CHAÎNES DE MARKOV À ESPACE D'ÉTATS FINI

FRANÇOIS CHAPON

Université de Toulouse

2024–2025

Table des matières

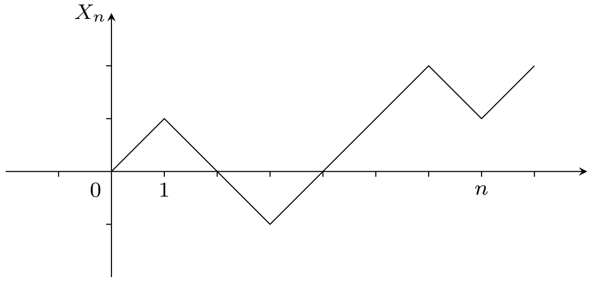
1. Introduction

Il est naturel d'étudier des phénomènes aléatoires qui évoluent dans le temps, phénomènes qui sont alors modélisés par des suites de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité. Ils peuvent évoluer par exemple de façon indépendante, d'où l'étude de suites de v.a. indépendantes. D'autres phénomènes très nombreux dans la nature possède la propriété suivante : la connaissance du présent, c'est-à-dire ce qu'il se passe à un instant donné apporte sur le futur autant d'informations que la connaissance de tout le passé. On parle alors de propriété de Markov.

Considérons par exemple un marcheur aléatoire qui, à chaque étape, peut faire un pas en avant avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou un pas en arrière avec probabilité $\frac{1}{2}$, et supposons que le marcheur parte de 0. On introduit alors $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, et on pose $X_0 = 0$, et pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n,$$

qui représente donc la position du marcheur à l'instant n. Représentons un exemple d'une trajectoire (aléatoire) du marcheur :



Il est alors clair que si au temps n, le marcheur est en x, au temps $n+1$ le marcheur sera en $x+1$ ou en $x-1$, et ce, quelque soit la façon dont il est arrivé en x : la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_0, \dots, X_n)$ est égale à la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n, et donc $(X_n)_{n\geq 0}$ vérifie la propriété de Markov que l'on va formaliser dans la section suivante.

On modélise divers autres phénomènes dans la nature par la propriété de Markov, par exemple, certaines dynamiques de systèmes biologiques, la gestion des stocks, le cours d'une action, l'algorithme PageRank de classement des pages internet, etc...

Notons que dans l'exemple du marcheur ci-dessus, X_n est à valeur dans $\mathbb{Z}$, qui est un espace infini dénombrable. Pour simplifier, on ne s'intéressera dans ce cours qu'aux chaînes de Markov à valeurs dans un espace fini.

2. Définitions

Dans toute la suite, E désigne un espace **fini**, appelé espace d'états, de cardinal au moins deux.

Définition 2.1. *On appelle matrice de transition, ou matrice stochastique, une matrice $Q = (Q(x,y))_{x\in E, y\in E}$ vérifiant*

(i) pour tout $x, y \in E$, $Q(x,y) \geq 0$;

(ii) pour tout $x \in E$, $\displaystyle\sum_{y\in E} Q(x,y) = 1$

Une matrice de transition est donc une matrice de taille $|E| \times |E|$, dont les coefficients sont positifs ou nuls et dont la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1. On a donc que pour tout $x \in E$, le vecteur ligne $Q(x,\cdot)$ est une probabilité sur E.

Notation 2.1. Soit f une fonction sur E, i.e. $f\colon E \to \mathbb{R}$. Par convention, on notera une fonction f comme un vecteur **colonne** de $\mathbb{R}^{|E|}$. On a alors, pour tout $x \in E$,

$$Qf(x) = \sum_{y\in E} f(y)Q(x,y),$$

ainsi Qf correspond au produit de la matrice Q et du vecteur f. Remarquons que Qf est donc une fonction sur E. Remarquons de plus que si $\mathbf{1}$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^{|E|}$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1, alors la condition $\sum_{y\in E} Q(x,y) = 1$, pour tout $x \in E$, n'est rien d'autre que $Q\mathbf{1} = \mathbf{1}$, c'est-à-dire que le vecteur $\mathbf{1}$ est un vecteur propre de Q associé à la valeur propre 1.

Soit ν une probabilité sur E. Par convention, on notera une probabilité ν comme un vecteur **ligne** de $\mathbb{R}^{|E|}$. On a alors, pour tout $y \in E$,

$$\nu Q(y) = \sum_{x\in E} \nu(x)Q(x,y),$$

ainsi νQ correspond au produit matriciel du vecteur ligne ν et de la matrice Q. De plus, νQ est encore une probabilité sur E. En effet, ses coefficients sont dans $[0,1]$, et on a

$$\sum_{y\in E} \nu Q(y) = \sum_{y\in E}\sum_{x\in E} \nu(x)Q(x,y) = \sum_{x\in E} \nu(x) \sum_{y\in E} Q(x,y) = \sum_{x\in E} \nu(x) = 1.$$

Si Q et P sont deux matrices de transition, alors QP est encore une matrice de transition. En effet, ses coefficients sont bien positifs ou nuls, et on a, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y\in E} (QP)(x,y) = \sum_{y\in E}\sum_{z\in E} Q(x,z)P(z,y) = \sum_{z\in E} Q(x,z)\sum_{y\in E} P(z,y) = 1.$$

Ainsi, si Q est une matrice de transition, Q^n est encore une matrice de transition, pour tout $n \geq 0$.

Définition 2.2. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité et à valeurs dans E. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q si pour tout $n \geq 0$, pour tous $x_0, \ldots, x_n, x_{n+1} \in E$,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\right) &= \mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n\right)\\ &= Q(x_n, x_{n+1}).\end{aligned}$$

La loi de X_0 est appelée loi initiale de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$.

La propriété de la définition est appelée propriété de Markov. Elle dit donc que le futur de la chaîne c'est-à-dire ce qui se passe à l'instant $n+1$, ne dépend que de l'instant n et pas de ce qui s'est passé avant. Ici, on ne s'intéresse qu'aux chaînes de Markov homogènes, c'est-à-dire que la matrice de transition Q ne dépend pas de n. On a donc que

$$Q(x,y) = \mathbb{P}(X_1 = y \,|\, X_0 = x) = \mathbb{P}(X_2 = y \,|\, X_1 = x) = \cdots = \mathbb{P}(X_n = y \,|\, X_{n-1} = x).$$

Le vecteur ligne $Q(x,\cdot)$ donne donc la loi de X_1 conditionnellement à $\{X_0 = x\}$, i.e. la probabilité $\mathbb{P}(\cdot \,|\, X_0 = x)$, ou encore la loi de X_n conditionnellement à $\{X_{n-1} = x\}$, i.e. la probabilité $\mathbb{P}(\cdot \,|\, X_{n-1} = x)$. De plus, la propriété de Markov s'interprète en disant que la loi de X_{n+1} conditionnellement à $(X_n, \ldots, X_0)$ est égale à la loi de X_{n+1} conditionnellement à X_n.

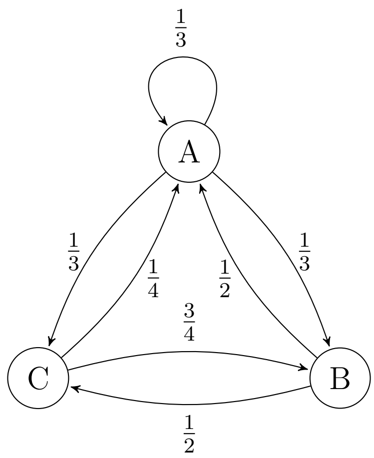
Dans la pratique, la loi de X_0 ne sera pas toujours précisée. On notera alors $\mathbb{P}_x$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\,\cdot \,|\, X_0 = x)$, et plus généralement $\mathbb{P}_\pi$ si X_0 suit la loi π (c'est-à-dire $\mathbb{P}_\pi(\cdot) = \sum_{x\in E} \mathbb{P}_x(\cdot)\pi(x)$).

Remarque 2.1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q. On associe à $(X_n)_{n\geq 0}$ (ou de façon équivalente à Q) un graphe dirigé défini de la sorte : les sommets du graphe sont les états E, et deux sommets x et y sont reliés par une arrête dirigée si et seulement si $Q(x,y) > 0$.

Exemple 2.1. Considérons un marcheur sur un triangle ABC dont les probabilités de transitions sont données par la matrice :

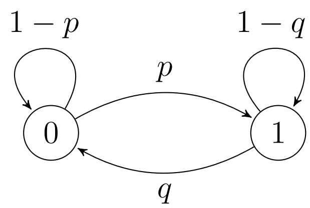
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le graphe associé à la chaîne est alors :



On a par exemple, $\mathbb{P}(X_1 = A \,|\, X_0 = B) = Q(B, A) = \frac{1}{2}$ ou encore $\mathbb{P}(X_1 = C \,|\, X_0 = A) = Q(A, C) = \frac{1}{3}$.

Exemple 2.2. Soit $E = \{0, 1\}$ un espace à deux états et $p, q \in [0, 1]$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov dont le graphe est donné par



Sa matrice de transition est alors la matrice 2×2 donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

On étudiera au fur et à mesure toutes les propriétés de la chaîne à deux états.

3. Propriétés

Proposition 3.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q et de loi initiale μ. Pour tout $n \geq 0$, la loi du $(n+1)$-uplet $(X_0, \ldots, X_n)$ est donnée par : pour tous $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$,*

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mu(x_0)Q(x_0, x_1)\cdots Q(x_{n-1}, x_n).$$

Démonstration. On applique succesivement la propriété de Markov. Pour tous $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_n = x_n \,|\, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0)\,\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_n = x_n \,|\, X_{n-1} = x_{n-1})\,\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) \quad \text{(par Markov)} \\
&\quad = Q(x_{n_1}, x_n)\,\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) \\
&\quad = Q(x_{n_1}, x_n)\,\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} \,|\, X_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, X_0 = x_0)\,\mathbb{P}(X_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, X_0 = x_0) \\
&\quad = Q(x_{n_1}, x_n)\,\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} \,|\, X_{n-2} = x_{n-2})\,\mathbb{P}(X_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, X_0 = x_0) \quad \text{(par Markov)} \\
&\quad = Q(x_{n_1}, x_n)Q(x_{n-1}, x_{n-2})\,\mathbb{P}(X_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, X_0 = x_0) \\
&\quad \vdots \\
&\quad = Q(x_{n_1}, x_n)Q(x_{n-1}, x_{n-2})\cdots Q(x_0, x_1)\mu(x_0).
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.1. La réciproque est aussi vraie : si $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. vérifiant

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mu(x_0)Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x_n),$$

pour une matrice de transition Q et une probabilité μ, alors $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = x_n \,|\, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) &= \frac{\mathbb{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0)}{\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0)} \\ &= Q(x_{n-1}, x_n),\end{aligned}$$

par hypothèse, et donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q.

Proposition 3.2. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q et de loi initiale μ. La loi de la variable aléatoire X_n est donnée par $\mu_n = \mu Q^n$.*

Démonstration. La proposition précédente donne la loi de $(X_0, \ldots, X_n)$. Il suffit alors de sommer sur toutes les valeurs possibles de $X_0, \ldots, X_{n-1}$. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = x) &= \sum_{x_0,\ldots x_{n-1}\in E} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) \\ &= \sum_{x_0,\ldots x_{n-1}\in E} \mu(x_0)Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x)\end{aligned}$$

On reconnait ici le produit matriciel $\mu Q^n(x)$. □

Remarque 3.2. Si la loi initiale de la chaîne n'est pas donnée, on a de même

$$\mathbb{P}_{x_0}(X_n = x) = Q^n(x_0, x),$$

c'est-à-dire que la loi de X_n sous $\mathbb{P}_{x_0}$ est donnée par $Q^n(x_0, \cdot)$.

On montre de même :

Proposition 3.3. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q. Pour tous $n \geq 0$, $m \geq 0$, et $x_0 \in E$, on a*

$$\mathbb{P}_{x_0}(X_{m+n} = y \,|\, X_m = x) = Q^n(x, y),$$

pour tout $x, y \in E$.

Démonstration. On fait une récurrence sur $n \geq 0$. À $n = 1$, c'est la propriété de Markov. Supposons la propriété vraie à $n - 1$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{x_0}(X_{m+n} = y \,|\, X_m = x) &= \frac{\mathbb{P}_{x_0}(X_{m+n} = y, X_m = x)}{\mathbb{P}_{x_0}(X_m = x)} \\ &= \frac{\sum_{z\in E} \mathbb{P}_{x_0}(X_{m+n} = y, X_{m+n-1} = z, X_m = x)}{\mathbb{P}_{x_0}(X_m = x)} \\ &= \frac{\sum_{z\in E} \mathbb{P}_{x_0}(X_{m+n} = y \,|\, X_{m+n-1} = z)\, \mathbb{P}_{x_0(}\, X_{m+n-1} = z, X_m = x)}{\mathbb{P}_{x_0}(X_m = x)} \\ &\qquad\qquad \text{(par Markov)} \\ &= \sum_{z\in E} \mathbb{P}_{x_0}(X_{m+n} = y \,|\, X_{m+n-1} = z)\, \mathbb{P}_{x_0(}\, X_{m+n-1} = z \,|\, X_m = x) \\ &= \sum_{z\in E} Q(z, y)Q^{n-1}(x, z) \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= Q^n(x, y),\end{aligned}$$

et donc la propriété est vraie à n. □

Exemple 3.1. Reprenons l'exemple du marcheur sur le triangle de l'exemple 2.1. Supposons qu'au temps 0 le marcheur parte de B, c'est-à-dire $X_0 = B$ avec probabilité 1, i.e. $\mathbb{P}(X_0 = B) = 1$. Autrement dit, la loi initiale de la chaîne est la masse de Dirac en B, δ_B. Calculons la loi de X_2. D'après la proposition ci-dessus, on a, pour tout $x \in E = \{A, B, C\}$,

$$\mathbb{P}(X_2 = x) = Q^2(B, x).$$

La loi de X_2 est donc donnée par la ligne B de la matrice Q^2. On a donc :

$$Q^2 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ \frac{7}{24} & \frac{13}{24} & \frac{4}{24} \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_2 = A) = Q^2(B, A) = \frac{7}{24}$, $\mathbb{P}(X_2 = B) = Q^2(B, B) = \frac{13}{24}$, $\mathbb{P}(X_2 = C) = Q^2(B, C) = \frac{4}{24}$.

Proposition 3.4. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q et soit f une fonction positive ou bornée sur E. Alors, pour tout $n \geq 0$, l'espérance de $f(X_n)$ sous $\mathbb{P}_x$ est*

$$\mathbb{E}_x\left(f(X_n)\right) = Q^n f(x).$$

Démonstration. La loi de X_n sous $\mathbb{P}_x$ étant donnée par $Q^n(x, \cdot)$, on a :

$$\mathbb{E}_x\left(f(X_n)\right) = \sum_{y\in E} f(y)\,\mathbb{P}_x(X_n = y) = \sum_{y\in E} f(y) Q^n(x, y) = Q^n f(x). \qquad \square$$

4. Probabilité invariante

Définition 4.1. *Soit Q une matrice de transition sur E et π une probabilité sur E. On dit que π est invariante (ou stationnaire) si*

$$\pi Q = \pi,$$

c'est-à-dire que pour tout $y \in E$,

$$\sum_{x\in E} \pi(x) Q(x, y) = \pi(y).$$

Si π est une probabilité invariante, alors pour tout $n \geq 0$, on a donc que $\pi Q^n = \pi$. Comme la loi de X_n est donnée par πQ^n, on a donc que si X_0 est de loi π, X_n reste de loi π pour tout n.

Exemple 4.1. Soit Q la matrice de l'exemple 2.1. Déterminons (si elle existe, ce qui est bien la cas comme nous le verrons juste après) une probabilité invariante de la chaîne. Soit $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ une probabilité sur E vérifiant

$$\pi Q = \pi.$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix},$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c \\ b = \frac{1}{3}a + \frac{3}{4}c \\ c = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b \end{cases}$$

Le système est de rang 2, et on trouve $a = \frac{5}{4}c$, $b = \frac{7}{6}c$. Mais comme π est une probabilité, on a aussi $a+b+c=1$, et donc finalement, on trouve une unique solution :

$$a = \frac{15}{41}, \quad b = \frac{14}{41}, \quad c = \frac{12}{41},$$

c'est-à-dire que la probabilité

$$\pi = \left(\frac{15}{41}, \frac{14}{41}, \frac{12}{41}\right)$$

est ici l'unique probabilité invariante.

Exemple 4.2. On dit qu'une matrice de transition Q est une matrice *bi-stochastique*, si chaque colonne de Q est aussi une probabilité, c'est-à-dire que pour tout $y \in E$, $\sum_{x\in E} Q(x,y) = 1$. Autrement dit, la transposée $Q^\intercal$ de Q est aussi une matrice de transition. Dans ce cas, on a que la loi uniforme π sur E est une probabilité invariante. En effet, pour tout $y \in E$,

$$\pi Q(y) = \sum_{x\in E} \pi(x) Q(x,y) = \frac{1}{|E|} \sum_{x\in E} Q(x,y) = \frac{1}{|E|} = \pi(y).$$

D'un point de vue plus matriciel, comme $Q^\intercal$ est une matrice stochastique, l'identité $\sum_{y\in E} Q^\intercal(x,y) = 1$ se traduit de façon matriciel par $Q^\intercal \mathbf{1} = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^{|E|}$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a ainsi que le vecteur $\mathbf{1}$ est un vecteur propre de $Q^\intercal$ associé à la valeur propre 1. En prenant la transposée, on a donc $\mathbf{1}^\intercal Q = \mathbf{1}^\intercal$. En renormalisant le vecteur $\mathbf{1}^\intercal$ par $\frac{1}{|E|}$, on obtient bien que la loi uniforme sur E est une probabilité invariante.

Montrons maintenant que pour une chaîne de Markov à espace d'états fini, il existe toujours une probabilité invariante.

Proposition 4.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états E fini, de matrice de transition Q. Alors $(X_n)_{n\geq 0}$ admet au moins une probabilité invariante.*

Démonstration. Par définition, π est invariante si $\pi Q = \pi$, ou encore $Q^\intercal \pi^\intercal = \pi^\intercal$, c'est-à-dire que $\pi^\intercal$ est un vecteur propre de $Q^\intercal$ associée à la valeur propre 1. Or Q et sa transposée $Q^\intercal$ ont même valeurs propres (car même polynôme caractéristique), et comme Q est une matrice stochastique, on a $Q\mathbf{1} = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^{|E|}$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donc 1 est valeur propre de Q et donc de $Q^\intercal$, donc il existe un vecteur ligne μ non nul tel que $\mu Q = \mu$. Soit π le vecteur ligne tel que $\pi(x) = |\mu(x)|$, pour tout $x \in E$, et montrons que π est encore vecteur propre à gauche de Q. Comme les coefficients de π sont positifs, il suffira alors de diviser π par la somme de ses coefficients pour obtenir une probabilité invariante. On a, pour tout $x \in E$,

$$\pi(x) = |\mu(x)| = |\mu Q(x)| = \left|\sum_{y\in E} \mu(y) Q(y,x)\right| \leq \sum_{y\in E} |\mu(y)| Q(y,x) = \sum_{y\in E} \pi(y) Q(y,x) = \pi Q(x),$$

donc $\pi(x) \leq \pi Q(x)$, pour tout $x \in E$. De plus,

$$\sum_{x\in E} \pi Q(x) = \sum_{x\in E}\sum_{y\in E} \pi(y) Q(y,x) = \sum_{y\in E} \pi(y) \sum_{x\in E} Q(y,x) = \sum_{y\in E} \pi(y).$$

Finalement, $\pi(x) \leq \pi Q(x)$ pour tout $x \in E$, et les vecteurs ont même somme, c'est donc qu'ils sont égaux : on a

$$\sum_{x\in E} (\pi Q(x) - \pi(x)) = 0,$$

et comme $\pi Q(x) - \pi(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$, on a $\pi Q(x) = \pi(x)$. Ainsi, π renormalisé par la somme de ses coefficients est bien une probabilité invariante. $\square$

Définition 4.2. *On dit qu'une probabilité π est réversible pour Q, si π vérifie : pour tous $x, y \in E$,*

$$\pi(x)Q(x,y) = \pi(y)Q(y,x).$$

Proposition 4.2. *Soit π une probabilité réversible pour Q. Alors π est une probabilité invariante.*

Démonstration. Pour tout $y \in E$, on a

$$\pi Q(y) = \sum_{x\in E} \pi(x)Q(x,y) = \sum_{x\in E} \pi(y)Q(y,x) = \pi(y) \sum_{x\in E} Q(y,x) = \pi(y). \qquad \square$$

Remarque 4.1. Il n'est pas toujours évident de déterminer un probabilité invariante, et il est parfois plus facile de chercher s'il existe une probabilité réversible.

Exercice 4.1. Soit Q la matrice de transition :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$ est invariante pour Q, mais n'est pas réversible.

5. Classification des états

Définition 5.1. *On dit que x conduit à y s'il existe $n \geq 0$ tel que $Q^n(x,y) > 0$, autrement dit, il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_{n-1} \in E$ tels que*

$$Q(x, x_1)Q(x_1, x_2) \cdots Q(x_{n-1}, y) > 0.$$

D'un point de vue du graphe, il existe donc un chemin de probabilité strictement positive conduisant x à y.

On dit que x et y communiquent si x conduit à y et y conduit à x, et on note $x \leftrightarrow y$.

Proposition 5.1. *La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence. Ses classes d'équivalence sont appelées les classes de communication de la chaîne.*

Démonstration. Il est clair que $\leftrightarrow$ est réflexive (prendre $n = 0$), et symétrique par définition. Si x conduit à y et y conduit à z, alors il existe n_1 et n_2 tels que $Q^{n_1}(x,y) > 0$ et $Q^{n_2}(y,z) > 0$, et donc

$$Q^{n_1+n_2}(x,y) = \sum_{w\in E} Q^{n_1}(x,w)Q^{n_2}(w,y) \geq Q^{n_1}(x,z)Q^{n_2}(z,y) > 0,$$

d'où la transitivité. $\square$

Définition 5.2. *Si tous les états communiquent, on dit que la chaîne est irréductible.*

Exemple 5.1. Reprenons l'exemple de la chaîne à deux états (cf exemple 2.2).

- Si $p = 0$ et $q = 0$: la matrice de la chaîne est donc

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  La chaîne reste éternellement dans l'état 0 ou l'état 1 (en fonction de là où elle part), donc 0 et 1 ne communiquent pas. Toutes les probabilités sur $\{0, 1\}$ sont invariantes pour Q.
- Si $p = 0$ et $q > 0$: 1 conduit à 0, mais 0 ne conduit pas à 1. On trouve facilement que la probabilité invariante est (sans surprise) la masse de Dirac δ_0.

- Si $p > 0$ et $q > 0$: les états 0 et 1 communiquent. La chaîne est irréductible. On trouve une unique probabilité invariante en résolvant le système :

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

avec $a + b = 1$. On obtient facilement

$$\pi = \left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q} \right).$$

Définition 5.3. *On dit qu'un état x est récurrent si, partant de x, la chaîne retourne à l'état x en un temps fini avec probabilité 1. En notant $T_x = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = x\}$ le temps d'atteinte de x, on a donc que*

$$\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1.$$

On dit qu'un état x est transitoire ou transient s'il n'est pas récurrent.

De façon équivalente, un état x est récurrent si la chaîne passe une infinité de fois en x. En effet, si on revient en x au moins une fois, on peut répéter l'argument une fois revenu en x, et donc on revient en x au moins deux fois, et on répète l'argument, etc... Une démonstration rigoureuse fait intervenir la propriété de Markov *forte*, dont on ne parlera pas cette année. Un état transitoire n'est quand à lui visité qu'un nombre fini de fois.

De plus, si x est récurrent et si y communique avec x, alors y est récurrent. Là encore on va se contenter de donner un argument intuitif. Comme x est récurrent, la chaîne visite infiniment souvent x. Comme partant de x, il existe un chemin pour atteindre y de probabilité strictement positive, la chaîne visitera y lors d'une infinité de retours en x, et ainsi y sera visité infiniment souvent. Donc y est aussi récurrent.

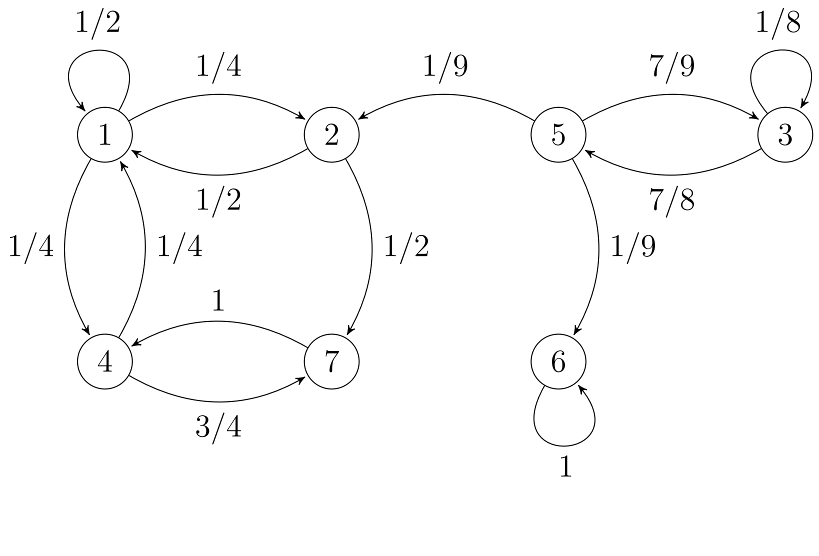
Comme la récurrence et la transience sont des propriétés de classe, on parlera alors de classes de récurrence et de classes transitoires.

On va essentiellement étudier des chaînes de Markov irréductibles. Notons alors que :

Remarque 5.1. Dans le cas d'un espace d'états E fini, il existe au moins un état récurrent (ce qui n'est pas le cas si E est infini dénombrable). En effet, il est impossible que tous les états ne soient visités qu'un nombre fini de fois en un temps infini.

De plus, si la chaîne est irréductible, elle a donc une unique classe de récurrence et pas d'états transitoires, et donc tous les états sont récurrents

Exemple 5.2. Soit une chaîne de Markov dont le graphe est donné par :



Dans cet exemple, il y a deux classes d'états récurrents $\{1,2,4,7\}$ et $\{6\}$, et une classe d'états transients $\{3,5\}$. On passe un temps fini dans la classe $\{3,5\}$, et une fois qu'on en sort, on reste indéfiniment dans une des classes récurrentes.

Remarque 5.2. Un état x tel que $Q(x,x)=1$ est appelé état absorbant (c'est évidemment une classe récurrente).

On va voir que dans le cas irréductible, la probabilité invariante est unique. Montrons tout d'abord qu'elle charge tous les états.

Proposition 5.2. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible et soit μ une probabilité invariante. Alors, μ charge tous les états de E, c'est-à-dire,*

$$\mu(x)>0, \quad \textit{pour tout } x\in E.$$

Démonstration. Soit μ une probabilité invariante. Soit $x\in E$ un état vérifiant $\mu(x)>0$ (qui existe car μ est une probabilité, donc est non nulle). Soit $z\in E$ un autre état. Comme la chaîne est irréductible, z et x communiquent, donc il existe $n>0$ (qui dépend de z et x) tel que

$$Q^n(x,z)>0.$$

Comme μ est invariante, on a donc $\mu=\mu Q^n$, et donc

$$\mu(z)=\sum_{y\in E}\mu(y)Q^n(y,z)\geq \mu(x)Q^n(x,z)>0,$$

donc μ charge tous les états. □

Remarque 5.3. On peut aussi montrer que dans le cas général (non irréductible), une probabilité invariante ne charge pas les états transitoires.

Théorème 5.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E fini, irréductible, de matrice de transition Q. Alors, elle admet une unique probabilité invariante π_∞. De plus, pour toute loi initiale π_0, on a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\pi_0 Q^k=\pi_\infty.$$

Démonstration. Commençons par montrer l'unicité de la probabilité invariante. Comme déjà dit, la transposée d'une probabilité invariante est un vecteur propre de $Q^\intercal$ associé à la valeur propre 1. Comme les valeurs propres de Q et de $Q^\intercal$ sont les mêmes et ont même multiplicité, il suffit donc de montrer que l'espace propre associé à Q pour la valeur propre 1 est de dimension 1. Soit f un vecteur propre de Q pour la valeur propre 1, i.e. $Qf=f$. Comme le vecteur $\mathbf{1}$ est vecteur propre, il s'agit de montrer que f est constante. Soit x_0 le point où f atteint son maximum, i.e. $f(x_0)=\max\{f(x)\,|\,x\in E\}$. Soit y un autre état. Comme Q est irréductible, y communique avec x_0, donc il existe $n\geq 1$ tel que $Q^n(x_0,y)>0$. Comme $Qf=f$, on a aussi $Q^nf=f$. Alors, d'une part,

$$f(x_0)=Q^nf(x_0)=\sum_{y\in E}f(y)Q^n(x_0,y),$$

et d'autre part, $f(x_0)=\sum_{y\in E}f(x_0)Q^n(x_0,y)$, donc on a

$$\sum_{y\in E}Q^n(x_0,y)\left(f(x_0)-f(y)\right)=0,$$

qui est une somme de termes positifs. Ainsi, comme $Q^n(x_0,y)>0$, on a $f(y)=f(x_0)$, et donc, f est constante, et la chaîne admet une unique probabilité invariante, notée π_∞.

Passons à la convergence. Soit $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des probabilités sur E, avec $|E| = N$. On a donc

$$\mathcal{M}_1(E) = \left\{ (\nu_1, \dots, \nu_N) \in [0,1]^N \;\middle|\; \sum_{k=1}^{N} \nu_k = 1 \right\},$$

et l'espace $\mathcal{M}_1(E)$ est donc un fermé de $[0,1]^N$, donc est compact. Ainsi, toute suite de $\mathcal{M}_1(E)$ possède une sous-suite convergente. Posons,

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \pi_0 Q^k.$$

Alors,

$$\nu_n Q = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \pi_0 Q^{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \pi_0 Q^k = \nu_n + \frac{1}{n} \left(\pi_0 Q^n - \pi_0 \right).$$

Soit $(\nu_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite de $(\nu_n)_n$ qui converge vers un certain π. Comme $\frac{1}{\varphi(n)} \left(\pi_0 Q^{\varphi(n)} - \pi_0 \right)$ tend vers 0 car $\pi_0 Q^n$ et π_0 sont des probabilités (donc bornées par 1), on a, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus appliquée à la sous-suite $(\nu_{\varphi(n)})_n$, que $\pi Q = \pi$, c'est-à-dire que π est invariante. Comme la probabilité invariante est unique par irréductibilité, on a donc que toute sous-suite convergeante de la suite (ν_n) converge vers la même limite π_∞, (i.e. la suite (ν_n) admet une unique valeur d'adhérence), et comme $\mathcal{M}_1(E)$ est compact, on a donc que la suite $(\nu_n)_n$ converge vers π_∞. □

On peut en fait faire mieux :

Théorème 5.2 (Théorème ergodique, admis)**.** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E fini, irréductible, de matrice de transition Q. Soit π_∞ l'unique probabilité invariante. Alors, pour toute fonction $f \colon E \to \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{x\in E} f(x) \pi_\infty(x),$$

avec probabilité 1. En particulier, en prenant $f = \mathbb{1}_{\{x\}}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}} = \pi_\infty(x),$$

avec probabilité 1.

Le théorème ergodique nous dit donc que la moyenne de f le long de la trajectoire de la chaîne, i.e. sa moyenne temporelle, converge en temps long vers sa moyenne spatiale par rapport à la probabilité invariante. En particulier, ceci donne une nouvelle interprétation de la mesure invariante comme la fréquence du temps d'occupation d'un état en temps long. Le théorème ergodique peut aussi se voir comme une sorte de loi des grands nombres pour les chaînes de Markov.

Remarque 5.4. L'irréductibilité ne garantit pas la convergence de la suite des marginales $\pi_0 Q^n$. Par exemple, dans le cas de la chaîne à deux états de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est bien irréductible, on voit facilement que $Q^{2k+1} = Q$ et $Q^{2k} = I$, la matrice identité. Donc $\pi_0 Q^n$ ne converge pas sauf si π_0 est la loi uniforme (qui est la loi invariante). C'est la notion d'apériodicité étudiée dans la section suivante qui va nous garantir la convergence des lois marginales de la chaîne.

6. Périodicité et convergence à l'équilibre

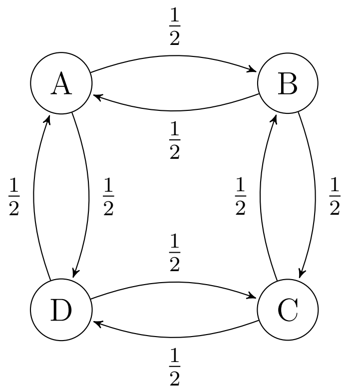
Définition 6.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q. Soit $x \in E$ un état. La période de x est l'entier positif*

$$\mathrm{pgcd}\{n \geq 1 \,|\, Q^n(x,x) > 0\}.$$

Par convention, on pose $\mathrm{pgcd}\, \varnothing = +\infty$.

La période de x est donc le plus grand commun diviseur des temps possibles de retour en x de la chaîne de Markov. Notons de plus que ce pgcd est le diviseur d'un nombre fini de points de $\{n \geq 1 \,|\, Q^n(x,x) > 0\}$, puisque la suite des pgcd d'une famille croissante est décroissante, et donc stationnaire.

Exercice 6.1. Considérons un marcheur au hasard sur un carré ABCD, de graphe :



Écrire sa matrice de transition, et montrer que tout état est de période 2.

Proposition 6.1. *La période est une propriété de classe, c'est-à-dire que deux états dans la même classe de communication ont même période.*

Démonstration. Soient x et y deux états d'une même classe et notons $p(x)$ et $p(y)$ leurs périodes respectives. Il suffit de montrer que $p(x) \,|\, p(y)$ (i.e. $p(x)$ divise $p(y)$), puisque par symétrie on aura aussi $p(y) \,|\, p(x)$, et donc $p(x) = p(y)$.

Montrons que $p(x)$ est un diviseur de $\{n \geq 1 \,|\, Q^n(y,y) > 0\}$. Comme x et y communiquent, il existe $n_1 \geq 1$ et $n_2 \geq 1$ tels que

$$Q^{n_1}(x,y) > 0 \quad \text{et} \quad Q^{n_2}(y,x) > 0.$$

On a donc,

$$Q^{n_1+n_2}(x,x) = \sum_{z\in E} Q^{n_1}(x,z)Q^{n_2}(z,x) \geq Q^{n_1}(x,y)Q^{n_2}(y,x) > 0.$$

De même, pour tout $n \geq 1$ tel que $Q^n(y,y) > 0$, on a,

$$Q^{n_1+n_2+n}(x,x) \geq Q^{n_1}(x,y)Q^n(y,y)Q^{n_2}(y,x) > 0.$$

Ainsi, $p(x) \,|\, n_1+n_2$ et $p(x) \,|\, n_1+n_2+n$, et par différence $p(x) \,|\, n$. Donc $p(x)$ est un diviseur de $\{n \geq 1 \,|\, Q^n(y,y) > 0\}$, et donc divise $p(y)$. □

Puisque une chaîne irréductible n'a qu'une seule classe de récurrence, on en déduit :

Corollaire 6.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible. Tous les états ont même période, on parle alors de période la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$.*

Définition 6.2. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible. On dit que la chaîne est apériodique si sa période vaut 1.*

Remarque 6.1. Si $Q(x,x) > 0$ alors x est de période 1. Donc pour qu'une chaîne irréductible soit apériodique, il suffit qu'il existe un état x tel que $Q(x,x) > 0$.

Exemple 6.1. On a vu que la chaîne à deux états (cf exemples 2.2 et 5.1) était irréductible si $p > 0$ et $q > 0$. Elle est apériodique si de plus $p < 1$ ou $q < 1$. Elle est de période 2 si $p = q = 1$.

Définition 6.3. *Une chaîne de Markov de matrice de transition Q est dite fortement irréductible s'il existe $N \geq 1$ tel que pour tous états x et y, on a $Q^N(x,y) > 0$.*

Remarque. On remarquera l'échange de l'ordre des quantificateurs par rapport à la notion d'irréductibilité.

Proposition 6.2. *Une $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états E fini de matrice de transition Q est irréductible et apériodique si et seulement si elle est fortement irréductible.*

Démonstration. Montrons la condition suffisante. La forte irréductibilité implique évidemment l'irréductibilité, il reste donc à montrer l'apériodicité. Soit $x, y \in E$ tels que $Q(y,x) > 0$. Soit $N \geq 1$ tel que $Q^N(x,y) > 0$ pour tous $x, y \in E$. Alors, $Q^N(x,x) > 0$ et $Q^{N+1}(x,x) \geq Q^N(x,y)Q(y,x) > 0$. Donc N et $N+1$ sont dans $\{n \geq 1 \,|\, Q^n(x,x) > 0\}$, et comme N et $N+1$ sont premiers entre eux, la période de x est 1. La chaîne étant irréductible, elle est donc bien apériodique.

Supposons maintenant la chaîne irréductible et apériodique. Soit $x \in E$. Commençons par montrer qu'il existe $n(x)$ tel que pour tout $n \geq n(x)$, $Q^n(x,x) > 0$.

Par apériodicité, (et le fait que la période est le pgcd d'une famille d'entiers finie), considérons des entiers $n_1, \ldots, n_k$ dans $\{n \geq 1 \,|\, Q^n(x,x) > 0\}$ dont le pgcd vaut 1. Par le théorème de Bézout, il existe $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{Z}^*$ tels que $q_1 n_1 + \cdots + q_k n_k = 1$. Posons,

$$a(x) = \sum_{i=1}^{k} q_i^+ n_i \quad \text{et} \quad b(x) = \sum_{i=1}^{k} q_i^- n_i$$

avec $q_i^+ = \max\{q_i, 0\}$ et $q_i^- = \max\{-q_i, 0\}$, de telle sorte que $a(x)$ et $b(x)$ sont positifs, et $a(x) = b(x) + 1$. Comme les entiers n_i sont dans $\{n \geq 1 \,|\, Q^n(x,x) > 0\}$, on a

$$Q^{a(x)}(x,x) \geq \prod_i \left(Q^{n_i}(x,x)\right)^{q_i^+} > 0 \quad \text{et} \quad Q^{b(x)}(x,x) \geq \prod_i \left(Q^{n_i}(x,x)\right)^{q_i^-} > 0,$$

donc $b(x)$ et $a(x) = b(x) + 1$ sont dans $\{n \geq 1 \,|\, Q^n(x,x) > 0\}$. Posons $n(x) = b(x)^2 - 1$, et soit $n \geq n(x)$. Écrivons la division euclidienne de n par $b(x)$:

$$n = qb(x) + r = (q-r)b(x) + ra(x),$$

avec $0 \leq r < b(x)$. Comme

$$ra(x) \leq (b(x)-1)(b(x)+1) = b(x)^2 - 1 = n(x),$$

et que $n \geq n(x)$, on doit avoir $q - r \geq 0$ car $b(x)$ est positif. Ainsi,

$$Q^n(x,x) \geq \left(Q^{b(x)}(x,x)\right)^{q-r} \left(Q^{a(x)}(x,x)\right)^{r} > 0,$$

car $b(x)$ et $a(x)$ sont dans $\{n \geq 1 \,|\, Q^n(x,x) > 0\}$. On a donc bien montré que pour tout $n \geq n(x)$, $Q^n(x,x) > 0$.

Soit maintenant $y \in E$ un autre état, et soit $n(x,y) > 0$ tel que $Q^{n(x,y)}(x,y) > 0$, qui existe par irréductibilité. Posons

$$N = \max\{n(x') + n(x',y') \,|\, x', y' \in E\}$$

qui est bien fini car E est fini. Alors, en écrivant $N = n(x) + n(x,y) + j$ pour un certain $j \geq 0$, on a

$$Q^N(x,y) \geq Q^{n(x)+j}(x,x)Q^{n(x,y)}(x,y) > 0,$$

ce qui montre que la chaîne est fortement irréductible. □

Théorème 6.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q, irréductible. Alors, on a la convergence pour toute loi initiale π_0,*

$$\lim_{n\to\infty} \pi_0 Q^n = \pi_\infty,$$

où π_∞ est l'unique probabilité invariante de la chaîne si et seulement si la chaîne est apériodique.

Esquisse de la démonstration. La condition nécessaire est facile. Si la suite $(\pi_0 Q^n)$ converge vers la probabilité invariante π_∞, comme la chaîne est irréductible et donc que π_∞ charge tous les points x, on a $\pi_0 Q^n(x) > 0$ pour n assez grand. Donc $Q^n > 0$ pour n assez grand, et donc la chaîne est fortement irréductible, et donc apériodique.

La condition suffisante est plus délicate. Une démonstration classique fait appel à un résultat d'algèbre linéaire dû à Perron et Frobenius (on utilise ici la partie due à Perron) :

Théorème 6.2 (Théorème de Perron-Frobenius)**.** *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ une matrice de $M_d(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls. On suppose que A est primitive : il existe $N \geq 1$, tel que $A^N > 0$. Soit r son rayon spectral, i.e. $r = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$, où $\sigma(A)$ est le spectre de A, i.e. l'ensemble des valeurs propres de A (dans $\mathbb{C}$). Alors, $r > 0$, r est une valeur propre simple de A, et r est dominante : pour tout $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{r\}$, $|\lambda| < r$.*

Nous admettrons ce théorème et on renvoie par exemple à [Horn, Matrix Analysis], pour une preuve. Notons que la notion de matrice primitive est exactement pour nous la notion de forte irréductibilité (et donc d'irréductibilité plus apériodicité).

Commençons par vérifier que le rayon spectral de Q est 1. On sait déjà que 1 est valeur propre. Soit λ une valeur propre de Q et u un vecteur propre associé. Soit x_0 tel que $|u(x_0)| = \max_{x\in E}\{|u(x)|\}$. Alors,

$$|\lambda u(x_0)| = |Qu(x_0)| = \left|\sum_{y\in E} Q(x_0,y)u(y)\right| \leq \sum_{y\in E} Q(x_0,y)\,|u(x_0)| = |u(x_0)|,$$

donc $|\lambda| \leq 1$. Donc 1 est bien le rayon spectral de Q. Ainsi par le théorème de Perron-Frobenius, 1 est valeur propre simple de Q et toutes les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

Si Q est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible W composée des vecteurs propres de Q telle que

$$Q = W \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix} W^{-1},$$

avec $|\lambda_j| < 1$, pour tout $j = 2, \ldots, d$, où $d = |E|$. Comme le vecteur $\mathbf{1}$ est un vecteur propre de Q associé à la valeur propre 1, la première colonne de W peut être choisie égale à $\mathbf{1}$. Comme la probabilité invariante est un vecteur propre de $Q^\intercal$ associé à la valeur propre 1, et que $W^{-1}W = I$, la première ligne de W^{-1} est π_∞. Comme $|\lambda_j|^n \to 0$ quand $n \to \infty$, on a donc

$$Q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} W \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) W^{-1} = \begin{pmatrix} \pi_\infty \\ \vdots \\ \pi_\infty \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour n'importe quelle loi initiale π_0, on aura que

$$\pi_0 Q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_\infty.$$

Si Q n'est pas diagonalisable, on applique une réduction de Jordan à la matrice Q (ce qui est toujours possible sur $\mathbb{C}$). Il existe une matrice P de taille $(d-1)\times(d-1)$ dont les valeurs propres sont toutes strictement inférieures à 1 en module telle que :

$$Q = W \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) W^{-1}.$$

La matrice P est diagonale par bloc, dont les blocs sont de la forme

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que les blocs sont de la forme $\lambda I + N$, où N est une matrice nilpotente, et λ une valeur propre de module strictement inférieur à 1. On a donc que $P^n \to 0$ quand $n\to\infty$ (car $J^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k$ où p est l'ordre de nilpotence de N, et donc les entrées de J^n sont de la forme $P(n)\lambda^{n-k}$ avec $P(n)$ un polynôme), et finalement

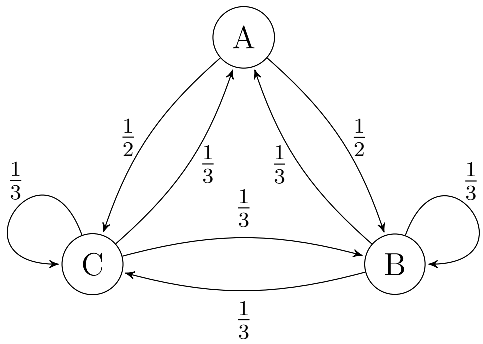
$$Q^n = W \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^n \end{array}\right) W^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} W \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) W^{-1} = \begin{pmatrix} \pi_\infty \\ \vdots \\ \pi_\infty \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour n'importe quelle loi initiale π_0, on aura donc

$$\pi_0 Q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_\infty. \qquad \square$$

Illustrons la preuve de ce dernier théorème sur un exemple explicite.

Exemple 6.2. On considère la chaîne de Markov de graphe :



Sa matrice de transition est donc :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 \\ \frac13 & \frac13 & \frac13 \\ \frac13 & \frac13 & \frac13 \end{pmatrix}.$$

La chaîne est clairement irréductible et apériodique (on vérifie par ailleurs que $Q^2 > 0$). Le polynôme caractéristique de Q est $\det(\lambda - Q) = (\lambda-1)(\lambda+\frac13)\lambda$, ainsi les valeurs propres sont 1 (forcément), $-\frac13$ et 0, et on peut prendre comme vecteurs propres respectifs :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac13 \\ -\frac13 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La valeur propre 1 est bien simple (les autres aussi ici), et dominante. La matrice Q est ici diagonalisable dans une base de vecteurs propres. On pose

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix},$$

d'inverse

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a

$$Q = W \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1},$$

et donc

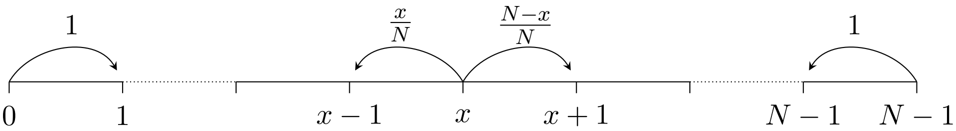
$$Q^n = W \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} W \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

On vérifie de plus que $\pi_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$ est l'unique probabilité invariante de Q. Ainsi, on retrouve bien la conclusion du théorème, i.e. pour toute loi initiale π_0, on a

$$\pi_0 Q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_\infty.$$

Finissons par un dernier exemple classique de chaîne de Markov.

Exemple 6.3 (Urnes d'Ehrenfest)**.** On considère deux urnes A et B, et N boules numérotées de 1 à N. Initialement, toutes les boules se trouvent dans l'urne A. À chaque instant de temps, on tire au hasard un numéro entre 1 et N, et on change d'urne la boule dont le numéro a été tiré. La dynamique de ce modèle est alors décrite par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, où X_n représente le nombre de boules dans l'urne A à l'instant n. Son graphe est le suivant :



et ses probabilités de transition sont données par : pour tout $1 \leq x \leq N-1$,

$$Q(x, x+1) = \frac{N-x}{N}; \quad Q(x, x-1) = \frac{x}{N}$$

et $Q(0,1) = Q(N, N-1) = 1$. La chaîne est irréductible, car partant de x on peut atteindre un état y en $|y-x|$ étapes. Cherchons sa probabilité invariante. Soit π telle que $\pi Q = \pi$. On a, pour tout $1 \leq y \leq N$,

$$\pi(y) = \sum_{x=0}^{N} Q(x,y)\pi(x) = \frac{N-y+1}{N}\pi(y+1) + \frac{y+1}{N}\pi(y-1)$$

et aux bords : $\pi(0) = \frac{1}{N}\pi(1)$ et $\pi(N) = \frac{1}{N}\pi(N-1)$. Ceci ne paraît pas complètement évident à résoudre. Cherchons plutôt si il existe une probabilité réversible. Par la proposition 4.2, une probabilité réversible est invariante. Soit π une probabilité réversible, i.e. pour tous $x, y \in \{0, \dots, N\}$,

$$\pi(x)Q(x,y) = \pi(y)Q(y,x).$$

On a donc $\pi(0)Q(0,1) = \pi(1)Q(1,0)$, donc $\pi(0) = \pi(1)\frac{1}{N}$, et donc $\pi(1) = N\pi(0)$. De même, $\pi(1)Q(1,2) = \pi(2)Q(2,1)$, d'où $\pi(1)\frac{N-1}{N} = \pi(2)\frac{2}{N}$, et donc $\pi(2) = \frac{N(N-1)}{2}\pi(0) = \binom{N}{2}\pi(0)$. Par récurrence, on voit que

$$\pi(x) = \binom{N}{x}\pi(0),$$

pour tout $x = 0, \ldots, N$. Comme π est une probabilité, on a $\sum_{x=0}^{N}\pi(x) = 1$, ce qui donne $\pi(0) = \frac{1}{2^N}$. Ainsi, l'unique probabilité invariante de la chaîne est

$$\binom{N}{x}\frac{1}{2^N}, \quad \text{pour } x = 0, \ldots, N,$$

c'est-à-dire la loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{2}$. On voit par contre que la période de la chaîne est 2, et donc il n'y a pas convergence à l'équilibre en temps long.