k),$$

en intervertissant les deux sommes. Le terme à l'intérieur de la deuxième somme ne dépend plus de n , on somme donc n fois une constante en n , et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k),$$

c'est-à-dire que cette somme est égale à l'espérance de X . Ainsi, on a obtenu la formule :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Calculons d'abord la fonction de répartition de la loi géométrique : Posons $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq n) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n q^{k-1} p = p(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \\ &= p \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 - q^n \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\mathbb{P}(X \geq n) = 1 - \mathbb{P}(X < n) = 1 - \mathbb{P}(X \leq n - 1) = q^{n-1},$$

ce qui permet de calculer l'espérance de X :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}.$$

Cette somme infini peut s'interpréter comme la limite d'une somme d'une suite géométrique :

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N q^{n-1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^N}{1 - q} = 1/p,$$

car $0 < q < 1$. Un calcul analogue mais plus compliqué permet de montrer que la variance est $\text{Var}(X) = (1 - p)/p^2$.

EXEMPLE 2.9 (Durée de vie d'une bactérie). Une bactérie a une proba $1/3$ d'être touchée par un laser, auquel cas elle meurt instantanément. Soit T la durée de vie de la bactérie. Les tirs de laser étant supposés indépendants, on a

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(\text{les } n - 1 \text{ premiers tirs ratent, le } n\text{-ième touche}) = (2/3)^{n-1} 1/3,$$

c'est à dire que T suit une loi géométrique de paramètre $1/3$.

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On l'appelle parfois la loi des « événements rares » (voir plus loin). Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ si ses valeurs sont $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} et sa loi de probabilité est :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{pour } k \geq 0.$$

Notons que l'ensemble des valeurs de X n'est pas fini mais est infini dénombrable.

Un calcul sur des sommes infinies (mais pas forcément évident) donne alors $\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda$.

EXEMPLE 2.10. Une suspension bactérienne contient 5000 bactéries par litre. On ensemence à partir de cette suspension, 50 boîtes de Pétri, à raison d' 1 cm^3 par boîte. Soit X la v.a. égale au nombre de colonies par boîte. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

La probabilité qu'il n'y ait aucune colonie sur une boîte de Pétri est :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{5^0 e^{-5}}{0!} \simeq 0,0067.$$

La probabilité qu'il y ait au moins une colonie sur une boîte de Pétri est :

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) \simeq 0,9933.$$

2.2. Un exemple de v.a. continue. Si l'ensemble des valeurs d'une v.a. X est un intervalle de \mathbb{R} (borné ou non), on dit qu'elle est **continue**. On va donner un exemple fondamental de v.a. continue.

On a dit précédemment que la loi d'une v.a. peut être caractériser par sa fonction de répartition. C'est toujours le cas pour les v.a. continue, la définition étant la même.

Une v.a. de loi **gaussienne** ou **normale** de moyenne 0 et de variance 1, notée $\mathcal{N}(0, 1)$, est une v.a. X à valeurs dans \mathbb{R} de fonction de répartition

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

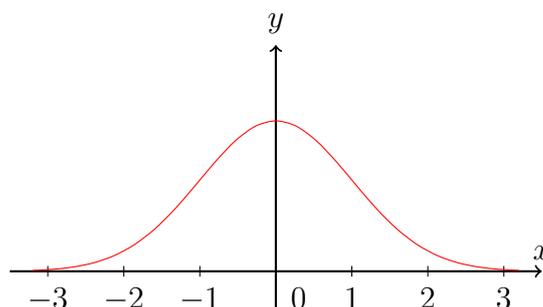
On a alors

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Remarquons qu'on ne connaît pas d'expression explicite à cette intégrale. Mais on a des tables de valeurs. Par exemple,

$$\mathbb{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \simeq 95/100.$$

La graphes de la densité gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$, c'est-à-dire le graphes de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ est :



3. Théorèmes limites

3.1. Loi des grands nombres. Considérons une expérience aléatoire de Bernoulli répétée n fois de façon indépendante. La probabilité de succès est notée p et donc celle d'obtenir un échec est $q = 1 - p$. En première approximation, il est naturel de s'attendre à ce que p soit approximée par la quantité

$$p \simeq \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}}$$

Cette approximation sera d'autant meilleure que l'on effectue un très grand nombre de fois l'expérience. Par exemple, si on jette une pièce de monnaie équilibrée un grand nombre de fois, la proportion de piles tend à se stabiliser vers $\frac{1}{2}$.

Notons X_i la v.a. égale à 1 si on obtient un succès lors de la i -ième expérience, et 0 si on obtient un échec. La somme $\sum_{i=1}^n X_i$ représente le nombre de succès obtenus, et on a donc

$$p \simeq \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n},$$

quand n est grand. Plus généralement, la quantité $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ s'appelle **la moyenne empirique** des X_i , et représente effectivement la moyenne des observations X_i . Il est donc naturel de s'attendre à ce que cette quantité converge quand $n \rightarrow \infty$, vers l'espérance des v.a. X_i (qui

vaut p quand X_i sont des v.a. de Bernoulli). Ceci se formalise par le théorème suivant dont on donnera un énoncé assez vague.

THÉOREME 3.1 (Loi des grands nombres). *Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi, avec $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$. Alors, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbb{E}(X_1) \quad (\text{dans un certain sens}).$$

DÉMONSTRATION. Les conditions du théorème sont en fait assez générales. Dans le cas des v.a. discrètes de variance finie, on peut donner une preuve en se basant sur l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}, \quad \text{pour tout } a > 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X|) &= \sum_k k \mathbb{P}(|X| = k) = \sum_{k>a} k \mathbb{P}(|X| = k) + \underbrace{\sum_{k \leq a} k \mathbb{P}(|X| = k)}_{\geq 0} \\ &\geq a \sum_{k>a} \mathbb{P}(|X| = k) = a \mathbb{P}(|X| > a). \end{aligned}$$

Notons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Alors, en passant au carré dans l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right|^2 > a^2\right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2 a^2} = \frac{\text{Var}(X_1)}{n a^2},$$

car les v.a. X_i sont indépendantes. Ainsi, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right| > a\right) \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, ce qui exprime que $\frac{S_n}{n}$ converge vers $\mathbb{E}(X_1)$ "en probabilité". \square

3.2. Approximation d'une binomiale par la loi de Poisson.

THÉOREME 3.2. *Soit X une v.a de loi binomiale de paramètre (n, p_n) , avec $np_n \rightarrow \lambda$ quand $n \rightarrow \infty$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, quand $n \rightarrow \infty$*

$$\mathbb{P}(X = k) \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

pour tout $k \geq 0$.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier, prenons $p = \lambda/n$. Alors,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{1}{k!} \lambda^k \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

et on a

$$(1 - \lambda/n)^n = \exp(n \log(1 - \lambda/n)) \rightarrow \exp(-\lambda).$$

\square

Ce théorème implique que quand n est grand, p petit, np "stable", on peut approximer une loi binomiale par une loi de Poisson. En pratique, l'approximation est déjà bonne pour $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$. Ainsi, la loi de Poisson est une bonne modélisation pour le nombre de fois où un événement rare survient.

EXEMPLE 3.3. Une maladie génétique rare, liée à l'appartenance au peuple Minangkabau, a une incidence estimée à 5 cas par million dans la population indonésienne. La ville de Tanjungpinang, située sur l'île Bintan, compte 250 000 habitants.

Si on considère que chaque habitant a une probabilité $p = \frac{5}{10^6}$ d'être atteint par cette maladie, indépendamment des autres, le nombre X de personnes atteintes à Tanjungpinang suit une loi binomiale de paramètres $n = 250000$ et $p = \frac{1}{200000}$.

On peut approximer cette loi par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = \frac{5}{4}$. Ainsi, la probabilité qu'il y ait au moins une personne atteinte de cette maladie à Tanjungpinang est approximativement :

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) \simeq 1 - e^{-3/4} \simeq 0.713495.$$

Le calcul avec la loi binomiale donne $\mathbb{P}(X \geq 1) \simeq 0.713496$, confirmant l'approximation.

3.3. Théorème central limite.

THÉOREME 3.4 (**Théorème central limite (TCL)**). Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. de Bernoulli de paramètre p et indépendantes. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1) = p$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_1) = p(1-p)$. Alors, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leq b\right) \rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

DÉMONSTRATION. On connaît la loi de S_n , on peut donc écrire explicitement la probabilité $\mathbb{P}\left(a \leq \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leq b\right)$. La preuve du théorème repose alors sur une estimation du coefficient binomial et d'une approximation de la somme par une intégrale (ce que l'on ne fera pas ici). \square

Ce théorème permet alors d'approximer la loi binomiale par une loi normale quand n est grand, c'est-à-dire qu'en loi on aura $S_n \approx \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$ quand n est grand (loi normale de moyenne nm et de variance $n\sigma^2$). En pratique, l'approximation est déjà bonne pour $n \geq 30$, $np \geq 5$, $np(1-p) \geq 5$.

Une simulation numérique permet de mieux comprendre le théorème. La Figure 2 représente l'histogramme d'un échantillon de 1000 v.a. de loi Binomiale de paramètres $n = 50$, $p = \frac{1}{2}$, ainsi que le graphe de la densité de la loi normale $\mathcal{N}(25, 12.5)$.

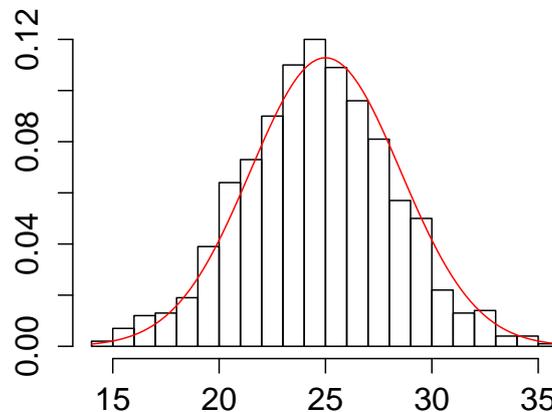


FIGURE 2. Simulation du TCL

EXEMPLE 3.5. Une maladie est causée par la mutation d'un gène sur un chromosome. On cherche à estimer la probabilité p qu'un individu présente cette mutation. On demande alors à n personnes de se soumettre à un test. On note X_i la variable égale à 1 si la i -ième personne présente une mutation et 0 sinon. Les variables X_i étant indépendantes, la variable $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ égale au nombre de personnes présentant la mutation suit une loi binomiale de paramètre n et p , où p est la probabilité de présenter la mutation qu'on cherche à estimer. La quantité $M_n = \frac{S_n}{n}$ représente la moyenne empirique des observations X_i . Par le TCL, comme $\mathbb{E}(X_1) = p$ et $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 = p(1-p)$, on a donc, quand n est grand, que

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \left| \frac{S_n}{n} - p \right| > x\right) \simeq \mathbb{P}(|N| > x),$$

où N suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On choisit $x = 1.96$ de telle sorte que $\mathbb{P}(|N| > x) \simeq 5\%$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(p \notin \left[\frac{S_n}{n} - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \frac{S_n}{n} + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]\right) \simeq 5\%$$

Comme $p(1-p)$ est toujours $< 1/4$, on a donc avec une probabilité de l'ordre de 95% que

$$p \in \left[\frac{S_n}{n} - \frac{1.96}{\sqrt{2n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{1.96}{\sqrt{2n}} \right],$$

pour n grand. L'intervalle ci-dessus est appelé **intervalle de confiance** au niveau 95% pour le paramètre p , et donne alors une estimation de p , qui sera d'autant plus précise que le nombre d'observations n est grand.

Si par exemple, $n = 1000$, et que 100 personnes dans cet échantillon présentent la mutation du gène, alors l'intervalle de confiance de p à 95% est donnée par

$$\left[\frac{100}{1000} - \frac{1.96}{\sqrt{2000}}, \frac{100}{1000} + \frac{1.96}{\sqrt{2000}} \right] \approx [0.06, 0.14],$$

et donc une estimation de p sera donnée par l'intervalle $[0.06, 0.14]$.

Suites numériques

1. Généralités

Motivation : On effectue des observations sur des caractères biologiques accompagnées de prise de mesure mesurées à intervalles de temps régulier ou non. A ces instants, on obtient des valeurs u_0, u_1, u_2, \dots de mesure d'un paramètre quantitatif, et de façon générale la valeur u_n à l'instant n .

On définit ainsi une suite numérique : à chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on associe un réel $u_n \in \mathbb{R}$. On note $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de terme général u_n .

DÉFINITION 1.1. (1) La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est stationnaire si $u_{n+1} = u_n$ à partir d'un certain rang n_0 . On a donc $u_k = u_{n_0}$ pour tout $k \geq n_0$. La suite est donc constante à partir d'un certain temps.

(2) La suite de terme général $u_n = a + nr$, où $a, r \in \mathbb{R}$ est appelée suite **arithmétique** de raison r et de premier terme $u_0 = a$. Elle est caractérisée par le fait que $u_n = u_{n-1} + r$ pour tout $n \geq 1$ et $u_0 = a$. En effet,

$$u_n = u_{n-1} + r = u_{n-2} + 2r = \dots = u_0 + nr.$$

(3) La suite de terme général $u_n = ar^n$ est appelée suite **géométrique** de raison r et de premier terme a , avec $a, r \in \mathbb{R}^*$. Elle est caractérisée par le fait que $u_n = ru_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ et $u_0 = a$. En effet,

$$u_n = ru_{n-1} = r^2u_{n-2} = \dots = r^n u_0.$$

REMARQUE 1.2. Pour définir une suite, on dispose essentiellement de deux méthodes.

(1) Soit u_n est défini directement à partir de n , par exemple :

$$u_n = \frac{1}{n^2},$$

pour tout $n \geq 1$. On est pas obligé de commencer à $n = 0$!

(2) Soit u_n est défini par *réurrence*, c'est-à-dire que u_n est fonction du ou des termes d'avant. On a alors besoin de définir le premier terme. Par exemple, c'est le cas pour les suite arithmétiques et géométriques. Un autre exemple :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \quad \text{et} \quad u_0 = 1.$$

On a donc :

$$u_0 = 1, \text{ donc } u_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2}, \text{ donc } u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2} \right) = \frac{17}{12}, \text{ donc } u_3 = \dots$$

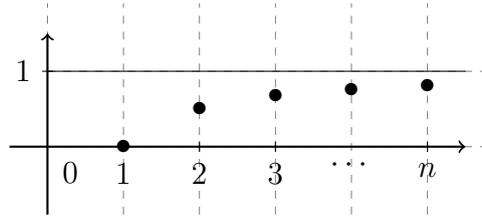
et ainsi de suite. On peut bien connaître la valeur de u_n pour n'importe quel n . On remarque qu'il est bien nécessaire de connaître le premier terme pour définir la suite !

2. Propriétés

2.1. Croissance.

- DÉFINITION 2.1. — Une suite $(u_n)_n$ est **croissante** si $u_n \leq u_{n+1}$, pour tout n .
 — Une suite $(u_n)_n$ est **décroissante** si $u_n \geq u_{n+1}$, pour tout n .
 — Une suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
 — Une suite $(u_n)_n$ est **majorée** si il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n .
 — Une suite $(u_n)_n$ est **minorée** si il existe un $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout n .
 — Une suite est dite **bornée** si elle est majorée et minorée.

EXEMPLE 2.2. La suite $u_n = 1 - 1/n$ est croissante et majorée par 1.



La suite $u_n = 1 - 1/n$ est croissante et majorée par 1

En effet, pour tout $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq 0$ car $n \leq n+1$.
 Donc $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n , et la suite est croissante. Comme $1 - \frac{1}{n}$ est toujours plus petit que 1, la suite est bien majorée par 1.

2.2. Limites.

DÉFINITION 2.3. La suite $(u_n)_n$ est **convergente** si il existe un $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

Une suite est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.

EXEMPLE 2.4. (1) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Alors $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

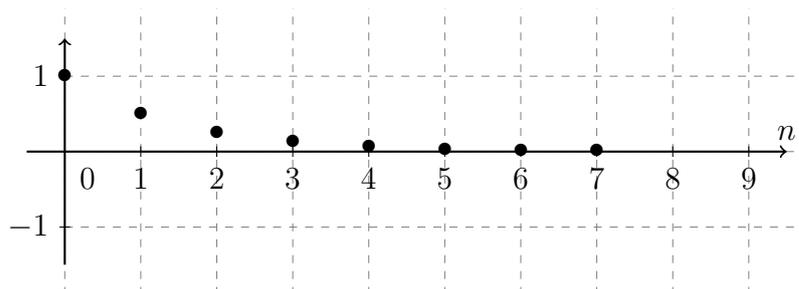
(2) Considérons une suite géométrique de raison r :

$$u_n = r^n, \quad n \geq 0, \quad \text{avec } u_0 = 1.$$

Alors :

- si $|r| < 1$, $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- si $|r| > 1$, u_n diverge (vers $\pm\infty$)
- si $r = 1$, la suite est stationnaire.

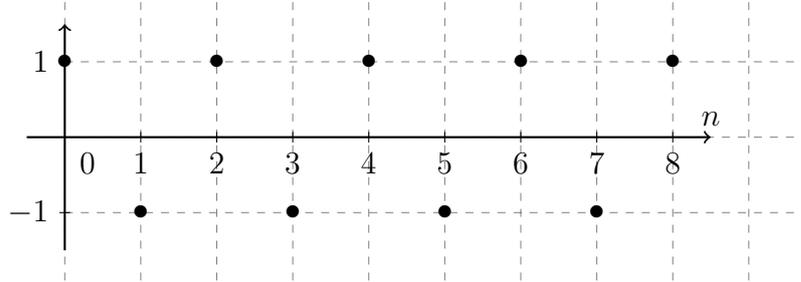
Par exemple, pour $r = 1/2$,



(3) Considérons la suite définie par

$$u_n = (-1)^n, \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

La suite $(u_n)_n$ diverge car oscille tout le temps ! En effet, $u_{2n} = +1$ et $u_{2n+1} = -1$.



On a la proposition bien connue suivante.

PROPOSITION 2.5. *Une suite croissante et majorée converge.*

EXEMPLE 2.6. Reprenons l'exemple de la suite $u_n = 1 - \frac{1}{n}$. On a vu qu'elle était croissante et majorée. Elle est donc bien convergente, et sa limite est clairement 1.

Les opérations autorisées sur les limites de suites sont les suivantes :

PROPOSITION 2.7. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes telles que $u_n \rightarrow u$ et $v_n \rightarrow v$ quand $n \rightarrow +\infty$. Alors*

$$u_n + v_n \rightarrow u + v,$$

et

$$u_n \times v_n \rightarrow u \times v.$$

Si de plus v_n est non nulle pour tout n et $v \neq 0$, alors

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{u}{v}.$$

3. Exemples de modélisation d'une croissance de population

3.1. Un modèle géométrique. On considère une population de bactérie dont l'effectif double tous les jours : chaque bactérie donne naissance à deux bactéries et meurt instantanément. On suppose qu'à l'instant 0 il y a une seule bactérie dans la population. Si on désigne par u_n le nombre d'individu de la population au jour n , on a donc

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n, \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme 1. On remarque que la population "explos" car $u_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Plus généralement, le taux de croissance de la population est donnée par la quantité :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$$

Ici, le taux de croissance est de 1. Plus généralement, si ce taux de croissance est constant et égal à b , on a

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = b, \quad \text{donc } u_{n+1} - u_n = bu_n,$$

et donc $u_{n+1} = (1 + b)u_n$, c'est-à-dire une (u_n) est une suite géométrique de raison $1 + b$.

Les suites géométriques permettent donc de modéliser la croissance d'une population à taux constant.

3.2. Croissance de population avec facteur limitant : modèle logistique. On considère une population dont le taux de croissance n'est plus constant, mais s'annule lorsqu'une valeur d'équilibre K est atteinte. Cette valeur correspond à la capacité d'accueil du milieu. Le taux de croissance est alors proportionnelle à la différence entre la population effective et la population permise par l'habitat, et s'écrit donc :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = a \frac{K - u_n}{K},$$

où $a \in \mathbb{R}$. Le taux de croissance s'annule bien quand l'effectif de la population atteint la valeur seuil K . On a alors

$$u_{n+1} - u_n = au_n \left(1 - \frac{u_n}{K}\right), \text{ et donc } u_{n+1} = u_n \left(1 + a - a \frac{u_n}{K}\right).$$

On a donc que la suite (u_n) est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = x(1 + a - a\frac{x}{K})$. Le comportement de la suite (u_n) dépend fortement de celui de la fonction f , c'est-à-dire de a et de K .

Exemple détaillé : Considérons par exemple le modèle suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \\ u_0 = 0.3 \end{cases}$$

donc dans cet exemple $a = 1$ et $K = 1$.

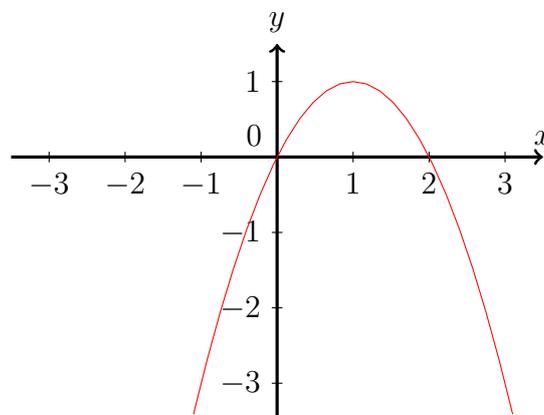
Soit f la fonction $f(x) = x(2 - x) = 2x - x^2$, de telle sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudions la fonction f . Sa dérivée est égale à

$$f'(x) = 2 - 2x.$$

Son tableau de variation est

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

et son graphe est :



Le comportement de la fonction f nous permet de déduire celui de u_n :

On a $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \geq 0$. Montrons cette propriété par récurrence.

- **Initialisation :** C'est vrai à $n = 0$, car $u_0 = 0.3$.

- **Hérédité :** Supposons que $0 < u_n < 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 1$. On a vu que $u_{n+1} = f(u_n)$. Or, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, et f est strictement croissante sur $]0, 1[$ car sa dérivée est

strictement positive sur $]0, 1[$. Ainsi on a $0 < f(x) < 1$ pour tout $0 < x < 1$. Donc si $0 < u_n < 1$, alors $0 < f(u_n) < 1$, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < 1$. La propriété d'hérédité est donc montrée.

Finalement, $0 < u_n < 1$ pour tout $n \geq 0$.

Montrons que $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante. Pour cela, montrons que $u_{n+1} - u_n > 0$. On a

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n - u_n^2 - u_n = u_n(1 - u_n).$$

Or $u_n > 0$, et $u_n < 1$ donne $1 - u_n > 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n = u_n(1 - u_n) > 0$, et $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc croissante. Remarquons que ceci découle aussi du fait que $f(x) - x > 0$ pour $x \in]0, 1[$.

Comme u_n croissante et majorée par 1, elle est donc convergente. Elle converge donc vers un certain l qui est un point fixe de f , c'est-à-dire que l vérifie $f(l) = l$. En effet f étant continue, on a quand $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & f(l). \end{array}$$

Or,

$$f(l) = l \Leftrightarrow l(1 - l) = 0, \text{ et donc } l = 0 \text{ ou } 1.$$

Comme u_n est croissante et positive, c'est forcément $l = 1$. La population atteint donc sa capacité maximale quand n tend vers l'infini.

Divers comportements peuvent apparaître par ce modèle, extinction de la population, comportement chaotique, etc. . .

Chapitre 3

Analyse réelle

1. Fonctions usuelles

1.1. Fonctions polynomiales. Ce sont les fonctions données par un polynôme, de la forme :

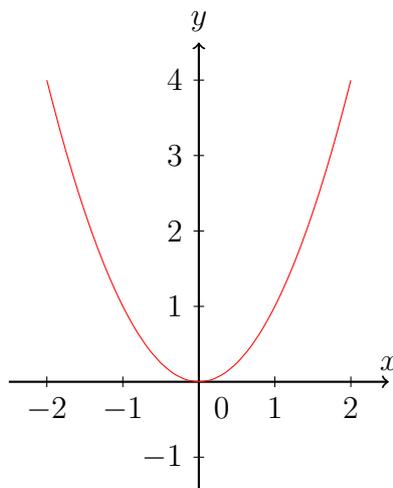
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

où l'entier n est le degré du polynôme, et les réels $\alpha_n, \dots, \alpha_0$ sont les coefficients du polynôme. Les fonctions polynomiales sont continues et dérivables sur tout \mathbb{R} .

Par exemple, la fonction carré :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto x^2$$

a pour **représentation graphique** :



Propriétés :

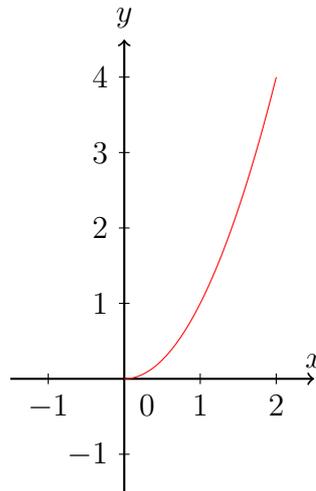
- Elle est positive, $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Sa dérivée est $f'(x) = 2x$.
- Elle est décroissante sur $] -\infty, 0[$ et croissante sur $]0, +\infty[$.
- Ses limites en l'infini sont : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
- On peut résumer toutes ces propriétés dans son **tableau de variation** :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

- Elle est **paire**, c'est-à-dire que $f(-x) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Elle n'est pas bijective! En effet, par exemple 4 a exactement deux antécédents : -2 et 2. On peut la « rendre » bijective en considérant sa **restriction** à \mathbb{R}_+ :

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2$$

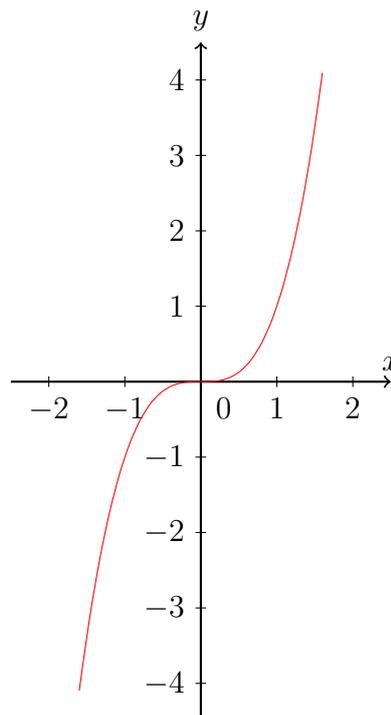
qui a alors pour représentation graphique :



Cette restriction à \mathbb{R}_+ est alors strictement croissante, et donc bijective de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ . Autre exemple, la fonction cube :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3.$$

C'est une fonction **impaire**, c'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Sa dérivée étant $f'(x) = 3x^2$, elle est strictement croissante, son graphe est :



et ses limites en l'infini sont : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

Plus généralement, les limites d'une fonction polynomiale sont données par celles de son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha_n x^n,$$

et donc la limite de f dépendra de la parité de n et du signe du coefficient α_n .

Par exemple, considérons la fonction

$$f(x) = -3x^5 + x^3 + 6x^2 - 3x + 1.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^5 = -3 \times (+\infty) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^5 = -3 \times (-\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Ceci se justifie de la sorte : on factorise par le terme de plus haut degré,

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^5 \left(1 + \frac{x^3}{-3x^5} + \frac{6x^2}{-3x^5} + \frac{-3x}{-3x^5} + \frac{1}{-3x^5} \right) \\ &= -3x^5 \left(1 - \frac{1}{3x^2} - 2\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{3x^5} \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0, \quad \text{pour tout } k > 0,$$

l'expression dans la parenthèse tend vers 1, et la limite de f en l'infini est bien donnée par son terme de plus haut degré.

1.2. Fonction inverse $x \mapsto 1/x$. C'est la fonction définie par

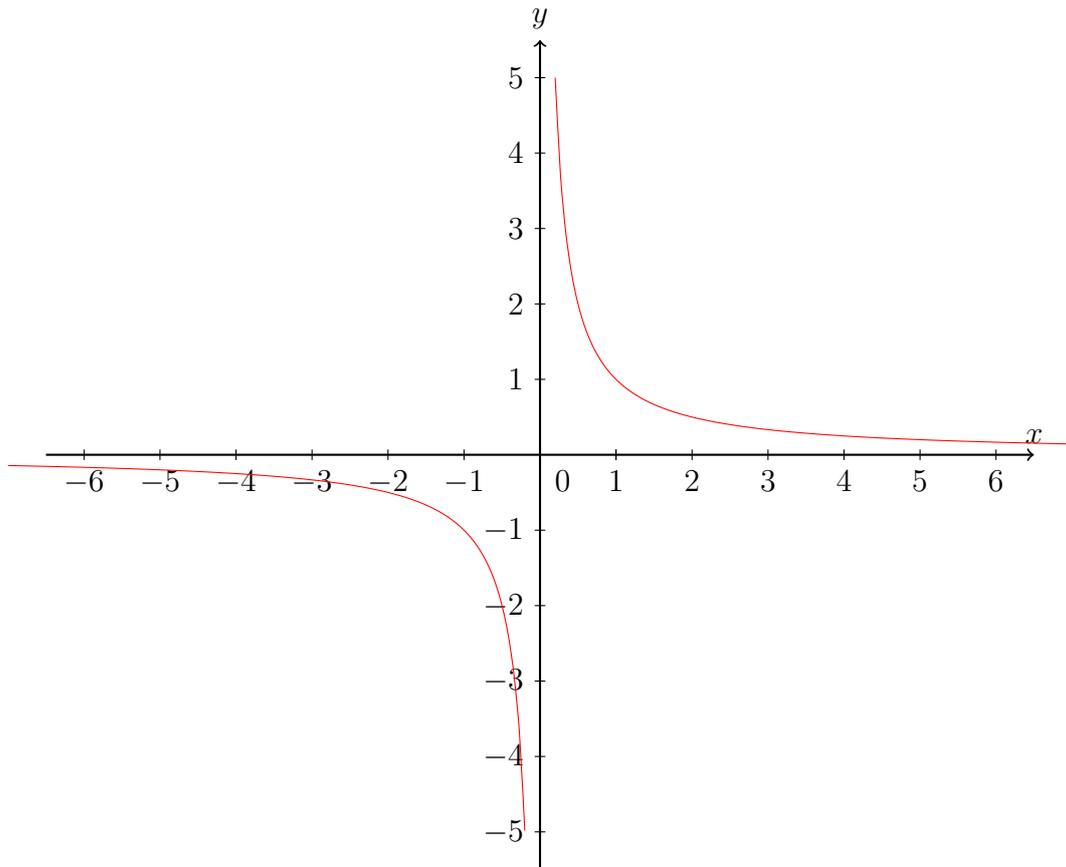
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Propriétés :

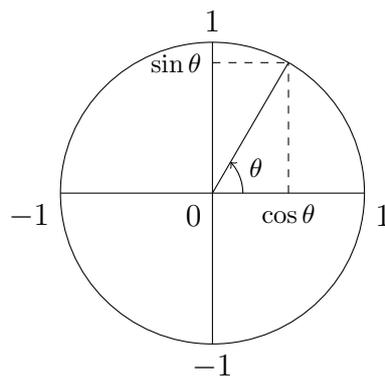
- Son domaine de définition est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Elle n'est pas définie en 0 ! Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.
- Elle est impaire : $f(-x) = -f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
- Sa dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
- Sa dérivée étant strictement négative, elle est strictement décroissante.
- Ses limites sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Représentation graphique :



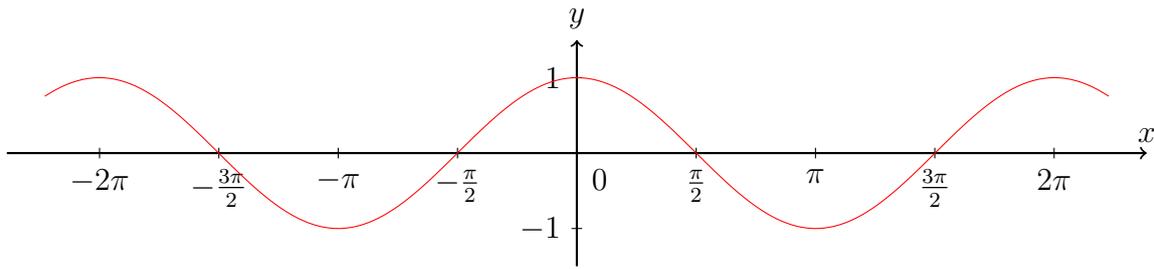
1.3. Fonctions trigonométriques. Les fonctions trigonométriques cosinus et sinus sont définies à partir du cercle trigonométrique :



La fonction cosinus est notée \cos :

$$\begin{aligned} \cos: \mathbb{R} &\rightarrow]-1, +1[\\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

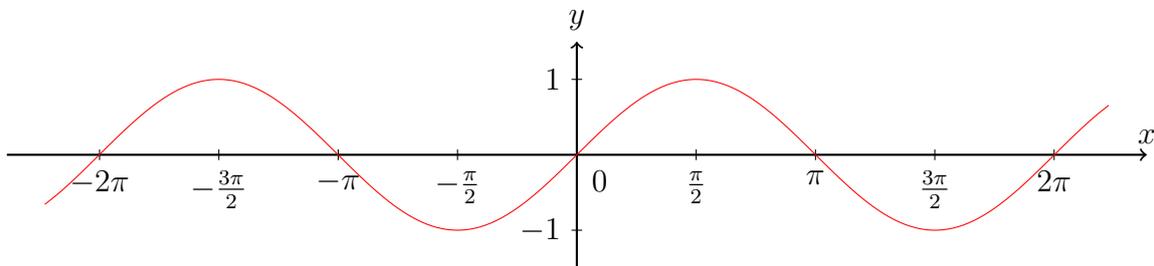
Représentation graphique :



La fonction sinus est notée \sin :

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\rightarrow]-1, +1[\\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

Représentation graphique :



Propriétés :

— Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Il suffit donc de connaître ces fonctions sur un intervalle de longueur 2π pour les connaître sur tout \mathbb{R} .

— $\sin'(x) = \cos(x)$

— $\cos'(x) = -\sin(x)$

Quelques formules trigonométriques :

— $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$

— $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$

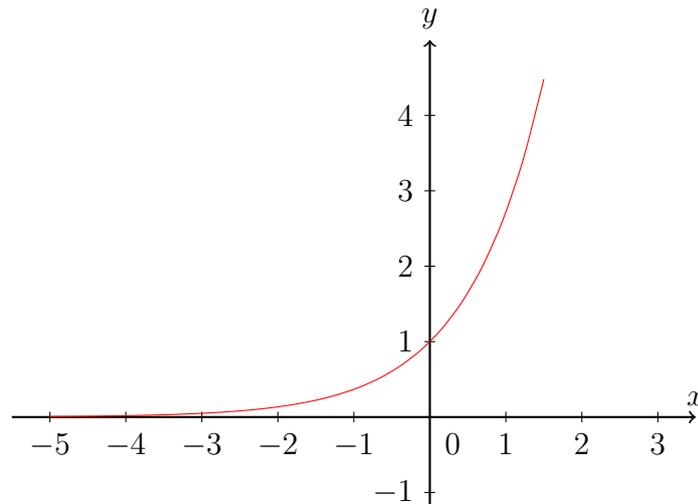
— etc,...

1.4. Fonctions exponentielle et logarithme. La fonction exponentielle est notée e ou \exp :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

avec $e = e^1 \approx 2,718$.

Représentation graphique :

**Propriétés :**

- L'exponentielle est définie, continue et dérivable sur tout \mathbb{R} .
- $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- Elle est strictement croissante (et donc bijective)
- $e^0 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- La dérivée de exp est égale à elle-même, $(e^x)' = e^x$. C'est une façon de définir l'exponentielle (il en existe d'autres que l'on abordera pas ici) : la fonction exp est l'unique fonction continue sur \mathbb{R} égale à sa dérivée et valant 1 en 0.

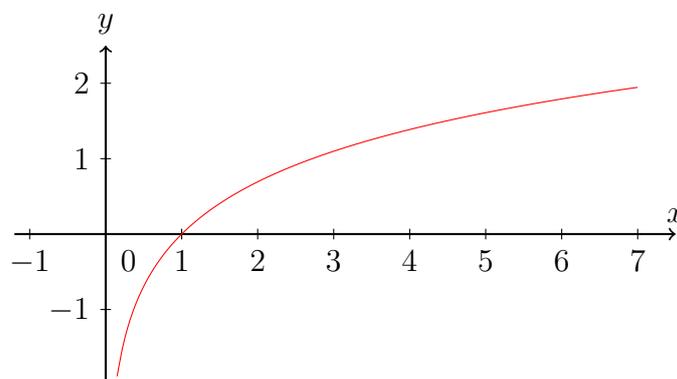
Formules : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{xy} = (e^x)^y$

La fonction logarithme népérien est notée \ln (parfois \log) :

$$\begin{aligned} \ln :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Attention, $\ln(x)$ n'a de sens que pour $x > 0$! C'est-à-dire que **son domaine de définition** est $]0, +\infty[$. Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.

Représentation graphique :**Propriétés :**

- strictement croissante (et donc bijective)
- $\ln(1) = 0$

- $\ln(e) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- La dérivée de \ln est : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Formules : Pour tous $x, y > 0$,

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

PROPOSITION 1.1. *Les fonctions exponentielles et logarithme népérien sont fonctions réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire*

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = \exp(y),$$

pour tout $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\exp(\ln(x)) = x, \text{ pour tout } x > 0$$

et

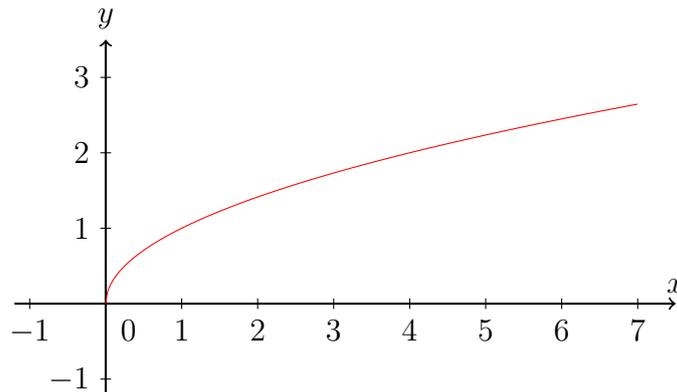
$$\ln(\exp(x)) = x, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1.5. Fonction racine carrée. C'est la bijection réciproque de la restriction de $x \mapsto x^2$ à \mathbb{R}_+ :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Elle est donc définie et à valeurs sur \mathbb{R}_+ , continue, dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$, et strictement croissante.

Représentation graphique :



2. Quelques généralités sur les fonctions : rappels et compléments

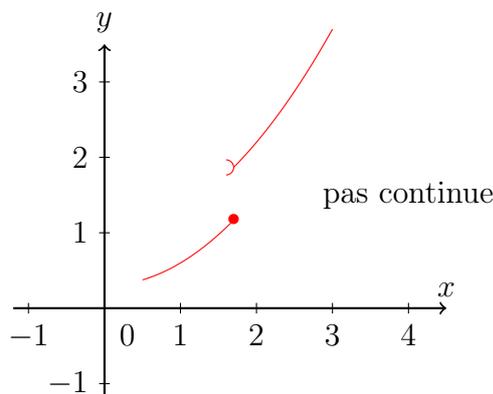
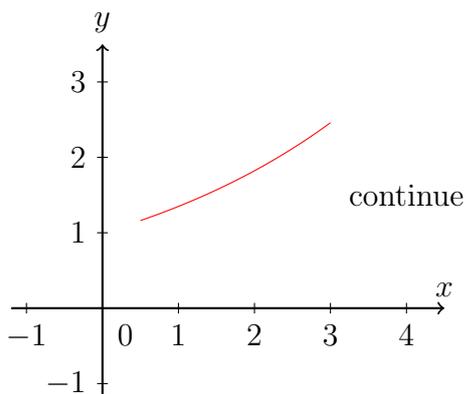
2.1. Continuité. Dans toute la suite, on notera \mathcal{D}_f le domaine de définition de f , c'est-à-dire l'ensemble des points x tel que $f(x)$ existe.

Rappelons la définition de continuité d'une fonction.

DÉFINITION 2.1. *Soit f une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est continue en x_0 si*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

« Le graphe de f peut se tracer sans lever le crayon ».



Rappelons quelques limites usuelles. On a déjà rappelé les limites des fonctions usuelles. Rappelons que l'on ne sait pas conclure quand à la limite des formes indéterminées : $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$. Néanmoins, dans les cas suivants, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

On sait aussi étudier certaines limites par croissances comparées : le principe est que l'exponentielle croît beaucoup plus vite que n'importe quel polynôme, et qu'un polynôme croît plus vite qu'un logarithme. En résumé, on a donc :

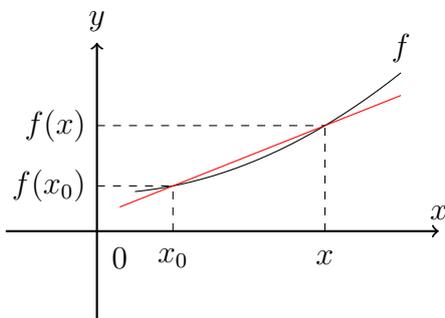
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0.$$

2.2. Dérivabilité. La notion de dérivée permet d'approcher localement (i.e. « autour d'un point ») la graphe d'une fonction par une droite.

DÉFINITION 2.2. Soit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. On appelle *taux d'accroissement de f entre x et x_0 la rapport*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

C'est la pente de la droite passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$.



Plus x est proche de x_0 , plus cette droite approche bien la courbe de f autour de x_0 .

DÉFINITION 2.3. Soit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite de son taux d'accroissement entre x et x_0 existe et est finie quand x tend vers x_0 , autrement dit

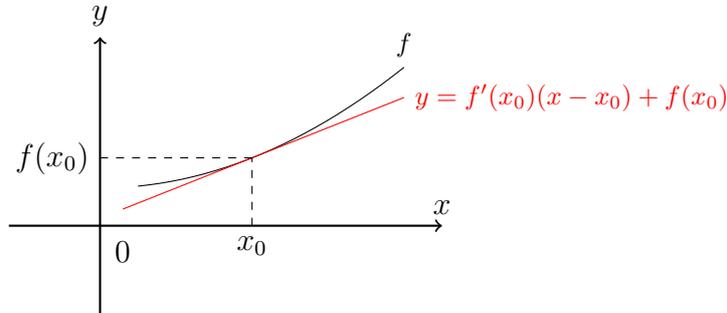
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie. On appelle $f'(x_0)$ cette limite, qui est alors la dérivée de f en x_0 .

Si f est dérivable en tout point de $]a, b[$, on dit que f est dérivable sur $]a, b[$, et on note $f' : x \mapsto f'(x)$ la fonction dérivée de f .

Interprétation géométrique : $f'(x_0)$ s'interprète comme la pente de la tangente à la courbe de f en x_0 , et l'équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



Rappel des dérivées usuelles : On a déjà rappelé les dérivées suivantes (à connaître!) :

$f(x)$	constante	$x^a, a \in \mathbb{R}$	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	ax^{a-1}	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$

EXEMPLE 2.4. Calculons la dérivée de $f : x \mapsto x^2$ à l'aide de la limite de son taux d'accroissements. On a

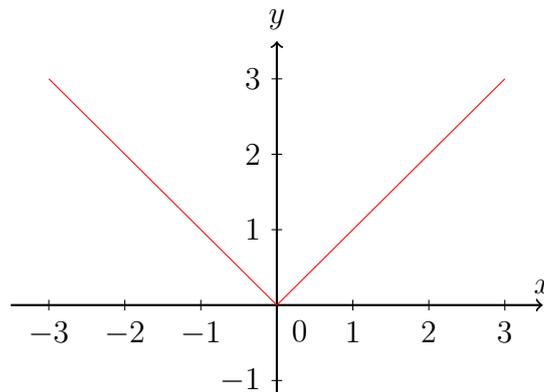
$$\frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2x_0.$$

On retrouve ainsi que $f'(x_0) = 2x_0$.

PROPOSITION 2.5. Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

En effet, le fait que la limite du taux d'accroissement de f existe implique que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Attention, la réciproque est fausse!!! Le contre-exemple bien connu est la fonction **valeur absolue** : $x \mapsto |x|$



qui est bien continue sur \mathbb{R} , mais n'est pas dérivable en 0.

2.3. Composée de deux fonctions. Soient f et g deux fonctions. On définit la composée de g par f , notée $f \circ g$, par

$$f \circ g : x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x)).$$

On voit donc que pour que $f \circ g(x)$ ait un sens, il faut que si $g(x)$ a un sens, i.e. $x \in \mathcal{D}_g$, alors $f(g(x))$ a aussi un sens, i.e. $g(x) \in \mathcal{D}_f$.

Attention : $f \circ g \neq g \circ f$!!!!

EXEMPLE 2.6. Soient

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & f: \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - 1 & x &\mapsto 1/x \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} g \circ f: \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} - 1 \end{aligned}$$

car $g(f(x)) = f(x) - 1 = \frac{1}{x} - 1$ est définie pour $x \neq 0$, et

$$\begin{aligned} f \circ g: \mathbb{R} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

car $f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x-1}$ est définie pour $x \neq 1$.

Dérivée d'une fonction composée : Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 , et on a :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x_0) \times g'(f(x_0)).$$

DÉMONSTRATION. Une idée de la preuve : sans être très rigoureux, on peut écrire

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

quand h est petit. Ainsi, le taux d'accroissement de $g \circ f$ s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} &\approx \frac{g(f(x_0) + hf'(x_0)) - g(f(x_0))}{h} \\ &= \frac{g(f(x_0) + hf'(x_0)) - g(f(x_0))}{h \times f'(x_0)} \times f'(x_0) \\ &\rightarrow g'(f(x_0)) \times f'(x_0), \end{aligned}$$

quand $h \rightarrow 0$. □

On en déduit les formules de dérivations bien connues suivantes : si u et v sont deux fonctions dérivables,

$$\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{1}{v}\right)' &= -\frac{v'}{v^2} \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ \exp'(u) &= \exp(u) \times u' \\ \ln'(u) &= \frac{u'}{u} \end{aligned}$$

On en déduit aussi une formule pour la dérivée d'une fonction réciproque. Soit f une fonction bijective et dérivable, de dérivée non nulle, et notons f^{-1} sa bijection réciproque. Alors,

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Il suffit pour cela d'appliquer la formule de la dérivée d'une fonction composée à $f^{-1} \circ f(x) = x$.

EXEMPLE 2.7. Retrouvons la dérivée de la fonction logarithme, qui est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Donc soit $f(x) = \exp x$ et $f^{-1}(x) = \ln(x)$. On sait que $\exp'(x) = \exp(x)$. On a alors

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

EXEMPLE 2.8. (1) Considérons la fonction $f: x \mapsto \sin(x^2 + 3)$. Elle est définie sur \mathbb{R} , et est la composée des fonctions $x \mapsto x^2 + 3$ et $x \mapsto \sin x$. Elle est bien dérivable comme composée de fonctions dérivables et sa dérivée vaut alors

$$f'(x) = \cos(x^2 + 3) \times (2x).$$

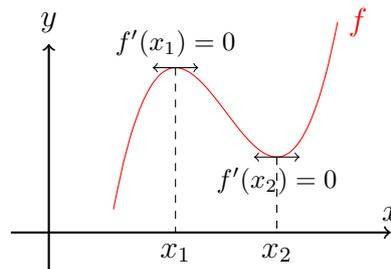
(2) Considérons la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\ln x}$. C'est donc la composée de $x \mapsto \ln x$ et de $x \mapsto \frac{1}{x}$. Le logarithme n'est définie que pour $x > 0$, et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie en dehors de 0. Le domaine de définition de f est alors

$$\mathcal{D}_f = \{x > 0 \mid \ln x \neq 0\} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$$

Elle est continue et dérivable sur \mathcal{D}_f comme composée de fonctions continues et dérivables, et sa dérivée vaut

$$f'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} \times \frac{1}{x}.$$

2.4. Étude d'extrema. L'étude de la dérivée permet notamment d'étudier les extrema (minimum ou maximum) d'une fonction. En effet, soit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in]a, b[$. Si f admet un extremum local en x_0 (c'est-à-dire dans un "intervalle autour" de x_0), alors $f'(x_0) = 0$.

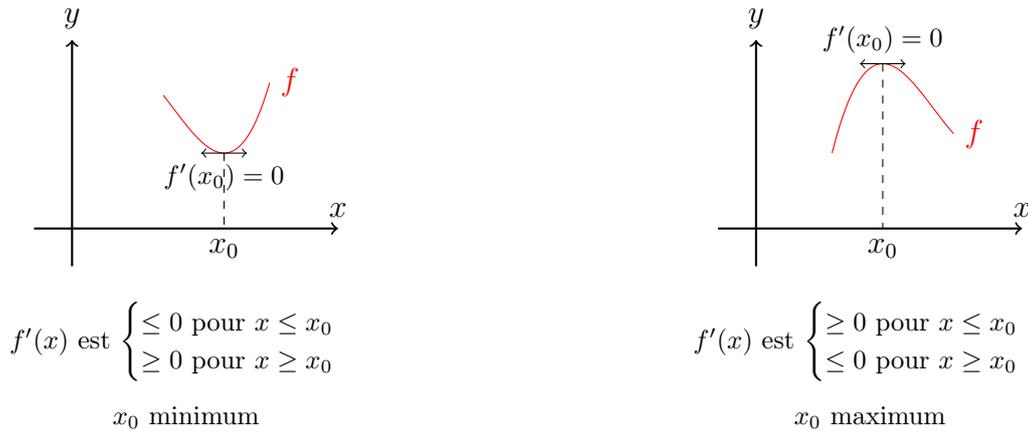


Sur l'exemple ci-dessus, x_1 est un maximum local, et x_2 un minimum local. On voit alors que la pente de la tangente à la courbe de f en x_1 et x_2 est bien nulle, ce qui exprime le fait que la dérivée s'annule.

Notons que la dérivée d'une fonction peut s'annuler en un point x_0 sans que x_0 soit un extremum. C'est le cas par exemple pour $x \mapsto x^3$. Sa dérivée s'annule en 0, mais 0 n'est ni un maximum ni un minimum (voir le graphe de $x \mapsto x^3$).

Mais si $f'(x_0) = 0$ et si la dérivée de f change de signe en passant par x_0 , alors f admet un extremum local. En effet, si f' est positive alors f est croissante, et si f' est négative alors f est décroissante.

Ceci permet alors la recherche d'extrema : on cherche les points x qui annullent la dérivée de f , puis on regarde le signe de la dérivée autour de x .



EXEMPLE 2.9. On a mesuré l'amplitude de l'habitat y (c'est-à-dire la variation d'altitude que peut supporter une espèce), ainsi que l'altitude moyenne, pour des reptiles dans une zone de moyenne montagne. À partir des résultats observés, on modélise l'amplitude d'habitat en fonction de l'altitude moyenne (le tout en mètres) par

$$y(x) = -0.001x^2 + 1.4x - 60.$$

Quelle est l'altitude moyenne d'une espèce dont l'amplitude d'habitat est maximale ?

On cherche les possibles extrema de y . La dérivée de y est alors

$$y'(x) = -0.002x + 1.4,$$

qui s'annule en $x_0 = 700$. De plus, $y'(x) \leq 0$ pour $x \leq 700$ et $y'(x) \geq 0$ pour $x \geq 700$, ainsi x_0 est un maximum (global ici). On en conclut que $x_0 = 700$ est bien l'altitude moyenne cherchée pour laquelle l'amplitude d'habitat est maximale.

2.5. Fonctions à plusieurs variables. On peut avoir besoin de considérer des fonctions qui prennent plusieurs arguments. Par exemple, la pression dépend du volume et de la température, etc. . .

DÉFINITION 2.10. Une fonction réelle f de deux variables est une application

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y). \end{aligned}$$

Son domaine de définition est le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 des couples (x, y) tel que $f(x, y)$ ait un sens.

EXEMPLE 2.11. La fonction

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

est définie sur le disque $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

REMARQUE 2.12. On a donc que :

- à y fixé, $f_1: x \mapsto f(x, y)$ définit une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,
- à x fixé, $f_2: y \mapsto f(x, y)$ définit une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Les fonctions f_1 et f_2 sont appelées applications partielles de f . On peut alors étudier leur continuité, dérivabilité, . . . Dans le cas de la dérivée, on parle de dérivée partielle.

DÉFINITION 2.13. La dérivée partielle de f en (x_0, y_0) par rapport à la première variable, notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

est la dérivée de $x \mapsto f(x, y_0)$ en x_0 à y_0 fixé.

De même, la dérivée partielle de f en (x_0, y_0) par rapport à la deuxième variable, notée

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

est la dérivée de $y \mapsto f(x_0, y)$ en y_0 à x_0 fixé.

EXEMPLE 2.14. Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3 + 1$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 3y^2$$

Intégration

1. Primitives

Dans toute la suite, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

DÉFINITION 1.1. **Une primitive de f est une fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.**

La recherche de primitive est donc « l'opération réciproque » de la dérivation.

On notera souvent F par $\int f$ ou $\int f(x)dx$ ou $\int^x f(t)dt$.

Les primitives sont définies à une constante près, c'est-à-dire que si F est une primitive de f , alors $F + \lambda$ est encore une primitive de f , pour n'importe quelle constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f , alors $F_1 - F_2$ est une constante.

Primitives usuelles : À une constante près, on a

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} f(x) & 1 & x^a, a \neq -1 & \frac{1}{x} & e^x & \cos x & \sin x \\ \hline F(x) & x & \frac{x^{a+1}}{a+1} & \ln|x| & e^x & \sin x & -\cos x \end{array}$$

Il suffit de dériver la deuxième ligne pour s'en convaincre.

EXEMPLE 1.2. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est bien $x \mapsto \ln|x|$, définies pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En effet, si $x > 0$, alors

$$\ln|x| = \ln x, \quad \text{et donc } \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Si $x < 0$, alors

$$\ln|x| = \ln(-x), \quad \text{et donc } \ln'(-x) = \frac{1}{-x} \times (-1) = \frac{1}{x}.$$

PROPOSITION 1.3. *Si F (resp. G) est une primitive de f (resp. g), et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.*

DÉMONSTRATION. On a :

$$(\lambda F + \mu G)' = \lambda f + \mu g.$$

□

2. Intégrale

DÉFINITION 2.1. *L'intégrale de f sur $[a, b]$ est le nombre réel*

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

où F est n'importe quelle primitive de f .

De la définition, découle immédiatement les propriétés suivantes :

PROPOSITION 2.2. *Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.*

(1)

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

(2)

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

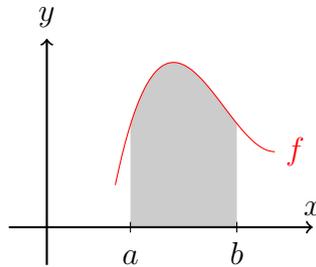
(3) Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(4) Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

DÉMONSTRATION. Par exemple, pour montrer la dernière relation, il suffit de voir que si F est une primitive de f , alors par définition $F' = f$ et donc $F' \geq 0$. Donc F est croissante et $F(b) \geq F(a)$. \square

REMARQUE 2.3. **Interprétation géométrique :** L'intégrale de f entre a et b , $\int_a^b f(t)dt$ s'interprète comme l'aire sous la courbe de f :



La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ est alors $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$.

2.1. Techniques de calculs.

PROPOSITION 2.4 (**Intégration par parties**). Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

DÉMONSTRATION. Par dérivation, d'un produit de deux fonctions on a

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

donc

$$uv' = (uv)' - u'v$$

et on « prend » l'intégrale

$$\int uv' = \underbrace{\int (uv)'}_{=uv} - \int u'v$$

\square

EXEMPLE 2.5. Calculons

$$\int_0^{\pi/3} x \cos x dx,$$

en utilisant une IPP. Posons :

$$\begin{aligned} U &= x & U' &= 1 \\ V &= \sin x & V' &= \cos x \end{aligned}$$

On cherche donc à calculer l'intégrale $\int_0^{\pi/3} U(x)V'(x)dx$. Par IPP, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} U(x)V'(x)dx &= [U(x)V(x)]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} U'(x)V(x)dx \\ &= [x \sin x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} - [-\cos x]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.6 (**Changement de variable**).

$$\int f'(u(t))u'(t)dt = f(u(t)).$$

DÉMONSTRATION. Ceci découle de la dérivée d'une fonction composée :

$$(f \circ u)'(t) = f'(u(t))u'(t),$$

et on prend l'intégrale. □

EXEMPLE 2.7.

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \ln |u(t)| + \text{cste}$$

En effet, si on note $f(x) = \ln |x|$, on a $f'(x) = \frac{1}{x}$, et l'intégrale ci dessus est bien de la forme

$$\int f'(u(t))u'(t)dt,$$

on applique donc la formule du changement de variable.

Dans la pratique, il est d'usage de considérer u comme une variable, et non comme une fonction de t . Le terme $u'(t)dt$ qui apparaît dans la formule du changement de variable s'écrit alors « du ». On peut penser à la notation souvent utilisée en physique pour la dérivée :

$$u'(t) = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = u'(t)dt.$$

La formule du changement de variable se réécrit alors :

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

EXEMPLE 2.8. Par exemple, calculons $\int_0^2 xe^{x^2} dx$. Effectuons le changement de variable $u = x^2$, sous entendu u est une fonction de x . Remarquons que ce changement de variable est bien bijectif, car $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, 2]$. On a alors $du = u'(x)dx = 2x dx$, et l'intégrale est alors

$$\int_0^2 xe^{x^2} dx = \int_0^4 \frac{1}{2} e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_0^4 = \frac{1}{2} (e^4 - 1).$$

Équations différentielles

1. Introduction

Considérons une dynamique de population, dont on désigne l'effectif au temps t par la quantité $N(t)$. N est donc une fonction de la variable t .

L'accroissement de cette population est alors fonction des naissances, morts ou par exemple migration des individus vers ou depuis un autre environnement. Notons $\Delta N(t) = N(t_2) - N(t_1)$ l'accroissement de cette population pendant un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$. Considérons un modèle simple où $\Delta N(t)$ est proportionnelle à l'effectif et à la longueur de l'intervalle de temps pendant lequel on mesure cet accroissement. On a alors

$$\Delta N(t) = \lambda N(t) \Delta t,$$

où λ est un coefficient de proportionnalité. Lorsque Δt est très petit, i.e. $\Delta t \rightarrow 0$, le taux d'accroissement

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$$

correspond à la dérivée de N , et on obtient l'équation suivante :

$$N'(t) = \lambda N(t).$$

Cette équation est dite « différentielle » car c'est une équation entre une fonction N que l'on cherche à déterminer, et sa dérivée N' . On va donner une définition générale de la notion d'équation différentielle, et donner des méthodes pour résoudre une classe particulière d'équations.

Le modèle simple $N'(t) = \lambda N(t)$ est appelé modèle de Malthus. Il a par exemple été utilisé pour décrire l'évolution de la population mondiale. On sait résoudre explicitement ce modèle : connaissez-vous une fonction N vérifiant cette équation ?

2. Définition générale

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle $]c, d[$ de \mathbb{R} (c, d peuvent prendre des valeurs infinies).

DÉFINITION 2.1. Une équation différentielle d'ordre k en la fonction f est une équation faisant intervenir $t, f(t), \dots$, les dérivées successives de f jusqu'à la k^e , de la forme :

$$(E) \quad F\left(t, f(t), f'(t), \dots, f^{(k)}(t)\right) = 0,$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

On appelle solution de l'équation différentielle (E) toute fonction f , k -fois dérivable sur I vérifiant la relation (E).

Résoudre (E) consiste à trouver l'ensemble des solutions de (E).

EXEMPLE 2.2. (1) $t^4 f^{(3)}(t) + f'(t) \cos(f(t)) = e^t$, équation différentielle d'ordre 3.

(2) $\frac{f''(t)}{f(t)^2} = \ln t$, équation différentielle d'ordre 2.

(3) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$. On écrit souvent y pour $y(x)$, la variable s'écrivant souvent x ou t .

Il est en général très difficile de résoudre des équations différentielles, on va s'intéresser par la suite à des équations différentielles particulières que l'on sait résoudre.

3. Equations différentielles linéaires du premier ordre.

DÉFINITION 3.1. *Les équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre sont de la forme :*

$$(E1) \quad a(t)f'(t) + b(t)f(t) = g(t)$$

où a, b, g sont des fonctions continues sur I , et a ne s'annule pas sur I .

Si g est la fonction nulle, on dit que (E1) est homogène.

Si g n'est pas identiquement nulle, on appelle équation différentielle homogène associée à (E1), l'équation

$$a(t)f'(t) + b(t)f(t) = 0.$$

On va donner une méthode de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre. Elle se base sur le principe suivant :

THÉOREME 3.2 (Principe de superposition). *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E1) est de la forme :*

solutions de l'équation homogène associée à (E1) + **une solution particulière** de (E1).

Le principe de superposition nous dit donc que si on connaît une solution y_p de (E1), alors n'importe quelle solution y de (E1) s'écrira sous la forme

$$y = y_h + y_p,$$

où y_h est une solution de l'équation homogène associée à (E1).

3.1. Méthode de résolution des équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre.

3.1.1. *Résolution de l'équation homogène.* Commençons par le cas où les coefficients de l'équation différentielle sont constant, c'est-à-dire on considère l'équation différentielle

$$ay'(x) + by(x) = 0,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On a alors

$$y'(x) = -\frac{b}{a}y(x).$$

Les solutions de cette équation sont données par les fonctions $y(x) = Ke^{-\frac{b}{a}x}$, avec K une constante dans \mathbb{R} . En effet, écrivons formellement

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{b}{a}$$

en supposant qu'on a le droit de diviser par $y(x)$, c'est-à-dire que y ne s'annule pas. C'est en fait effectivement le cas, sinon y est la solution identiquement nulle. En intégrant l'expression ci-dessus, on obtient

$$\ln |y(x)| = -\frac{b}{a}x + C, \quad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

En prenant l'exponentielle, on obtient bien $y(x) = Ke^{-\frac{b}{a}x}$ (avec $K = \pm e^C$).

Dans le cas où $a(x)$ et $b(x)$ sont non constants, on fait exactement la même chose : on écrit

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

et donc les solutions sont de la forme

$$y(x) = Ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Il s'agit donc de déterminer une primitive de $-\frac{b(x)}{a(x)}$ à l'aide du calcul des primitives. On a donc obtenu l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E1).

Supposons que l'on connaisse une solution particulière de (E1), que l'on note y_p . On a donc que y_p vérifie

$$a(x)y_p'(x) + b(x)y_p(x) = g(x).$$

Notons y_h les solutions de l'équation homogène, et posons $y = y_h + y_p$. On a alors

$$\begin{aligned} a(x)y'(x) + b(x)y(x) &= \underbrace{a(x)y_h'(x) + b(x)y_h(x)}_{=0} + \underbrace{a(x)y_p'(x) + b(x)y_p(x)}_{=g(x)} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Ainsi, le principe de superposition nous donne bien l'ensemble des solutions de (E1).

Pour déterminer une solution particulière, on peut parfois la « deviner ». Elle peut être guidée par le problème concret lié à l'équation différentielle.

Sinon, il existe une méthode dite **méthode de variation de la constante** :

Notons $\lambda(t)$ une primitive de $-\frac{b(t)}{a(t)}$. Les solutions de l'équation homogène associée à (E1) sont donc de la forme :

$$y(t) = Ke^{\lambda(t)}, \quad \text{où } K \text{ est une constante.}$$

La méthode de variation de la constante consiste à chercher les solutions de (E1) sous la forme

$$y(t) = K(t)e^{\lambda(t)},$$

avec maintenant K une fonction de t (d'où le nom de la méthode!).

On a alors

$$\begin{aligned} y'(t) &= K'(t)e^{\lambda(t)} + K(t)\lambda'(t)e^{\lambda(t)} \\ &= K'(t)e^{\lambda(t)} - \frac{b(t)}{a(t)}K(t)e^{\lambda(t)}. \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t)$, on obtient alors

$$a(t)K'(t)e^{\lambda(t)} - \cancel{b(t)K(t)e^{\lambda(t)}} + \cancel{b(t)K(t)e^{\lambda(t)}} = g(t).$$

Ainsi,

$$K'(t) = \frac{g(t)}{a(t)e^{\lambda(t)}},$$

et théoriquement le calcul des primitives nous donne l'expression de $K(t)$ à une constante près. Les solutions de (E1) sont donc de la forme

$$y(t) = (K(t) + K)e^{\lambda(t)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Finissons cette partie par l'énoncé du théorème de Cauchy.

THÉOREME 3.3. *Pour tout $t_0 \in I$, et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} a(t)f'(t) + b(t)f(t) = g(t) \\ f(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où a, b, g sont des fonctions continues tel que a ne s'annule pas sur I .

En effet, se donner la condition initiale $f(t_0) = y_0$ permet de déterminer la constante K dans l'expression générale des solutions de (E1), et ainsi la solution est bien unique.

EXEMPLE 3.4.

(1) $y' + 2y = e^t$ sur \mathbb{R} .

L'équation homogène associée est

(H)
$$y' + 2y = 0$$

dont les solutions sont de la forme $y_h(t) = Ke^{-2t}$, $K \in \mathbb{R}$. Il n'est pas très difficile de deviner une solution particulière : comme $(e^x)' = e^x$, une solution particulière est donnée par un multiple de l'exponentielle αe^t . En reportant dans l'équation on a

$$\alpha e^t + 2\alpha e^t = e^t, \quad \text{ainsi } \alpha = \frac{1}{3}.$$

L'ensemble des solutions est alors $y(t) = Ke^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$, $K \in \mathbb{R}$. Si on ne devine pas aisément la solution particulière, appliquons la méthode de variation de la constante, histoire d'illustrer la méthode. On cherche donc les solutions sous la forme

$$y(t) = K(t)e^{-2t}.$$

On injecte y dans l'équation différentielle :

$$y'(t) + 2y(t) = K'(t)e^{-2t} - 2K(t)e^{-2t} + 2K(t)e^{-2t} = e^t.$$

Donc $K'(t) = \frac{e^t}{e^{-2t}} = e^{3t}$. En intégrant, on trouve $K(t) = \frac{1}{3}e^{3t} + K$. Ainsi les solutions sont bien

$$y(t) = \left(\frac{1}{3}e^{3t} + K \right) e^{-2t} = \frac{1}{3}e^t + Ke^{-2t}$$

(2) $y' - y = x^2$, sur \mathbb{R} .

Equation homogène : $y' - y = 0$, dont les solutions sont $y(x) = Ke^x$. Il est possible de deviner qu'une solution particulière est de la forme $ax^2 + bx + c$ par une considération de degré. On injecte dans l'équation :

$$2ax + b - ax^2 - bx - c = x^2.$$

Deux polynômes étant égaux si ils ont même degré et mêmes coefficients, on en déduit que $a = -1$, $2a - b = 0$ et $b - c = 0$. Ainsi, $c = b = -2$, et une solution particulière est $y_p(x) = -x^2 - 2x - 2$. Remarquons qu'on peut toujours vérifier que l'on ne s'est pas trompé, en vérifiant que y_p satisfait bien l'équation différentielle :

$$y_p' - y_p = -2x - 2 - (-x^2 - 2x - 2) = x^2, \quad \text{c'est bon !}$$

A titre d'exercice, retrouver cette solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante.

(3) On note $u(t)$ la tension aux bornes d'un condensateur au temps t . u obéit alors à l'équation

$$\tau \frac{du}{dt} + u = E,$$

où τ et E sont des constantes. On suppose que le condensateur n'est pas chargé à l'instant $t = 0$.

On est en présence ici du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \tau u' + u = E \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

La condition initiale $u(0) = 0$ interprète le fait que le condensateur ne soit pas chargé à $t = 0$.

La solution particulière est ici évidente : $u_p(t) = E$. Ainsi, les solutions sont de la formes

$$u(t) = Ke^{-\frac{1}{\tau}t} + E.$$

La condition initiale nous permet alors de déterminer la constante K , et ainsi l'unique solution du problème de Cauchy. En effet,

$$u(0) = K + E = 0 \Rightarrow K = -E.$$

Ainsi, la solution est $u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{1}{2}\tau t}\right)$.

(4) $y' + 2xy = 1$ sur \mathbb{R} .

L'équation homogène est $y' + 2xy = 0$, dont les solutions sont de la forme

$$y(x) = Ke^{-x^2}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante. Cherchons une solution sous la forme

$$y(x) = K(x)e^{-x^2}, \quad \text{avec } K \text{ une fonction de } x.$$

En reportant dans l'équation, on obtient :

$$K'(x) = e^{x^2},$$

ainsi K est donnée à une constante près par la primitive de e^{x^2} . Mais on ne connaît pas d'expression explicite à cette primitive! La méthode de variation de la constante n'est donc pas une recette miracle. . .

EXEMPLE 3.5. On veut dater les restes d'ossements trouvés lors de fouilles archéologiques sur la commune de Poupry. On utilise pour cela la méthode de datation au carbone 14 dont le principe est le suivant.

Tout être vivant échange du carbone avec son environnement, et lorsqu'il meurt, il ne reçoit plus de C^{14} et celui qu'il contient va se désintégrer peu à peu selon la loi de décroissance :

$$Q'(t) = -\mu Q(t)$$

où $Q(t)$ est le nombre d'éléments radioactifs à l'instant t , et $Q'(t)$ représente le taux de dégénérescence radioactive. La constante μ est la constante de désintégration du C^{14} . Les solutions de l'équation sont alors

$$Q(t) = Ke^{-\mu t}, \quad \text{où } K = \text{cste.}$$

Notons t_0 la date de la mort de l'organisme. La constante μ est caractérisée par $T_{1/2}$ le temps de demi-vie du C^{14} , c'est-à-dire la durée nécessaire pour que la moitié des éléments radioactifs aient disparu. On estime que $T_{1/2} = 5730$ ans (± 40) selon des calculs de physique des particules (datant de 1961). On a donc

$$Q(t_0 + T_{1/2}) = \frac{Q(t_0)}{2},$$

ce qui donne

$$Ke^{-\mu(t_0 + T_{1/2})} = K \frac{e^{-\mu t_0}}{2}.$$

En simplifiant, on a donc $e^{-\mu T_{1/2}} = \frac{1}{2}$, ainsi en prenant le logarithme, on obtient

$$\mu = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ ans}^{-1}.$$

On mesure alors par spectromètre de masse la concentration de C^{14} des restes trouvés à l'instant $t = 2014$, c'est-à-dire le rapport $\frac{Q(t)}{Q(t_0)}$.

Si par exemple, on mesure $\frac{Q(t)}{Q(t_0)} = 75\%$, alors

$$Ke^{-\mu t} = 0,75Ke^{-\mu t_0}$$

d'où,

$$t - t_0 = -\frac{\ln 0,75}{\mu} \approx 2380 \text{ ans.}$$

Ainsi, $t_0 \approx -366$ ans (période de la Tène, second âge du fer).

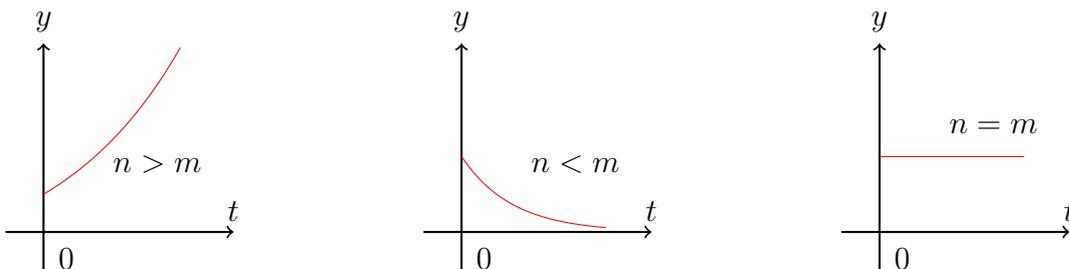
4. Exemples d'évolution de population

4.1. Modèle de Malthus. C'est le modèle le plus simple, où le taux de croissance de la population est constant. Notons y l'effectif de la population. L'équation différentielle satisfaite par y est alors

$$y'(t) = (n - m)y(t),$$

où n est le taux de natalité, m le taux de mortalité, $t \in [0, +\infty[$ représente le temps. La solution de l'équation est donc donnée par :

$$y(t) = y(0)e^{(n-m)t}, \quad t \in [0, +\infty[.$$



Bien entendu, quand le taux de natalité n est plus grand que le taux de mortalité m , la population croît, quand $n < m$ la population décroît, et quand $n = m$, la population est constante !

Ce modèle est limité car il ne tient pas compte des capacités de l'environnement.

4.2. Modèle de Verhulst (ou modèle logistique). L'idée du modèle logistique est de remplacer le taux constant $r = n - m$ du modèle de Malthus par un taux variable qui dépend de la taille de la population et de la capacité de l'environnement. On considère donc l'équation différentielle sur $[0, +\infty[$

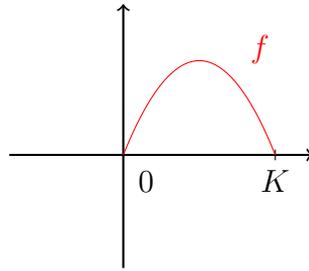
$$y'(t) = r \left(1 - \frac{y(t)}{K} \right) y(t)$$

où K est une constante qui représente la capacité biotique de l'habitat, et r un taux constant.

Remarquons que cette équation est non-linéaire : $y' = ry - r\frac{y^2}{K}$. Les méthodes vues dans le cours ne s'appliquent pas ici.

Notons néanmoins que lorsque la taille de la population est très inférieure à la capacité de l'environnement, i.e. $y(t) \ll K$, si on néglige le facteur $\frac{y(t)}{K}$, on retrouve le modèle de Malthus. De plus, lorsque $y(t) \approx K$, on a $1 - \frac{y(t)}{K} \approx 0$, et la population devient constante et tend vers la capacité biotique.

Même sans l'expression explicite de y , on peut comprendre le comportement du modèle. Posons $f(y) = ry(1 - y/K)$, de telle sorte que $y' = f(y)$.



On voit que $f(y) > 0$ quand $y < K$ et $f(y) < 0$ quand $y > K$. Ainsi, quand y est inférieur à sa capacité, y croît, et quand y est supérieur à sa capacité, y décroît. De plus, le maximum de f est atteint pour $y = K/2$, c'est donc lorsque la taille de la population est égale à la moitié de sa capacité biotique que sa croissance est la plus forte.

Il est tout de même possible de résoudre explicitement cette équation différentielle. Pour cela, on se ramène à une équation linéaire par un changement de variable. Posons

$$z(t) = \frac{1}{y(t)}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{-y'}{y^2} = -\frac{ry - \frac{r}{K}y^2}{y^2} = -r\frac{1}{y} + \frac{r}{K} \\ &= -rz(t) + \frac{r}{K}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle satisfaite par z est cette fois-ci linéaire! Et on sait la résoudre, on trouve :

$$z(t) = Ce^{-rt} + \frac{1}{K}, \quad \text{où } C = \text{constante},$$

ce qui permet d'en déduire y :

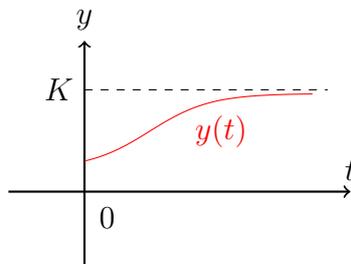
$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{K} + Ce^{-rt}}.$$

Si on a une condition initiale de la forme $y(0) = y_0$, on obtient alors $C = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{K}$. Finalement,

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{K} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{K}\right)e^{-rt}} = \frac{Ky_0}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}.$$

Remarquons que quand $t \rightarrow +\infty$, $y(t) \rightarrow K$, la population tend vers la capacité du milieu.

Le graphe de y est de la forme :



4.3. Modèle de Gompertz. Ce modèle est similaire au modèle précédent, mais la croissance est plus rapide :

$$y'(t) = ry(t) \ln \left(\frac{K}{y(t)} \right).$$

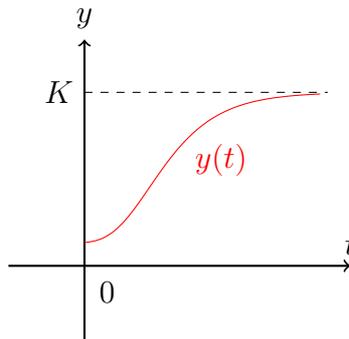
Là encore, on peut commencer par analyser le modèle. Quand $y < K$, $\frac{K}{y} > 1$, et donc $\ln(\frac{K}{y}) > 0$, et la population croît. De même, quand $y > K$, $\ln(\frac{K}{y}) < 0$, et la population décroît.

On peut ici aussi résoudre explicitement le modèle bien qu'il ne soit pas linéaire. On pose $z(t) = \ln(\frac{K}{y(t)})$, alors

$$z'(t) = -\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{ry(t)\ln(K/y(t))}{y(t)} = -rz(t).$$

Ainsi, l'équation différentielle en z est linéaire, de solution $z(t) = Ce^{-rt}$, et finalement $y(t)$ est de la forme

$$y(t) = Ke^{Ce^{-rt}}, \quad \text{avec } C = \ln\left(\frac{y_0}{K}\right).$$



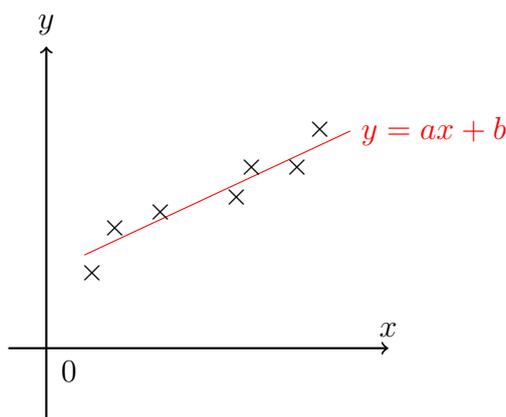
Compléments

1. Méthode des moindres carrés

On considère une famille de couples de points d'origine expérimentale $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ (par exemple, la quantité d'anticorps en fonction de la quantité de médicament injectée, ...). On reporte ces points dans un repère orthonormal. L'allure du nuage de points obtenu, ou d'autres considérations sur le phénomène étudié, peut suggérer un certain type de relation fonctionnelle entre les x_i et le y_i , par exemple :

- modèle affine : $y = ax + b$
- modèle logarithmique : $y = a \ln x + b$
- modèle exponentielle : $y = ae^{bx}$.

Exemple pour le modèle affine :



REMARQUE 1.1. Le modèle exponentielle $y = ae^{bx}$ se ramène au cadre affine par $\ln y = \ln a + bx$, c'est-à-dire à un modèle affine entre $\ln y$ et x . Le modèle logarithmique $y = a \ln x + b$ se ramène au cadre affine entre y et $\ln x$.

On va donc étudier le modèle affine, et utiliser **la méthode des moindres carrés** pour déterminer quelle droite $y = ax + b$ choisir.

La méthode des moindres carrés correspond à choisir la droite qui rend minimum la distance S égale à la somme des carrés des écarts verticaux et qui passe par le point moyen. Ce point moyen a pour coordonnées :

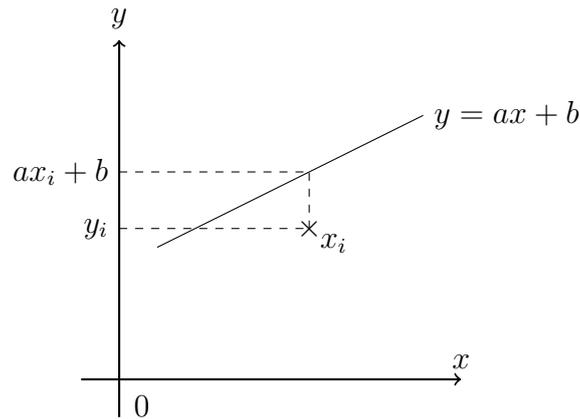
$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right).$$

La rapport $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ correspond bien à la moyenne des données x_i , et de même pour les y_i .

La somme S est quand à elle égale à

$$S = \sum_{i=1}^n \left(y_i - (ax_i + b) \right)^2$$

En effet, le terme $y_i - (ax_i + b)$ représente l'écart vertical entre la mesure y_i et la prédiction du modèle $ax_i + b$, comme on peut le comprendre sur la figure suivante :



Un calcul de minima (en calculant les dérivées partielles en a et en b) montre alors que S atteint son minimum en

$$a = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

et

$$b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

Notons

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

cov pour « covariance », et s^2 pour « variance », comme en probabilité (en effet, on ne fait rien d'autre que d'appliquer la probabilité uniforme sur les échantillons x_i et y_i). Donc,

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

On peut exprimer la qualité du modèle à l'aide du coefficient de corrélation :

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x s_y}.$$

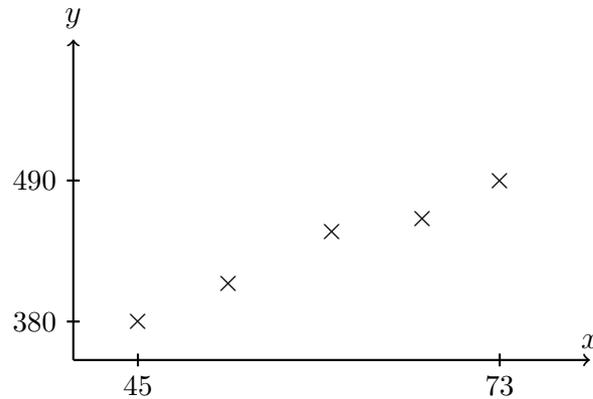
Plus $|r|$ est proche de 1, meilleur est le modèle affine.

Remarque : Il ne s'agit pas d'apprendre ces formules par cœur ! Elles sont déjà implémentées dans n'importe quel tableur (tel que LibreOffice) ou logiciel de calculs, mais il s'agit de comprendre la méthode.

EXEMPLE 1.2. Étudions la méthode des moindres carrés sur un problème concret. On dispose de 5 spécimens d'une espèce de papillon vivant dans des environnements différents. On suppose que la taille des ailes et le poids du papillon sont liés, car une plus grande envergure pourrait être associée à un poids plus élevé. Les données collectées sur ces spécimens sont les suivantes :

Envergure des ailes (mm)	45	52	60	67	73
Poids (mg)	380	410	450	460	490

La première ligne correspond aux données x_i , et la deuxième aux y_i . Traçons le nuage des points (x_i, y_i) :



et utilisons la méthode des moindres carrés pour estimer linéairement les y_i en fonction des x_i . A l'aide des formules ci-dessus, on trouve

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (59.4, 438),$$

$$s_x^2 = 101.04, \quad s_y^2 = 1496, \quad \text{cov}(x, y) = 384.8.$$

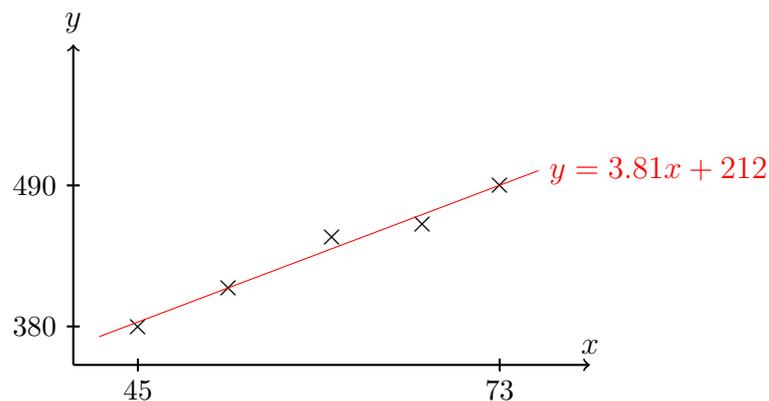
Ainsi,

$$a = \frac{384.8}{101.04} \simeq 3.81, \quad \text{et} \quad b \simeq 438 - 3.81 \times 59.4 \simeq 212.$$

L'équation de la droite obtenue par la méthode des moindres carrés est alors

$$y = 3.81x + 1270,$$

ce qui, graphiquement, donne :



Le coefficient r est égal à

$$r = \frac{384.8}{\sqrt{101.04 \times 1496}} \simeq 0.9897,$$

ce qui est très proche de 1, l'approximation par les moindres carrés étant ici plutôt bonne comme on peut le voir sur le graphique ci-dessus.

On peut alors prédire des données inexistantes. Par exemple, le poids d'un spécimen dont l'envergure des ailes mesurerait 70 cm prédit par le modèle est alors :

$$y = 3.81 \times 70 + 212 \simeq 479 \text{ mg.}$$