

A propos du contrôle et de l'optimisation de trajectoires

Franck BOYER

e-mail: franck.boyer@univ-cezanne.fr

Laboratoire d'Analyse Topologie et Probabilités,
Aix-Marseille Université

Aix-en-Provence, Décembre 2010

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

- On considère un système mécanique sur lequel on peut agir :
 - En modifiant les conditions initiales.
 - En exerçant une force extérieure sur le système.
 - Eventuellement en modifiant le dispositif.

On dit qu'on **contrôle le système**

- On considère un système mécanique sur lequel on peut agir :
 - En modifiant les conditions initiales.
 - En exerçant une force extérieure sur le système.
 - Eventuellement en modifiant le dispositif.

On dit qu'on **contrôle le système**

- Problèmes d'optimisation et/ou de contrôle :
 - Comment choisir le contrôle pour que la dynamique du système ait un comportement prescrit ?
Par exemple : atteindre un état donné à un instant donné ...
 - Comment choisir le contrôle pour que la trajectoire du système **optimise** un certain critère ? Temps minimal, coût minimal ?

- On considère un système mécanique sur lequel on peut agir :
 - En modifiant les conditions initiales.
 - En exerçant une force extérieure sur le système.
 - Eventuellement en modifiant le dispositif.

On dit qu'on **contrôle le système**

- Problèmes d'optimisation et/ou de contrôle :
 - Comment choisir le contrôle pour que la dynamique du système ait un comportement prescrit ?
Par exemple : atteindre un état donné à un instant donné ...
 - Comment choisir le contrôle pour que la trajectoire du système **optimise** un certain critère ? Temps minimal, coût minimal ?
- Pour chaque problème, deux grands types de questions :
 - Existe-t'il un contrôle convenable ?
 - Comment le caractériser / le calculer ?

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES



Isaac Newton (1643-1727)

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE - LOI DE NEWTON

Dans un repère galiléen, la variation en temps de la quantité de mouvement $P(t)$ d'un système mécanique est égale à la somme $F(t)$ des forces exercées sur ce système.

$$P'(t) = \frac{d}{dt}P = F(t).$$

- Pour une masse ponctuelle dont la position est $x(t)$ et la vitesse $v(t)$:

$$P(t) = Mv(t) = Mx'(t).$$

- Pour un système de plusieurs masses ponctuelles

$$P(t) = \sum_{i=1}^N M_i v_i(t) = \sum_{i=1}^N M_i x_i'(t).$$

Soit un système mécanique isolé dont la position est décrite par n degrés de liberté indépendants

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n).$$

- Son énergie cinétique totale est notée $T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$.
- Son énergie potentielle totale est notée $V(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$.

On définit le **Lagrangien** du système

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$



Leonhard Euler
(1707-1783)



Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813)

Soit un système mécanique isolé dont la position est décrite par n degrés de liberté indépendants

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n).$$

- Son énergie cinétique totale est notée $T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$.
- Son énergie potentielle totale est notée $V(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$.

On définit le **Lagrangien** du système

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

EQUATIONS D'EULER-LAGRANGE

Les équations du mouvement du système s'écrivent sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

CES ÉQUATIONS SONT ÉQUIVALENTES À CELLES DE NEWTON

mais elles sont plus faciles à utiliser pour les systèmes complexes.

UN POINT MATÉRIEL DE MASSE M SOUMIS À LA PESANTEUR \mathbf{g}

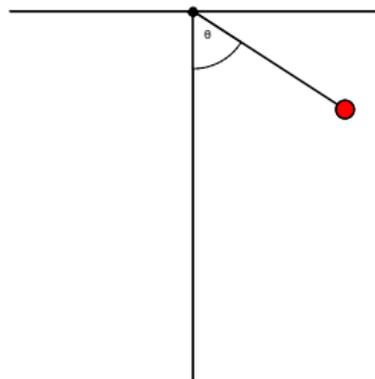
- $n = 3$ degrés de liberté
- $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$: les coordonnées du point matériel dans un repère fixe.
- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$
- Energie potentielle : $V = -M(\mathbf{g} \cdot \mathbf{q}) = -M(g_1q_1 + g_2q_2 + g_3q_3)$.
- Lagrangien : $L = \frac{1}{2}M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + M\mathbf{g} \cdot \mathbf{q}$
- Equations d'Euler-Lagrange :

$$Mq_i''(t) = \frac{d}{dt} (Mq_i'(t)) = Mg_i$$

$$\iff \text{Loi de Newton : } M\mathbf{q}'' = M\mathbf{g}.$$

PENDULE SIMPLE DE LONGUEUR l

- Mouvement plan
- $n = 1$ degré de liberté
- $q_1 = \theta$ angle du pendule avec la verticale.
- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2$
- Energie potentielle : $V = -Mgl \cos(\theta)$



- Lagrangien : $L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 + Mgl \cos(\theta)$
- Equations d'Euler-Lagrange :

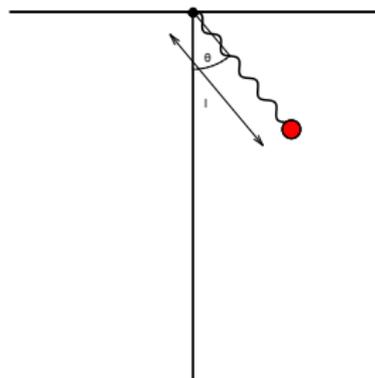
$$Ml^2\theta'' = -Mgl \sin(\theta).$$

ou encore

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0.$$

PENDULE-RESSORT DE LONGUEUR AU REPOS l_0 ET DE RAIDEUR k

- Mouvement plan
- $n = 2$ degrés de liberté
- $q_1 = \theta$ angle du pendule avec la verticale, $q_2 = l$ longueur du pendule
- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}M \left(\dot{l}^2 \dot{\theta}^2 + \dot{l}^2 \right)$

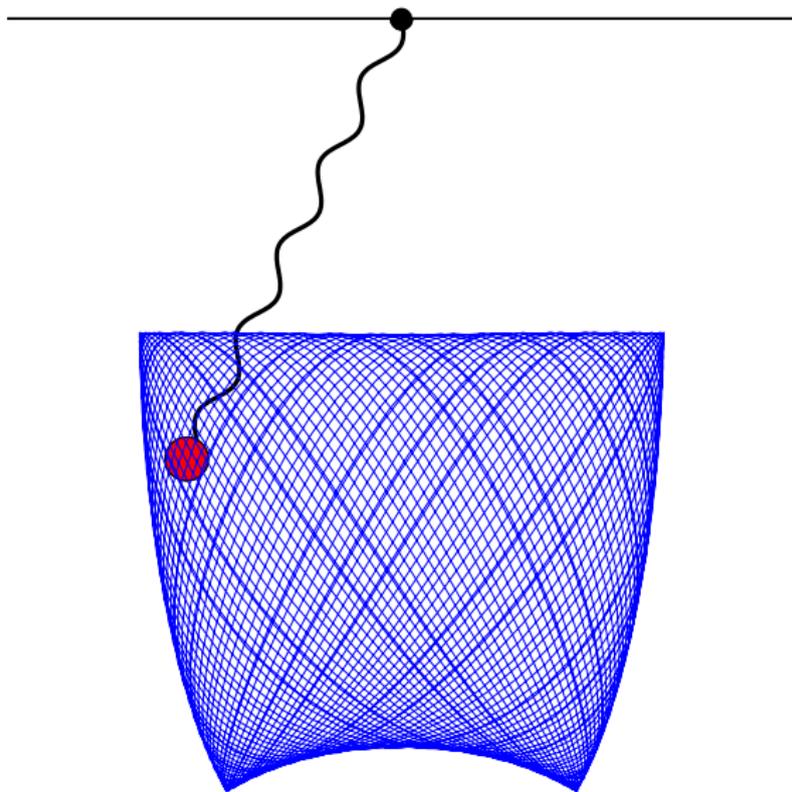


- Energie potentielle : $V = -Mgl \cos(\theta) + \frac{k}{2}(l - l_0)^2$
- Lagrangien : $L(\theta, l, \dot{\theta}, \dot{l}) = \frac{1}{2}M \left(\dot{l}^2 \dot{\theta}^2 + \dot{l}^2 \right) + Mgl \cos(\theta) - \frac{k}{2}(l - l_0)^2$
- Equations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{cases} Ml^2 \theta'' + 2Ml l' \theta' = -Mgl \sin(\theta), \\ Ml'' = Ml(\theta')^2 + Mg \cos(\theta) - k(l - l_0), \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \theta'' + 2 \frac{l'}{l} \theta' = -\frac{g}{l} \sin(\theta), \\ l'' = l(\theta')^2 + g \cos(\theta) - \frac{k}{M}(l - l_0), \end{cases}$$



1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- **Ballistique élémentaire**
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

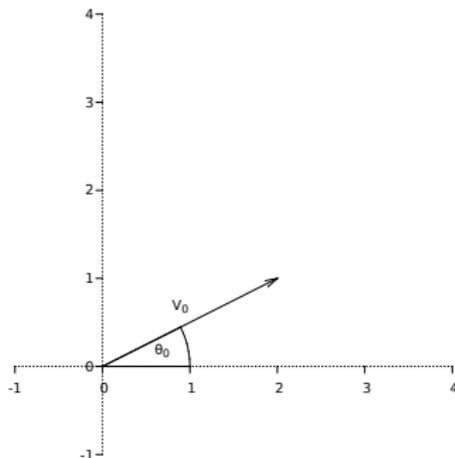
4 RÉFÉRENCES

DÉFINITION

Etude du mouvement des corps soumis uniquement à la gravité.

EXEMPLE : LE TIR DE BOULET OU DE MISSILE

- On tire un projectile à partir de l'origine $(0, 0)$.
- La direction du tir est donnée par un angle θ_0 .
- La vitesse initiale du projectile est appelée V_0 .
- Pas de frottement.



DÉFINITION

Etude du mouvement des corps soumis uniquement à la gravité.

EXEMPLE : LE TIR DE BOULET OU DE MISSILE

- On tire un projectile à partir de l'origine $(0, 0)$.
- La direction du tir est donnée par un angle θ_0 .
- La vitesse initiale du projectile est appelée V_0 .
- **Pas de frottement.**

EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\begin{cases} x'(t) = v_x(t), & y'(t) = v_y(t), \\ Mv'_x(t) = 0, & Mv'_y(t) = -Mg, \end{cases}$$

avec $x(0) = y(0) = 0$, $v_x(0) = V_0 \cos(\theta_0)$ et $v_y(0) = V_0 \sin(\theta_0)$.

RÉSOLUTION EXACTE

$$\begin{cases} x(t) &= V_0 \cos(\theta_0) t, \\ y(t) &= V_0 \sin(\theta_0) t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La courbe parcourue par le projectile est une parabole (indépendante de M)

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2(\theta_0)}x^2 + \tan(\theta_0)x.$$

$$\begin{cases} x(t) &= V_0 \cos(\theta_0)t, \\ y(t) &= V_0 \sin(\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La courbe parcourue par le projectile est une parabole

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2(\theta_0)}x^2 + \tan(\theta_0)x.$$

COMMENT LA TRAJECTOIRE DÉPEND DES PARAMÈTRES ?

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos(\theta_0)t, \\ y(t) = V_0 \sin(\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La courbe parcourue par le projectile est une parabole

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2(\theta_0)}x^2 + \tan(\theta_0)x.$$

COMMENT LA TRAJECTOIRE DÉPEND DES PARAMÈTRES ?

- **Temps de vol :**

$$T = \frac{2V_0 \sin(\theta_0)}{g}.$$

Fonction croissante de θ_0 qui atteint son maximum en $\theta_0 = \pi/2 = 90^\circ$.

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos(\theta_0)t, \\ y(t) = V_0 \sin(\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La courbe parcourue par le projectile est une parabole

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2(\theta_0)}x^2 + \tan(\theta_0)x.$$

COMMENT LA TRAJECTOIRE DÉPEND DES PARAMÈTRES ?

- **Temps de vol :**

$$T = \frac{2V_0 \sin(\theta_0)}{g}.$$

Fonction croissante de θ_0 qui atteint son maximum en $\theta_0 = \pi/2 = 90^\circ$.

- **Portée (distance horizontale parcourue) :**

$$P = \frac{V_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}.$$

Celle-ci est maximale pour $\theta_0 = \pi/4 = 45^\circ$.

Une cible située à distance $< P_{max}$ peut être atteinte pour deux valeurs de l'angle θ_0 mais le temps d'atteinte de la cible sera différent.

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos(\theta_0)t, \\ y(t) = V_0 \sin(\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La courbe parcourue par le projectile est une parabole

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2(\theta_0)}x^2 + \tan(\theta_0)x.$$

COMMENT LA TRAJECTOIRE DÉPEND DES PARAMÈTRES ?

- **Temps de vol :**

$$T = \frac{2V_0 \sin(\theta_0)}{g}.$$

Fonction croissante de θ_0 qui atteint son maximum en $\theta_0 = \pi/2 = 90^\circ$.

- **Portée (distance horizontale parcourue) :**

$$P = \frac{V_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}.$$

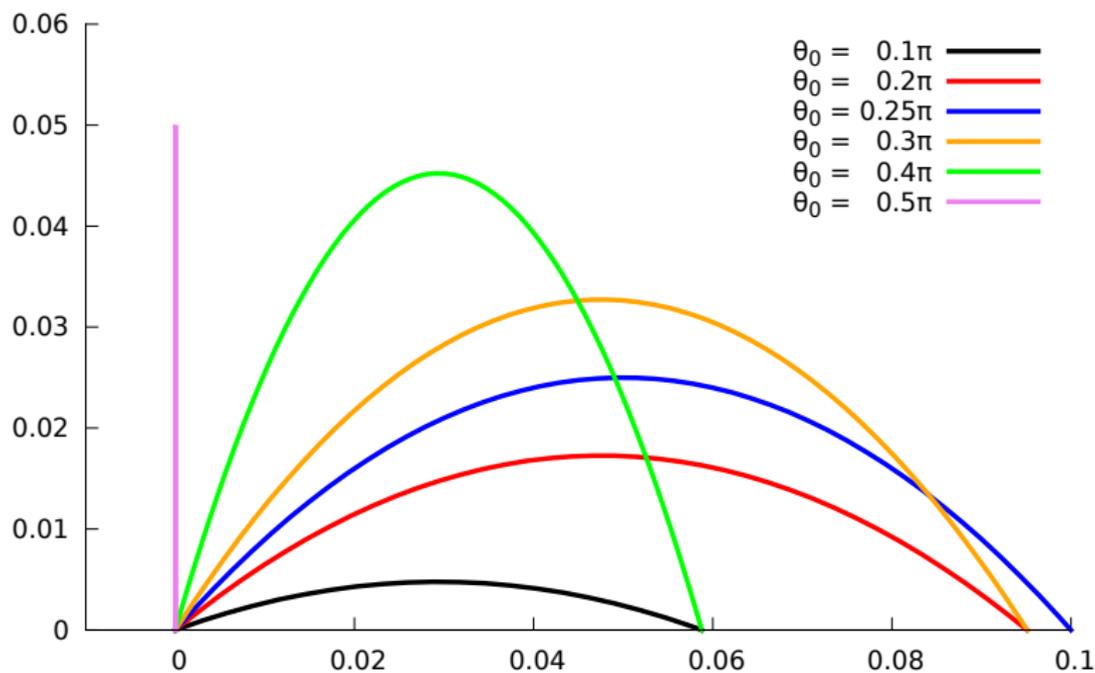
Celle-ci est maximale pour $\theta_0 = \pi/4 = 45^\circ$.

Une cible située à distance $< P_{max}$ peut être atteinte pour deux valeurs de l'angle θ_0 mais le temps d'atteinte de la cible sera différent.

- **Flèche (altitude maximale atteinte) :**

$$F = \frac{V_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}.$$

FORMES DES TRAJECTOIRES EN FONCTION DE L'ANGLE DU TIR



SI ON PREND EN COMPTE LES FROTTEMENTS

- Les équations s'écrivent

$$\begin{cases} x'(t) = v_x(t), & y'(t) = v_y(t), \\ Mv_x'(t) = -kv_x(t), & Mv_y'(t) = -Mg - kv_y(t), \end{cases}$$

avec $x(0) = y(0) = 0$, $v_x(0) = V_0 \cos(\theta_0)$ et $v_y(0) = V_0 \sin(\theta_0)$.

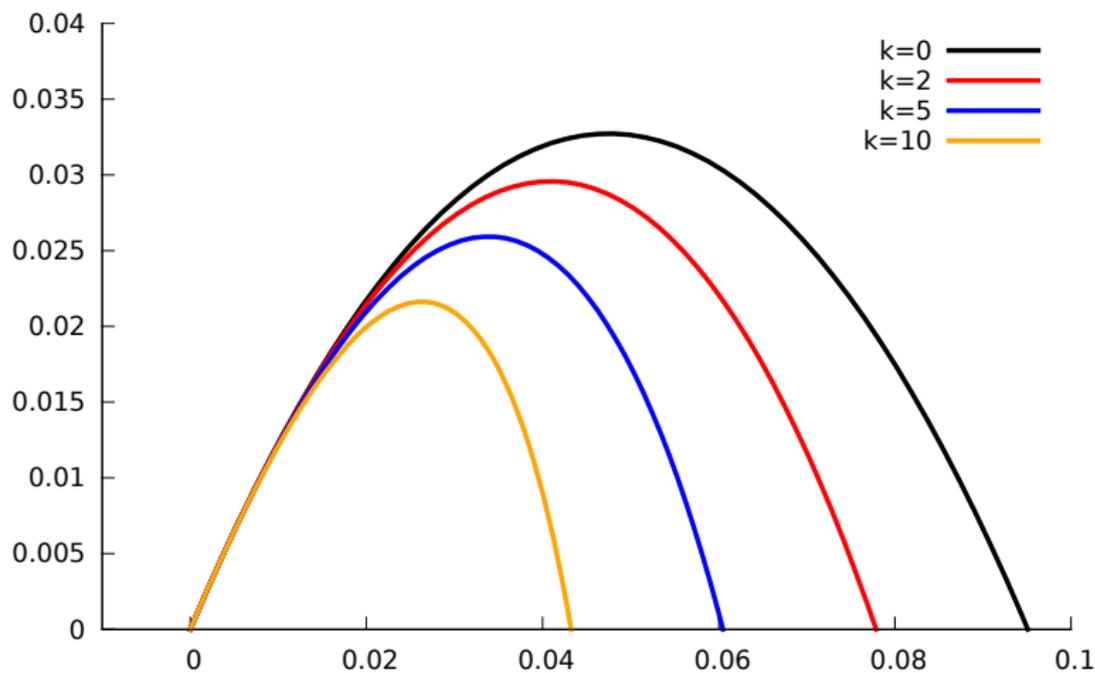
- Solution exacte :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{M}{k} V_0 \cos(\theta_0) \left(1 - e^{-kt/M} \right), \\ y(t) = \frac{M}{k} \left(V_0 \sin(\theta_0) + \frac{gM}{k} \right) \left(1 - e^{-kt/M} \right) - \frac{gM}{k} t. \end{cases}$$

Elle **dépend** de k et M

\rightsquigarrow OPTIMISATION DE FORMES !

SI ON PREND EN COMPTE LES FROTTEMENTS



Trajectoires obtenues pour une même donnée initiale

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

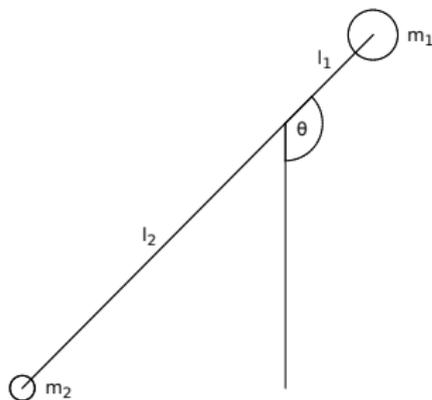
3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

- Contrepoids : m_1
- Projectile : $m_2 \ll m_1$
- Hauteur du contrepoids

$$h_0 = l_1(1 - \cos(\theta_0))$$

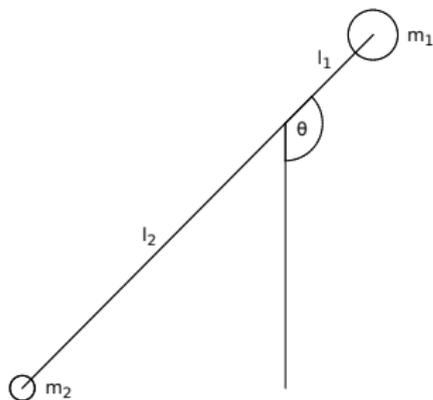


PRINCIPE :

- On monte le contrepoids à une certaine hauteur h_0 .
- On lâche le système sans vitesse $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$.
- Sous l'effet de la pesanteur, le contrepoids descend et fait monter le projectile.

- Contrepoids : m_1
- Projectile : $m_2 \ll m_1$
- Hauteur du contrepoids

$$h_0 = l_1(1 - \cos(\theta_0))$$



LAGRANGIEN

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \underbrace{\frac{1}{2}m_1l_1^2(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2(\dot{\theta})^2}_{=T} - \underbrace{(m_1gl_1(1 - \cos(\theta)) - m_2gl_2(1 - \cos(\theta)))}_{=V}.$$

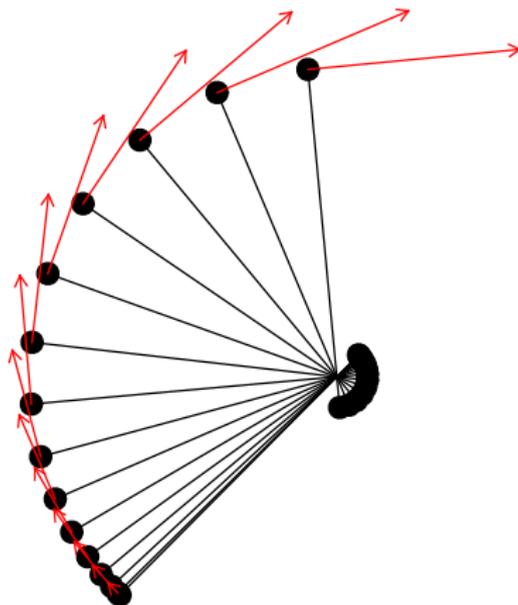
EQUATION DU MOUVEMENT

$$\theta'' = g \frac{m_2l_2 - m_1l_1}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2} \sin(\theta).$$

EXEMPLE (Simulations numériques !)

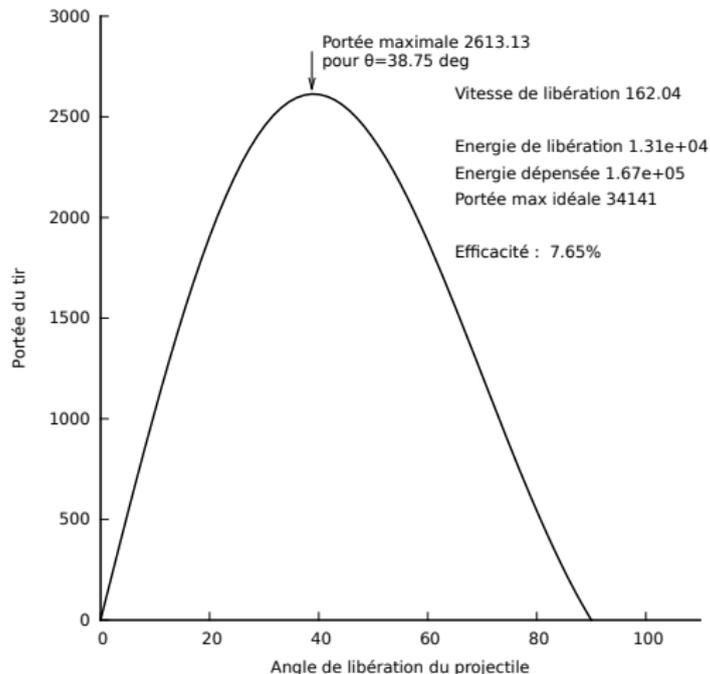
$\theta_0 = 135^\circ$ (45° au-dessus de l'horizontale), $m_1 = 1000$, $m_2 = 10$

$l_1 = 10$, $l_2 = 100$.



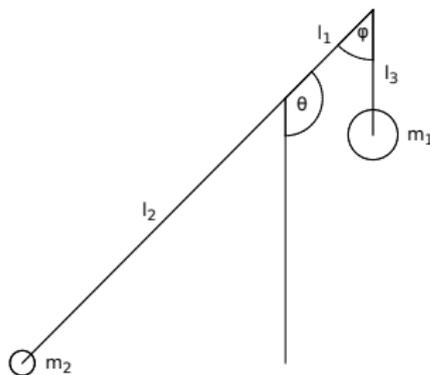
EXEMPLE (Simulations numériques !)

$\theta_0 = 135^\circ$ (45° au-dessus de l'horizontale), $m_1 = 1000$, $m_2 = 10$
 $l_1 = 10$, $l_2 = 100$.



- Contrepoids : m_1
- Projectile : $m_2 \ll m_1$
- Longueur de l'attache : l_3
- Hauteur initiale du contrepoids

$$h_0 = l_1(1 - \cos \theta_0).$$

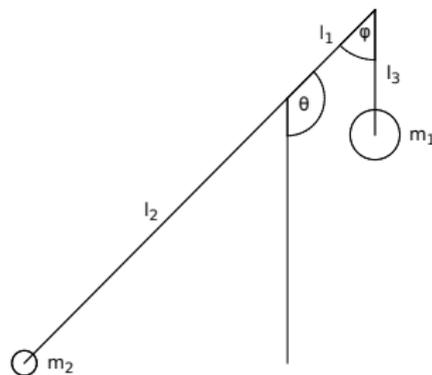


PRINCIPE :

- On monte le contrepoids à une certaine hauteur h_0 .
- On lâche le système sans vitesse $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$.
- Sous l'effet de la pesanteur, le contrepoids descend et fait monter le projectile.

- Contrepoids : m_1
- Projectile : $m_2 \ll m_1$
- Longueur de l'attache : l_3
- Hauteur initiale du contrepoids

$$h_0 = l_1(1 - \cos \theta_0).$$



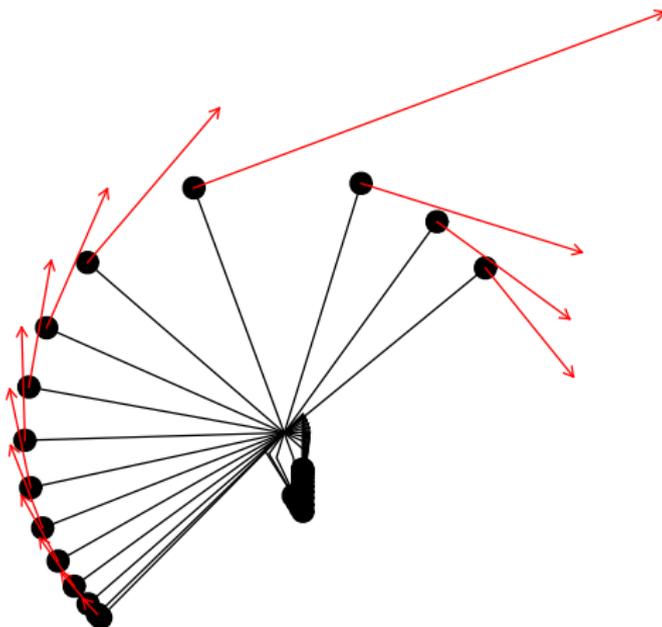
EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_2 l_2^2 + m_1 l_3^2 + m_1 l_1^2 - 2m_1 l_1 l_3 \cos(\phi)) \theta'' + m_1 (l_3^2 - l_1 l_3 \cos(\phi)) \phi'' \\ \quad = g(l_2 m_2 - l_1 m_1) \sin(\theta) + g m_1 l_3 \sin(\theta + \phi) \\ \quad \quad - 2m_1 l_1 l_3 \sin(\phi) \theta' \phi' - m_1 l_1 l_3 \sin(\phi) (\phi')^2 \\ (l_3 - l_1 \cos(\phi)) \theta'' + l_3 \phi'' = l_1 \sin(\phi) (\theta')^2 + \sin(\theta + \phi) g \end{array} \right.$$

EXEMPLE (Simulations numériques !)

$\theta_0 = 135^\circ$, $\phi_0 = 45^\circ$, $m_1 = 1000$, $m_2 = 10$

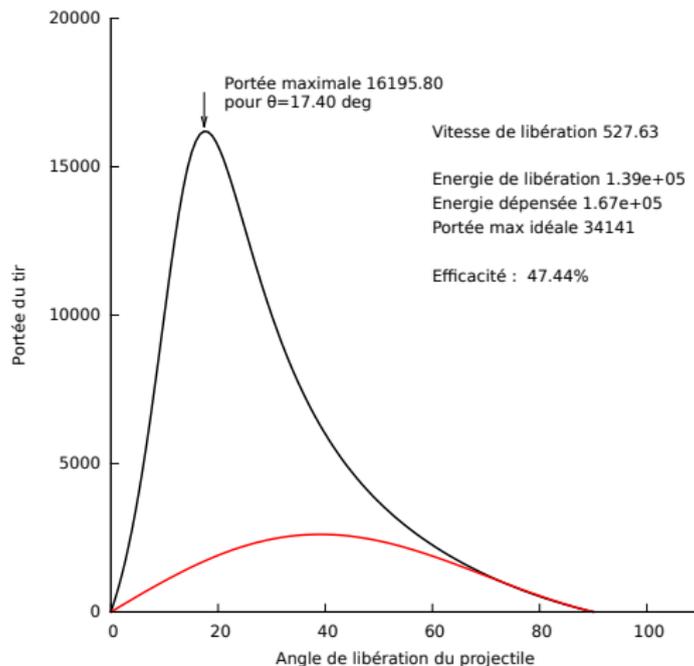
$l_1 = 10$, $l_2 = 100$, $l_3 = 21$.



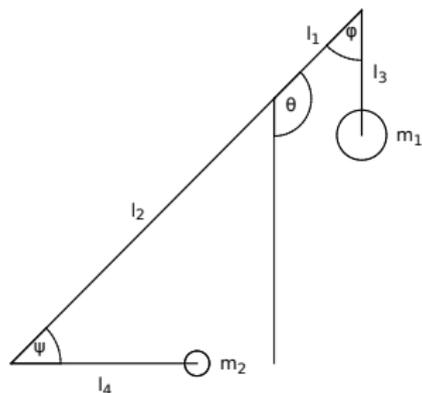
EXEMPLE (Simulations numériques !)

$\theta_0 = 135^\circ$, $\phi_0 = 45^\circ$, $m_1 = 1000$, $m_2 = 10$

$l_1 = 10$, $l_2 = 100$, $l_3 = 21$.

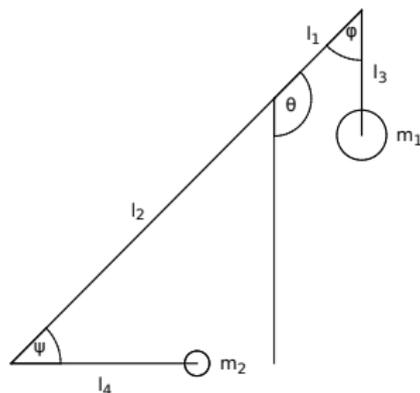


- Contrepoids : m_1
- Projectile : $m_2 \ll m_1$
- Longueur de l'attache : l_3
- Longueur de l'attache du projectile : l_4



Source : Wikipedia

- Contrepoids : m_1
- Projectile : $m_2 \ll m_1$
- Longueur de l'attache : l_3
- Longueur de l'attache du projectile : l_4



EQUATIONS DU MOUVEMENT

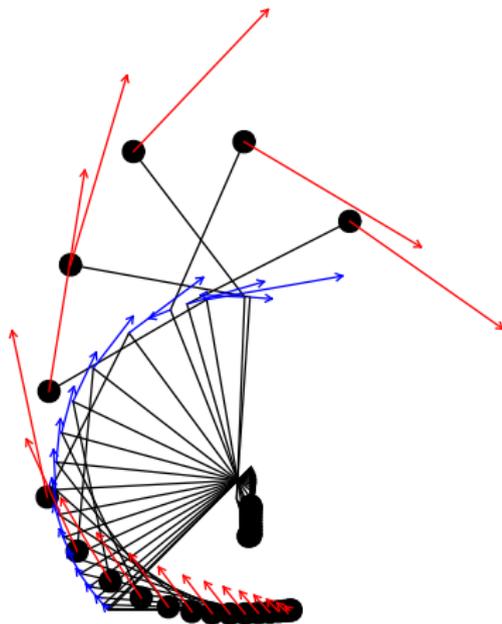
$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 - 2m_1 l_1 l_3 \cos(\phi) - 2m_2 l_2 l_4 \cos(\psi) + m_2 l_4^2 + m_1 l_3^2) \theta'' \\ \quad + (m_1 l_3^2 - m_1 l_1 l_3 \cos(\phi)) \phi'' + (-m_2 l_4^2 + m_2 l_2 l_4 \cos(\psi)) \psi'' \\ \quad = -m_1 g l_1 \sin(\theta) + m_2 g l_2 \sin(\theta) - m_2 g l_4 \sin(\theta - \psi) + m_1 g l_3 \sin(\theta + \phi) \\ \quad - 2m_1 l_1 l_3 \sin(\phi) \theta' \phi' - m_1 l_1 l_3 \sin(\phi) (\phi')^2 - 2m_2 l_2 l_4 \sin(\psi) \theta' \psi' \\ \quad + m_2 l_2 l_4 \sin(\psi) (\psi')^2 \\ (-m_2 l_4^2 + m_2 l_2 l_4 \cos(\psi)) \theta'' + m_2 l_4^2 \psi'' = m_2 l_2 l_4 (\theta')^2 \sin(\psi) - m_2 g l_4 \sin(\psi - \theta) \\ (m_1 l_3^2 - m_1 l_1 l_3 \cos(\phi)) \theta'' + m_1 l_3^2 \phi'' = m_1 l_1 l_3 (\theta')^2 \sin(\phi) + m_1 g l_3 \sin(\theta + \phi) \end{array} \right.$$

EXEMPLE (Simulations numériques !)

$\theta_0 = 135^\circ$, $\phi_0 = 45^\circ$, $\psi_0 = 45^\circ$, $m_1 = 1000$, $m_2 = 10$

$l_1 = 10$, $l_2 = 100$, $l_3 = 21$, $l_4 = 100$.

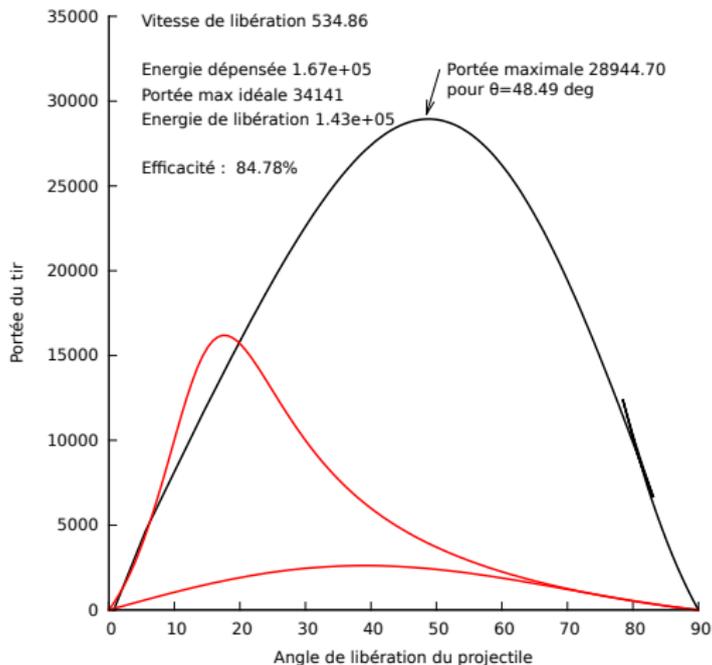
Echelle des vitesses
divisée par 2.



EXEMPLE (Simulations numériques !)

$$\theta_0 = 135^\circ, \phi_0 = 45^\circ, \psi_0 = 45^\circ, m_1 = 1000, m_2 = 10$$

$$l_1 = 10, l_2 = 100, l_3 = 21, l_4 = 100.$$



1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

SYSTÈME D'EDO LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11} x_1(t) + \cdots + a_{1n} x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21} x_1(t) + \cdots + a_{2n} x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1} x_1(t) + \cdots + a_{nn} x_n(t). \end{cases}$$

SYSTÈME D'EDO LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

$$x'(t) = Ax(t), \quad (\star)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

SYSTÈME D'EDO LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

$$x'(t) = Ax(t), \quad (\star)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

THÉORÈME

Etant donnés $x_1^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution de (\star) qui vérifie

$$x(0) = x^0 = {}^t(x_1^0, \dots, x_n^0).$$

Elle s'exprime sous la forme

$$x(t) = e^{tA} x^0.$$

DÉFINITION
$$e^M = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} M^k.$$

PROPRIÉTÉS
$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

$\forall M, \exists P$ polynôme de degré $< n$ tel que $e^M = P(M) = \alpha_0 I + \alpha_1 M + \cdots + \alpha_{n-1} M^{n-1}$

SYSTÈME LINÉAIRE NON HOMOGENÈ

$$x'(t) = Ax(t) + f(t). \quad (**)$$

THÉORÈME (FORMULE DE DUHAMEL)

Pour toute donnée initiale $x^0 = {}^t(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution de (***) qui vérifie $x(0) = x^0$ et qui est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s) ds.$$

Cette formule généralise la **méthode de la variation de la constante**.



Jean-Marie Constant Duhamel
(1797-1872)

SYSTÈME D'EDO LINÉAIRE CONTRÔLÉ

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

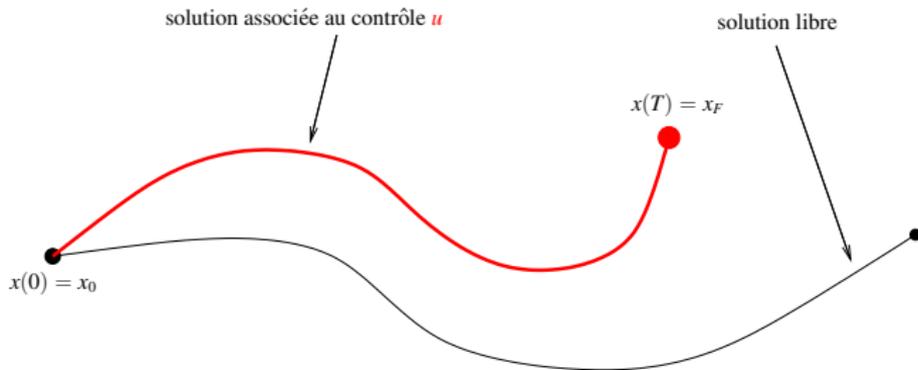
avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ (avec $k \leq n$), $u(t) \in \mathbb{R}^k$.

DÉFINITION (CONTRÔLABILITÉ)

Le système (1) est dit **contrôlable au temps $T > 0$** si :

Pour tout choix de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et de $x_F \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^k$ tel que la solution associée de (1) vérifie

$$x(0) = x_0, \text{ et } x(T) = x_F.$$



1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

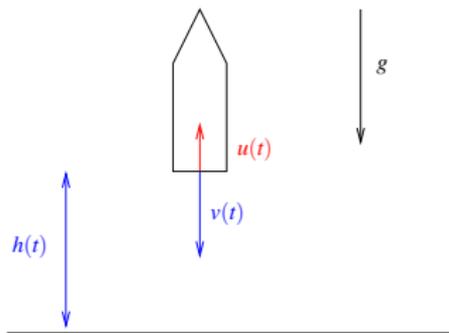
- Les équations différentielles linéaires
- **Alunissage d'une fusée**
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = u(t) - g, \\ h(0) = h_0 > 0, \\ v(0) = v_0 < 0, \end{cases}$$

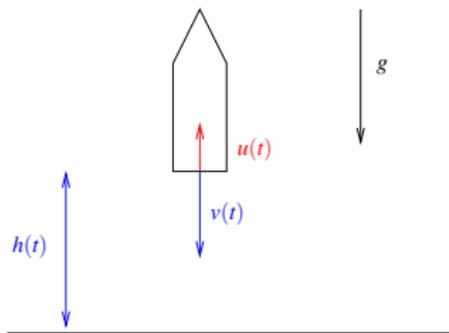
- But : trouver un contrôle u qui amène la fusée à l'état final $h(T) = 0$, $v(T) = 0$.



EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = u(t) - g, \\ h(0) = h_0 > 0, \\ v(0) = v_0 < 0, \end{cases}$$

- But : trouver un contrôle u qui amène la fusée à l'état final $h(T) = 0$, $v(T) = 0$.

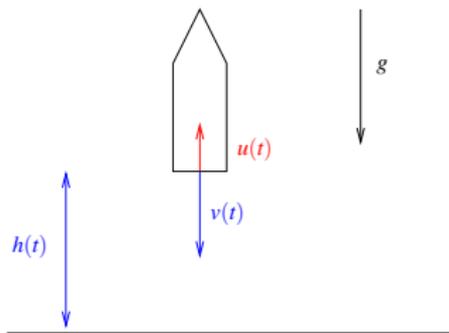


PETITS CALCULS :

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - gt + \int_0^t u(s) ds, \\ h(t) = h_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \int_0^t u(s)(t-s) ds. \end{cases}$$

EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = u(t) - g, \\ h(0) = h_0 > 0, \\ v(0) = v_0 < 0, \end{cases}$$



- But : trouver un contrôle u qui amène la fusée à l'état final $h(T) = 0$, $v(T) = 0$.

PETITS CALCULS :

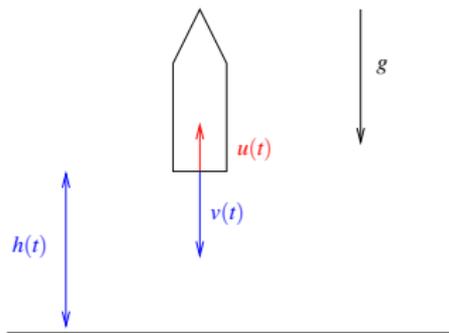
$$\begin{cases} v(t) = v_0 - gt + \int_0^t u(s) ds, \\ h(t) = h_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \int_0^t u(s)(t-s) ds. \end{cases}$$

LE CONTRÔLE CONVIENT SI ET SEULEMENT SI

$$\begin{cases} \int_0^T u(s) ds = gT - v_0, \\ \int_0^T u(s)(T-s) ds = \frac{1}{2}gT^2 - v_0T - h_0 \end{cases} \implies \forall T > 0, \exists \text{ une infinité de solutions.}$$

EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = u(t) - g, \\ h(0) = h_0 > 0, \\ v(0) = v_0 < 0, \end{cases}$$



- But : trouver un contrôle u qui amène la fusée à l'état final $h(T) = 0$, $v(T) = 0$.

PETITS CALCULS :

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - gt + \int_0^t u(s) ds, \\ h(t) = h_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \int_0^t u(s)(t-s) ds. \end{cases}$$

LE CONTRÔLE CONVIENT SI ET SEULEMENT SI

$$\begin{cases} \int_0^T u(s) ds = gT - v_0, \\ \int_0^T u(s)(T-s) ds = \frac{1}{2}gT^2 - v_0T - h_0 \end{cases} \implies \forall T > 0, \exists \text{ une infinité de solutions.}$$

CONTRÔLE OPTIMAL : Y'a-t'il un contrôle de coût $C(u) = \int_0^T |u(s)|^2 ds$ minimal ?

PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

On fixe $T > 0$ et on cherche $u : [0, T] \times \mathbb{R}$ qui vérifie

$$(\star) \begin{cases} \int_0^T u(s) ds = gT - v_0, \\ \int_0^T u(s)(T-s) ds = \frac{1}{2}gT^2 - v_0T - h_0 \end{cases}$$

tout en minimisant $C(u) = \int_0^T |u(s)|^2 ds$.

PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

On fixe $T > 0$ et on cherche $u : [0, T] \times \mathbb{R}$ qui vérifie

$$(\star) \begin{cases} \int_0^T u(s) ds = gT - v_0, \\ \int_0^T u(s) \left(\frac{T}{2} - s \right) ds = -v_0 \frac{T}{2} - h_0 \end{cases}$$

tout en minimisant $C(u) = \int_0^T |u(s)|^2 ds$.

PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

On fixe $T > 0$ et on cherche $u : [0, T] \times \mathbb{R}$ qui vérifie

$$(\star) \begin{cases} \int_0^T u(s) ds = gT - v_0, \\ \int_0^T u(s) \left(\frac{T}{2} - s\right) ds = -v_0 \frac{T}{2} - h_0 \end{cases}$$

tout en minimisant $C(u) = \int_0^T |u(s)|^2 ds$.

- On cherche une solution u de (\star) sous la forme

$$u(t) = a + b \left(\frac{T}{2} - t\right) \Rightarrow u(t) = \left(g - \frac{v_0}{T}\right) - \left(\frac{12h_0}{T^3} + \frac{6v_0}{T^2}\right) \left(\frac{T}{2} - t\right).$$

PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

On fixe $T > 0$ et on cherche $u : [0, T] \times \mathbb{R}$ qui vérifie

$$(\star) \begin{cases} \int_0^T u(s) ds = gT - v_0, \\ \int_0^T u(s) \left(\frac{T}{2} - s\right) ds = -v_0 \frac{T}{2} - h_0 \end{cases}$$

tout en minimisant $C(u) = \int_0^T |u(s)|^2 ds$.

- On cherche une solution u de (\star) sous la forme

$$u(t) = a + b \left(\frac{T}{2} - t\right) \Rightarrow u(t) = \left(g - \frac{v_0}{T}\right) - \left(\frac{12h_0}{T^3} + \frac{6v_0}{T^2}\right) \left(\frac{T}{2} - t\right).$$

- C'est bien le contrôle de coût minimal : si \tilde{u} est une autre solution de (\star)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T (u(s) - \tilde{u}(s)) ds = \int_0^T (u(s) - \tilde{u}(s)) (T/2 - s) ds = \int_0^T (u(s) - \tilde{u}(s))u(s) ds, \\ \Rightarrow \int_0^T \left(|\tilde{u}(s)|^2 - |u(s)|^2 \right) ds &= \int_0^T (\tilde{u} - u)(\tilde{u} \boxed{+} u) ds = \int_0^T (\tilde{u} - u)(\tilde{u} \boxed{-} u) ds \geq 0. \end{aligned}$$

PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

On fixe $T > 0$ et on cherche $u : [0, T] \times \mathbb{R}$ qui vérifie

$$(\star) \begin{cases} \int_0^T u(s) ds = gT - v_0, \\ \int_0^T u(s) \left(\frac{T}{2} - s\right) ds = -v_0 \frac{T}{2} - h_0 \end{cases}$$

tout en minimisant $C(u) = \int_0^T |u(s)|^2 ds$.

Le contrôle optimal est donc donné par

$$u(t) = \left(g - \frac{v_0}{T}\right) - \left(\frac{12h_0}{T^3} + \frac{6v_0}{T^2}\right) \left(\frac{T}{2} - t\right).$$

DÉFAUTS DU MODÈLE :

- En pratique la commande du pilote n'est pas instantanément transmise au véhicule.
- Si le temps final T est trop petit, le contrôle devient très grand

$$\max_{[0, T]} |u| \xrightarrow{T \rightarrow 0} +\infty.$$

EQUATIONS DU MOUVEMENT :

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = w(t) - g, \\ w'(t) = \alpha(u(t) - w(t)), \end{cases}$$

- La poussée est notée maintenant w , le contrôle u est l'action du pilote sur les commandes de l'appareil.
- Le coefficient $1/\alpha$ est *grosso modo* le temps de réponse des moteurs à la commande.
On retrouve le modèle précédent pour $\alpha \rightarrow +\infty$ (\sim temps de réaction nul).
- A l'instant initial on a $h(0) = h_0 > 0$ et $v(0) = v_0 < 0$, $w(0) = 0$.
- On souhaite amener la fusée à l'état final $h(T) = 0$, $v(T) = 0$, $w(T) = 0$.

EQUATIONS DU MOUVEMENT :

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = w(t) - g, \\ w'(t) = \alpha(u(t) - w(t)), \end{cases}$$

- La poussée est notée maintenant w , le contrôle u est l'action du pilote sur les commandes de l'appareil.
- Le coefficient $1/\alpha$ est *grosso modo* le temps de réponse des moteurs à la commande.
On retrouve le modèle précédent pour $\alpha \rightarrow +\infty$ (\sim temps de réaction nul).
- A l'instant initial on a $h(0) = h_0 > 0$ et $v(0) = v_0 < 0$, $w(0) = 0$.
- On souhaite amener la fusée à l'état final $h(T) = 0$, $v(T) = 0$, $w(T) = 0$.

PETITS CALCULS :

$$\begin{cases} w(t) = \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} u(s) ds \\ v(t) = v_0 - gt + \int_0^t (1 - e^{-\alpha(t-s)}) u(s) ds \\ h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \int_0^t \left[(t-s) + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha(t-s)} - 1) \right] u(s) ds. \end{cases}$$

EQUATIONS DU MOUVEMENT :

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = w(t) - g, \\ w'(t) = \alpha(u(t) - w(t)), \end{cases}$$

- La poussée est notée maintenant w , le contrôle u est l'action du pilote sur les commandes de l'appareil.
- Le coefficient $1/\alpha$ est *grosso modo* le temps de réponse des moteurs à la commande.
On retrouve le modèle précédent pour $\alpha \rightarrow +\infty$ (\sim temps de réaction nul).
- A l'instant initial on a $h(0) = h_0 > 0$ et $v(0) = v_0 < 0$, $w(0) = 0$.
- On souhaite amener la fusée à l'état final $h(T) = 0$, $v(T) = 0$, $w(T) = 0$.

LE CONTRÔLE CONVIENT SI ET SEULEMENT SI

$$\begin{cases} \int_0^T e^{-\alpha(T-s)} u(s) ds = 0 \\ \int_0^T (1 - e^{-\alpha(T-s)}) u(s) ds = gT - v_0 \\ \int_0^T \left[(T-s) + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha(T-s)} - 1) \right] u(s) ds = \frac{1}{2}gT^2 - v_0T - h_0. \end{cases}$$

EQUATIONS DU MOUVEMENT :

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = w(t) - g, \\ w'(t) = \alpha(u(t) - w(t)), \end{cases}$$

- La poussée est notée maintenant w , le contrôle u est l'action du pilote sur les commandes de l'appareil.
- Le coefficient $1/\alpha$ est *grosso modo* le temps de réponse des moteurs à la commande.
On retrouve le modèle précédent pour $\alpha \rightarrow +\infty$ (\sim temps de réaction nul).
- A l'instant initial on a $h(0) = h_0 > 0$ et $v(0) = v_0 < 0$, $w(0) = 0$.
- On souhaite amener la fusée à l'état final $h(T) = 0$, $v(T) = 0$, $w(T) = 0$.

LE CONTRÔLE CONVIENT SI ET SEULEMENT SI

$$\begin{cases} \int_0^T e^{-\alpha(T-s)} u(s) ds = 0 \\ \int_0^T u(s) ds = gT - v_0 \\ \int_0^T \left(\frac{T}{2} - s \right) u(s) ds = -v_0 \frac{T}{2} - h_0 + \frac{1}{\alpha} (gT - v_0). \end{cases}$$

PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

Existe-t'il $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$(\star) \begin{cases} \int_0^T e^{-\alpha(T-s)} u(s) ds = 0 \\ \int_0^T u(s) ds = gT - v_0 \\ \int_0^T \left(\frac{T}{2} - s\right) u(s) ds = -v_0 \frac{T}{2} - h_0 + \frac{1}{\alpha}(gT - v_0), \end{cases}$$

et qui minimise le coût $C(u) = \int_0^T |u(s)|^2 ds$?

- On cherche u sous la forme

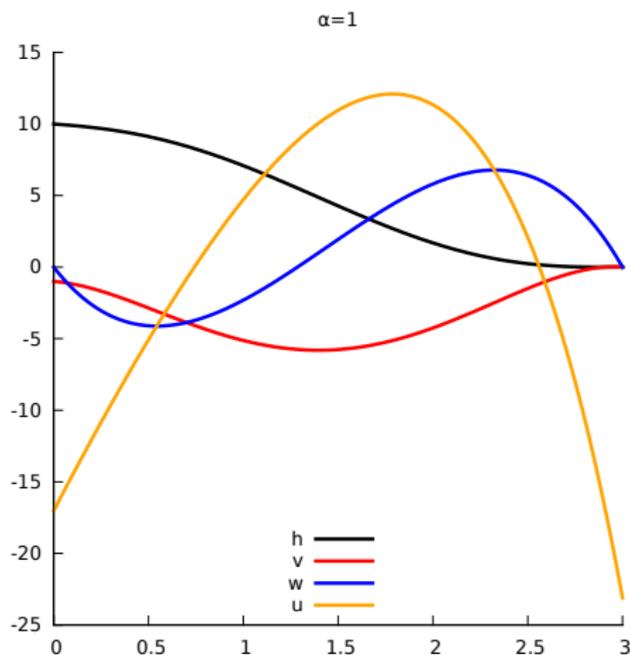
$$u(t) = a + b \left(\frac{T}{2} - t\right) + ce^{-\alpha(T-t)},$$

et on détermine a, b et c en fonction des paramètres ...

- On vérifie que ce contrôle est bien celui de coût minimal.

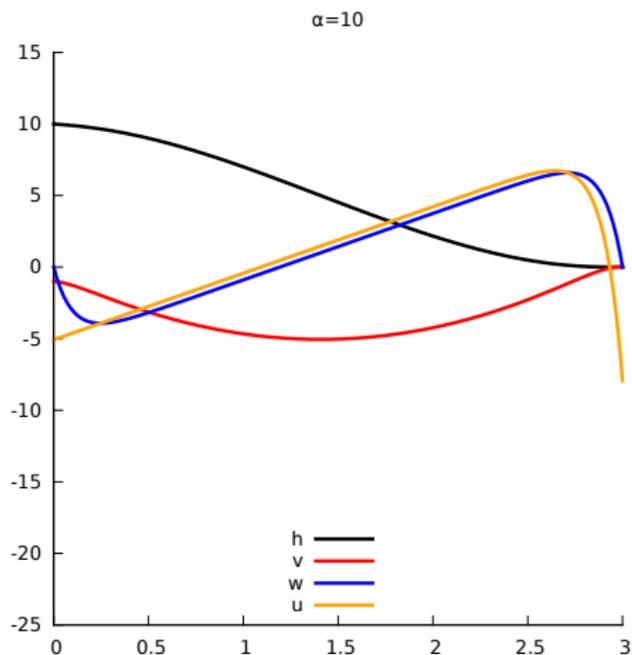
RÉSULTATS NUMÉRIQUES - INFLUENCE DU PARAMÈTRE α

$$g = 1, T = 3, h_0 = 10, v_0 = -1$$



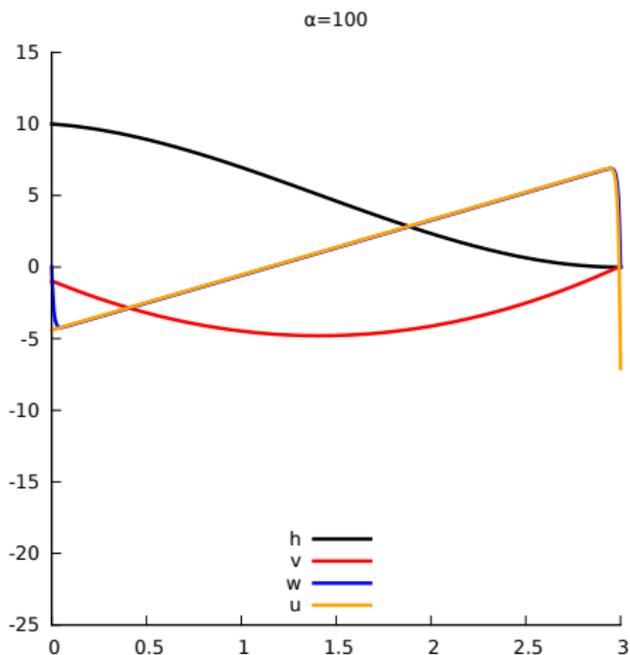
RÉSULTATS NUMÉRIQUES - INFLUENCE DU PARAMÈTRE α

$$g = 1, T = 3, h_0 = 10, v_0 = -1$$



RÉSULTATS NUMÉRIQUES - INFLUENCE DU PARAMÈTRE α

$$g = 1, T = 3, h_0 = 10, v_0 = -1$$



THÉORÈME (CRITÈRE DE KALMAN POUR LA CONTRÔLABILITÉ)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ et $t \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^n$. Le système différentiel linéaire

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t),$$

est *contrôlable en temps $T > 0$* si et seulement si la matrice

$$C = [B | AB | A^2B | \cdots | A^{n-1}B] \in M_{n,nk}(\mathbb{R})$$

est de rang n .

Remarque : Cette condition ne dépend pas de T !

THÉORÈME (CRITÈRE DE KALMAN POUR LA CONTRÔLABILITÉ)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ et $t \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^n$. Le système différentiel linéaire

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t),$$

est *contrôlable en temps $T > 0$* si et seulement si la matrice

$$C = [B | AB | A^2B | \cdots | A^{n-1}B] \in M_{n,nk}(\mathbb{R})$$

est de rang n .

Remarque : Cette condition ne dépend pas de T !

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION :

\Rightarrow Si $\text{Rang}(C) < n$, alors il existe $0 \neq \psi \in \mathbb{R}^n$ tel que ${}^t\psi C = 0$.

$${}^t\psi C = 0 \implies \forall p \geq 0, {}^t\psi A^p B = 0 \implies \forall s \in \mathbb{R}, {}^t\psi e^{sA} B = 0.$$

Duhamel $\Rightarrow x(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}(Bu(t) + r(t)) dt$ et donc

$${}^t\psi x(T) = {}^t\psi \left(e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}r(t) dt \right)$$

ainsi la valeur de ${}^t\psi x(T)$ ne dépend pas de u !

THÉORÈME (CRITÈRE DE KALMAN POUR LA CONTRÔLABILITÉ)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ et $t \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^n$. Le système différentiel linéaire

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t),$$

est *contrôlable en temps $T > 0$ si et seulement si* la matrice

$$C = [B | AB | A^2B | \cdots | A^{n-1}B] \in M_{n,nk}(\mathbb{R})$$

est de rang n .

Remarque : Cette condition ne dépend pas de T !

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION :

⇐ Si le système n'est pas contrôlable, il existe $0 \neq \psi \in \mathbb{R}^n$ tel que

$${}^t\psi \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t) dt = 0, \quad \forall u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Je choisis $u(t) = {}^tB.e^{(T-t)A}\psi$ ce qui donne

$$0 = \int_0^T \left\| {}^t\psi.e^{(T-t)A}B \right\|^2 dt,$$

donc ${}^t\psi e^{(T-t)A}B = 0$ pour tout $t \in [0, T] \Rightarrow {}^t\psi C = 0 \Rightarrow \text{Rang}(C) < n$.

THÉORÈME (CRITÈRE DE KALMAN POUR LA CONTRÔLABILITÉ)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ et $t \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^n$. Le système différentiel linéaire

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t),$$

est *contrôlable en temps $T > 0$* si et seulement si la matrice

$$C = [B | AB | A^2B | \cdots | A^{n-1}B] \in M_{n,nk}(\mathbb{R})$$

est de rang n .

Remarque : Cette condition ne dépend pas de T !

EXEMPLE DE LA FUSÉE

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \end{pmatrix}}_{=x(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \end{pmatrix}}_{=x(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}}_{=r(t)},$$

donc

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \text{Rang}(C) = 2.$$

THÉORÈME (CRITÈRE DE KALMAN POUR LA CONTRÔLABILITÉ)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ et $t \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^n$. Le système différentiel linéaire

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t),$$

est *contrôlable en temps $T > 0$* si et seulement si la matrice

$$C = [B | AB | A^2B | \cdots | A^{n-1}B] \in M_{n,nk}(\mathbb{R})$$

est de rang n .

Remarque : Cette condition ne dépend pas de T !

EXEMPLE DE LA FUSÉE AVEC RETARD DANS LA COMMANDE

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}}_{=x(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}}_{=x(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}}_{=B} u(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}}_{=r(t)},$$

donc

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & \alpha^3 \end{pmatrix}, \text{ et } \text{Rang}(C) = 3, \text{ dès que } \alpha \neq 0.$$

THÉORÈME (CONTRÔLE DE COÛT MINIMAL)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ et $t \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que le système différentiel linéaire

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t),$$

est contrôlable en temps $T > 0$ (donc vérifie le critère de Kalman).

THÉORÈME (CONTRÔLE DE COÛT MINIMAL)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ et $t \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que le système différentiel linéaire

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t),$$

est contrôlable en temps $T > 0$ (donc vérifie le critère de Kalman).

- Alors, pour $x_0, x_F \in \mathbb{R}^n$ et $T > 0$ fixés, il **existe un unique** contrôle $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$ de coût $C(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$ **minimal**.
- De plus, celui-ci est de la forme $u(t) = {}^t Bp(t)$, où p est solution du système **adjoint** $-p'(t) = {}^t A p(t)$, c'est-à-dire

$$u(t) = {}^t B e^{(T-t)A} p_F, \quad p_F \in \mathbb{R}^n.$$

THÉORÈME (CONTRÔLE DE COÛT MINIMAL)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ et $t \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que le système différentiel linéaire

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t),$$

est contrôlable en temps $T > 0$ (donc vérifie le critère de Kalman).

- Alors, pour $x_0, x_F \in \mathbb{R}^n$ et $T > 0$ fixés, il **existe un unique** contrôle $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$ de coût $C(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$ **minimal**.
- De plus, celui-ci est de la forme $u(t) = {}^t Bp(t)$, où p est solution du système **adjoint** $-p'(t) = {}^t A p(t)$, c'est-à-dire

$$u(t) = {}^t B e^{(T-t)A} p_F, \quad p_F \in \mathbb{R}^n.$$

CONCLUSIONS PRATIQUES :

Le contrôle optimal u est donc complètement caractérisé par les n composantes de p_F . Pour déterminer p_F , il "suffit" de résoudre le système linéaire

$$x_F = e^{TA} x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} r(t) dt + \left(\int_0^T e^{(T-t)A} B {}^t B e^{(T-t)A} dt \right) p_F.$$

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = u(t) - g. \end{cases}$$

- A l'instant initial on a $h(0) = h_0 > 0$ et $v(0) = v_0 < 0$.
- On souhaite amener la fusée à l'état final $h(T) = 0$, $v(T) = 0$.
- **Contrainte :** Les moteurs fournissent une poussée $0 \leq u \leq 2g$

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = u(t) - g. \end{cases}$$

- A l'instant initial on a $h(0) = h_0 > 0$ et $v(0) = v_0 < 0$.
- On souhaite amener la fusée à l'état final $h(T) = 0$, $v(T) = 0$.
- **Contrainte :** Les moteurs fournissent une poussée $0 \leq u \leq 2g$

REMARQUES :

- S'il existe une solution à ce problème, on a nécessairement

$$|v_0| = |v(T) - v_0| = \left| \int_0^T v'(t) dt \right| = \left| \int_0^T u(t) - g dt \right| \leq \int_0^T |u(t) - g| dt \leq gT,$$

et donc

$$T \geq \frac{|v_0|}{g} \Rightarrow \text{Le problème n'a pas de solutions si } T \text{ est trop petit !}$$

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = u(t) - g. \end{cases}$$

- A l'instant initial on a $h(0) = h_0 > 0$ et $v(0) = v_0 < 0$.
- On souhaite amener la fusée à l'état final $h(T) = 0$, $v(T) = 0$.
- **Contrainte :** Les moteurs fournissent une poussée $0 \leq u \leq 2g$

REMARQUES :

- S'il existe une solution à ce problème, on a nécessairement

$$|v_0| = |v(T) - v_0| = \left| \int_0^T v'(t) dt \right| = \left| \int_0^T u(t) - g dt \right| \leq \int_0^T |u(t) - g| dt \leq gT,$$

et donc

$$T \geq \frac{|v_0|}{g} \Rightarrow \text{Le problème n'a pas de solutions si } T \text{ est trop petit !}$$

- Nouvelles questions intéressantes :
 - Pour quelles valeurs de T , le problème admet-il des solutions ?
 - Quelle est le **temps minimal** de contrôle et que peut-on dire du contrôle associé ?

IDÉE : On cherche u sous la forme $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T_1, \\ 2g & \text{si } t > T_1. \end{cases}$

Peut-on trouver T et T_1 pour atteindre l'objectif ?

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = u(t) - g, \end{cases} \quad \text{avec} \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T_1, \\ 2g & \text{si } t > T_1. \end{cases}$$

RÉSOLUTION

- On trouve un temps de commutation T_1 et un temps final T

$$T_1 = \frac{v_0 + \sqrt{\frac{v_0^2}{2} + gh_0}}{g}, \quad \text{et} \quad T = 2T_1 - \frac{v_0}{g}.$$

- Il est donc nécessaire que

$$\frac{v_0^2}{2} + gh_0 \geq 0, \quad (C_1)$$

$$\frac{v_0^2}{2} - gh_0 \leq 0. \quad (C_2)$$

- La condition (C_1) est toujours vérifiée !
- La condition (C_2) exprime que le problème de contrôle n'aura pas de solution
 - si l'altitude initiale h_0 est trop petite.
 - ou si la vitesse initiale est trop grande.

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = u(t) - g, \end{cases} \quad \text{avec} \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T_1, \\ 2g & \text{si } t > T_1. \end{cases}$$

THÉORÈME

Le contrôle construit précédemment est l'unique contrôle en temps minimal vérifiant la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq 2g.$$

Il est remarquable que

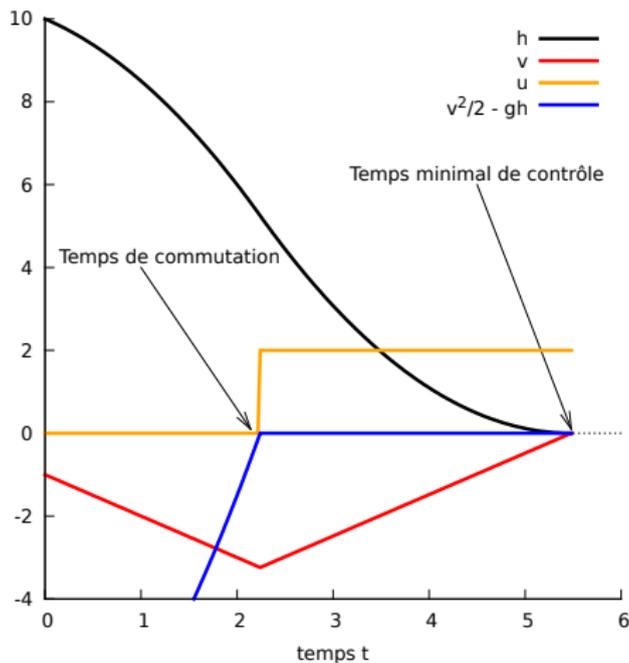
- Le contrôle optimal a une structure simple et **ne prend que les valeurs extrêmes 0 et 2g**.
- Le temps de commutation T_1 où on déclenche les moteurs de la fusée est **caractérisé** par la relation

$$\frac{1}{2}v(T_1)^2 - gh(T_1) = 0.$$

- On parle d'un contrôle de type **rétro-action** : on peut le déterminer en temps réel uniquement en fonction de la position et de la vitesse de la fusée.

Ceci est crucial du point de vue des applications.

$$\begin{cases} h'(t) = v(t), \\ v'(t) = u(t) - g, \end{cases} \quad \text{avec} \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T_1, \\ 2g & \text{si } t > T_1. \end{cases}$$



- On se donne un problème de contrôle linéaire, supposé contrôlable (Kalman)

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

- On cherche un contrôle u satisfaisant une contrainte supplémentaire :

$$\forall t \in [0, T], \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^k.$$

THÉORÈME (CONTRÔLE EN TEMPS MINIMAL)

Si $T > 0$ et $u : [0, T] \mapsto U$ est un contrôle en temps minimal pour le système ci-dessus, alors il existe une solution non triviale p du problème adjoint $-p'(t) = {}^tAp(t)$ telle que

$${}^t p(t)Bu(t) = \max_{v \in U} ({}^t p(t)Bv), \quad " \forall t \in [0, T] "$$

CONSÉQUENCES :

dans le cas $k = 1$, $U =]\alpha, \beta[$

- Pour tous les t (**en nombre fini !**) tels que ${}^t p(t)B \neq 0$, on a

$$\begin{cases} u(t) = \alpha & \text{si } {}^t p(t)B < 0, \\ u(t) = \beta & \text{si } {}^t p(t)B > 0. \end{cases}$$

- Les instants t tels que ${}^t p(t)B = 0$ sont appelés **les temps de commutation**.

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- **Oscillateurs harmoniques**
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

On considère l'équation suivante

$$z''(t) + \omega^2 z(t) = u(t),$$

avec la contrainte $|u(t)| \leq 1$ (i.e. $U =] - 1, 1[$).

Le système s'écrit aussi

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u(t).$$

- Le critère de Kalman est vérifié, le système sans contrainte est donc contrôlable.
- On cherche à résoudre le problème avec la contrainte $|u| \leq 1$ et en temps minimum.

La solution du système adjoint $-p' = {}^tAp$ est donnée par

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) \\ C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \end{pmatrix},$$

où C_1, C_2 sont deux constantes inconnues. On écrit :

$${}^t p(t)B = p_2(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) = D \cos(\omega t + \phi),$$

avec D, ϕ deux nouvelles constantes.

BILAN : les temps de commutation sont distants de π/ω !

Equations du mouvement

$$\begin{cases} x_1'' = (x_2 - x_1) \\ x_2'' = (x_1 - x_2) + u(t) \end{cases}$$

avec la contrainte $|u(t)| \leq 1$.

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

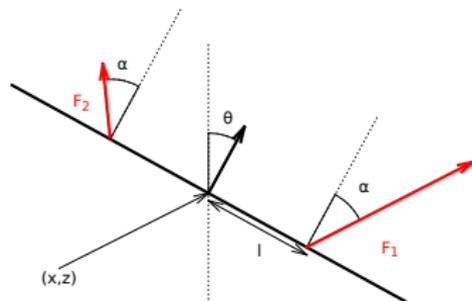
- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- **Avion à décollage vertical**
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

- Masse M , Moment d'inertie J
- 3 degrés de liberté :
 - Position du centre de gravité (x, z)
 - Orientation : θ
- Deux moteurs fournissent des poussées F_1 et F_2 orientées selon un angle α (constant) à distance l du centre de gravité.



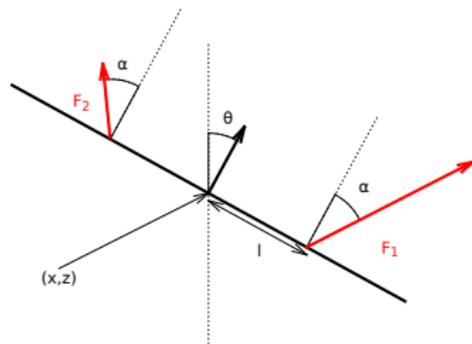
EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\begin{cases} Mx''(t) = F_1 \sin(\theta(t) + \alpha) + F_2 \sin(\theta(t) - \alpha), \\ Mz''(t) = F_1 \cos(\theta(t) + \alpha) + F_2 \cos(\theta(t) - \alpha) - Mg, \\ J\theta''(t) = l(F_2 - F_1) \cos \alpha \end{cases}$$

CHANGEMENT DE VARIABLES

$$\varepsilon = \frac{J}{Ml} \tan \alpha, \quad u_1 = \frac{F_1 + F_2}{M} \cos \alpha - g, \quad u_2 = \frac{F_2 - F_1}{J} l \cos \alpha.$$

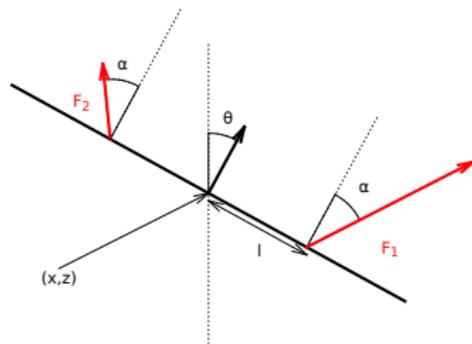
- Masse M , Moment d'inertie J
- 3 degrés de liberté :
 - Position du centre de gravité (x, z)
 - Orientation : θ
- Deux moteurs fournissent des poussées F_1 et F_2 orientées selon un angle α (constant) à distance l du centre de gravité.



EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\begin{cases} x''(t) = u_1 \sin(\theta(t)) - \varepsilon u_2 \cos(\theta(t)) + g \sin(\theta(t)), \\ z''(t) = u_1 \cos(\theta(t)) + \varepsilon u_2 \sin(\theta(t)) - g(1 - \cos(\theta(t))), \\ \theta''(t) = u_2. \end{cases}$$

- Masse M , Moment d'inertie J
- 3 degrés de liberté :
 - Position du centre de gravité (x, z)
 - Orientation : θ
- Deux moteurs fournissent des poussées F_1 et F_2 orientées selon un angle α (constant) à distance l du centre de gravité.



EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\begin{cases} x''(t) = u_1 \sin(\theta(t)) - \varepsilon u_2 \cos(\theta(t)) + g \sin(\theta(t)), \\ z''(t) = u_1 \cos(\theta(t)) + \varepsilon u_2 \sin(\theta(t)) - g(1 - \cos(\theta(t))), \\ \theta''(t) = u_2. \end{cases}$$

LINÉARISATION AUTOUR DE L'ÉTAT D'ÉQUILIBRE $(x, z, \theta, u_1, u_2) = (0, 0, 0, 0, 0)$

$$\begin{cases} x''(t) = g\theta(t) - \varepsilon u_2, \\ z''(t) = u_1, \\ \theta''(t) = u_2. \end{cases}$$

Ce système est-il contrôlable ?

EQUATIONS DU MOUVEMENT LINÉARISÉES

$$\begin{cases} x''(t) = g\theta(t) - \varepsilon u_2, \\ z''(t) = u_1, \\ \theta''(t) = u_2. \end{cases}$$

- La composante z est contrôlable indépendamment des autres.
- Il reste à étudier le système

$$\begin{cases} x''(t) = g\theta(t) - \varepsilon u_2, \\ \theta''(t) = u_2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u_2(t).$$

La matrice de Kalman $C = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 & g \\ -\varepsilon & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 4 \Rightarrow **Contrôlabilité !**

REMARQUE : sans gravité ($g = 0$), le système n'est pas contrôlable.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u(t).$$

- On a vu que le contrôle de coût $C(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$ minimal est de la forme

$$u(t) = {}^t B p(t) = -\varepsilon p_2(t) + p_4(t),$$

avec $t \mapsto p(t)$ solution de $-p'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= {}^t A} p(t).$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u(t).$$

- On a vu que le contrôle de coût $C(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$ minimal est de la forme

$$u(t) = {}^t B p(t) = -\varepsilon p_2(t) + p_4(t),$$

$$\text{avec } t \mapsto p(t) \text{ solution de } -p'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= {}^t A} p(t).$$

Il vient :

$$p_1(t) = p_1^T,$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u(t).$$

- On a vu que le contrôle de coût $C(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$ minimal est de la forme

$$u(t) = {}^t B p(t) = -\varepsilon p_2(t) + p_4(t),$$

$$\text{avec } t \mapsto p(t) \text{ solution de } -p'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= {}^t A} p(t).$$

Il vient :

$$p_1(t) = p_1^T, \quad p_2(t) = -p_1^T(t - T) + p_2^T,$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u(t).$$

- On a vu que le contrôle de coût $C(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$ minimal est de la forme

$$u(t) = {}^t B p(t) = -\varepsilon p_2(t) + p_4(t),$$

$$\text{avec } t \mapsto p(t) \text{ solution de } -p'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= {}^t A} p(t).$$

Il vient :

$$p_1(t) = p_1^T, \quad p_2(t) = -p_1^T(t - T) + p_2^T, \quad p_3(t) = g p_1^T(t - T)^2 / 2 - g p_2^T(t - T) + p_3^T,$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u(t).$$

- On a vu que le contrôle de coût $C(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$ minimal est de la forme

$$u(t) = {}^t B p(t) = -\varepsilon p_2(t) + p_4(t),$$

$$\text{avec } t \mapsto p(t) \text{ solution de } -p'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= {}^t A} p(t).$$

Il vient :

$$p_1(t) = p_1^T, \quad p_2(t) = -p_1^T(t-T) + p_2^T, \quad p_3(t) = g p_1^T(t-T)^2/2 - g p_2^T(t-T) + p_3^T,$$

$$p_4(t) = -g p_1^T(t-T)^3/6 + g p_2^T(t-T)^2/2 - p_3^T(t-T) + p_4^T.$$

D'où

$$u(t) = \varepsilon p_1^T(t-T) - \varepsilon p_2^T - g p_1^T(t-T)^3/6 + g p_2^T(t-T)^2/2 - p_3^T(t-T) + p_4^T.$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u(t).$$

- On a vu que le contrôle de coût $C(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$ minimal est de la forme

$$u(t) = \varepsilon p_1^T (t - T) - \varepsilon p_2^T - g p_1^T (t - T)^3 / 6 + g p_2^T (t - T)^2 / 2 - p_3^T (t - T) + p_4^T.$$

- $\theta'' = u \quad \implies$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \varepsilon p_1^T (t - T)^3 / 6 - \varepsilon p_2^T (t - T)^2 / 2 - g p_1^T (t - T)^5 / 120 \\ &+ g p_2^T (t - T)^4 / 24 - p_3^T (t - T)^3 / 6 + p_4^T (t - T)^2 / 2 + \underbrace{\theta'(T)(t - T) + \theta(T)}_{=0}. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u(t).$$

- On a vu que le contrôle de coût $C(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$ minimal est de la forme

$$u(t) = \varepsilon p_1^T (t - T) - \varepsilon p_2^T - g p_1^T (t - T)^3 / 6 + g p_2^T (t - T)^2 / 2 - p_3^T (t - T) + p_4^T.$$

- $\theta'' = u \implies$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \varepsilon p_1^T (t - T)^3 / 6 - \varepsilon p_2^T (t - T)^2 / 2 - g p_1^T (t - T)^5 / 120 \\ &+ g p_2^T (t - T)^4 / 24 - p_3^T (t - T)^3 / 6 + p_4^T (t - T)^2 / 2 + \underbrace{\theta'(T)(t - T) + \theta(T)}_{=0}. \end{aligned}$$

- $x'' = g\theta - \varepsilon u \implies (x + \varepsilon\theta)'' = g\theta \implies$

$$\begin{aligned} (x + \varepsilon\theta)(t) &= \varepsilon p_1^T (t - T)^5 / 120 - \varepsilon p_2^T (t - T)^4 / 24 - g p_1^T (t - T)^7 / 5040 \\ &+ g p_2^T (t - T)^6 / 720 - p_3^T (t - T)^5 / 120 + p_4^T (t - T)^4 / 24 \\ &+ \underbrace{(x'(T) + \varepsilon\theta'(T))(t - T)}_{=0} + \underbrace{(x(T) + \varepsilon\theta(T))}_{=0}. \end{aligned}$$

RÉSUMÉ : En utilisant $x(T) = x_F, x'(T) = 0, \theta(T) = 0, \theta'(T) = 0$, on a obtenu

$$\begin{aligned}\theta(t) = & \varepsilon p_1^T (t - T)^3 / 6 - \varepsilon p_2^T (t - T)^2 / 2 - g p_1^T (t - T)^5 / 120 \\ & + g p_2^T (t - T)^4 / 24 - p_3^T (t - T)^3 / 6 + p_4^T (t - T)^2 / 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x + \varepsilon \theta)(t) = & \varepsilon p_1^T (t - T)^5 / 120 - \varepsilon p_2^T (t - T)^4 / 24 - g p_1^T (t - T)^7 / 5040 \\ & + g p_2^T (t - T)^6 / 720 - p_3^T (t - T)^5 / 120 + p_4^T (t - T)^4 / 24 + x_F.\end{aligned}$$

RÉSUMÉ : En utilisant $x(T) = x_F, x'(T) = 0, \theta(T) = 0, \theta'(T) = 0$, on a obtenu

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \varepsilon p_1^T (t - T)^3 / 6 - \varepsilon p_2^T (t - T)^2 / 2 - g p_1^T (t - T)^5 / 120 \\ & + g p_2^T (t - T)^4 / 24 - p_3^T (t - T)^3 / 6 + p_4^T (t - T)^2 / 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x + \varepsilon\theta)(t) = & \varepsilon p_1^T (t - T)^5 / 120 - \varepsilon p_2^T (t - T)^4 / 24 - g p_1^T (t - T)^7 / 5040 \\ & + g p_2^T (t - T)^6 / 720 - p_3^T (t - T)^5 / 120 + p_4^T (t - T)^4 / 24 + x_F. \end{aligned}$$

Il reste à imposer les conditions à l'instant initial

$$x(0) = 0, x'(0) = 0, \theta(0) = 0, \theta'(0) = 0,$$

ce qui donne quatre équations linéaires qui déterminent les p_i^T

$$\begin{cases} 0 = -\varepsilon p_1^T T^3 / 6 - \varepsilon p_2^T T^2 / 2 + g p_1^T T^5 / 120 + g p_2^T T^4 / 24 + p_3^T T^3 / 6 + p_4^T T^2 / 2, \\ 0 = \varepsilon p_1^T T^2 / 2 + \varepsilon p_2^T T - g p_1^T T^4 / 24 - g p_2^T T^3 / 6 - p_3^T T^2 / 2 - p_4^T T, \\ -x_F = -\varepsilon p_1^T T^5 / 120 - \varepsilon p_2^T T^4 / 24 + g p_1^T T^7 / 5040 + g p_2^T T^6 / 720 + p_3^T T^5 / 120 + p_4^T T^4 / 24, \\ 0 = \varepsilon p_1^T T^4 / 24 + \varepsilon p_2^T T^3 / 6 - g p_1^T T^6 / 720 - g p_2^T T^5 / 120 - p_3^T T^4 / 24 - p_4^T T^3 / 6. \end{cases}$$

On résout ce système, et on en déduit le contrôle u .

SYSTÈME LINÉARISÉ

SYSTÈME NON-LINÉAIRE

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- **La poussette**
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

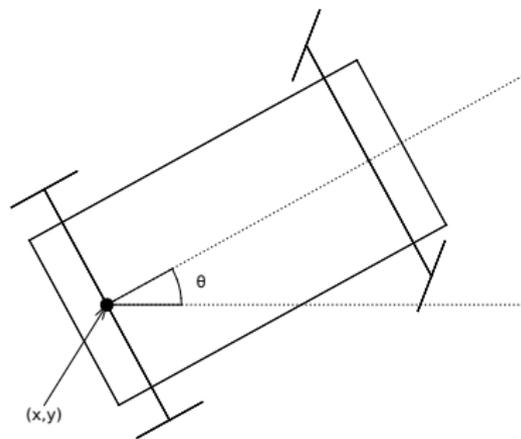
4 RÉFÉRENCES

- Roues avant libres.
- Roues arrières bloquées.
- 3 degrés de liberté :
 - Position (x, y) du centre
 - Orientation θ .

EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\begin{cases} x'(t) = u_1(t) \cos(\theta(t)), \\ y'(t) = u_1(t) \sin(\theta(t)), \\ \theta'(t) = u_2(t), \end{cases}$$

où u_1 et u_2 sont les vitesses rectilignes et angulaires communiquées par le “pilote”.



- Roues avant libres.
- Roues arrières bloquées.
- 3 degrés de liberté :
 - Position (x, y) du centre
 - Orientation θ .

EQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\begin{cases} x'(t) = u_1(t) \cos(\theta(t)), \\ y'(t) = u_1(t) \sin(\theta(t)), \\ \theta'(t) = u_2(t), \end{cases}$$

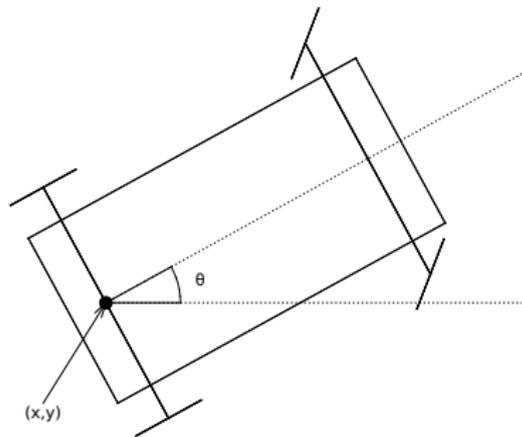
où u_1 et u_2 sont les vitesses rectilignes et angulaires communiquées par le “pilote”.

LINÉARISATION AUTOUR D'UN ÉQUILIBRE $(0, 0, 0, 0, 0)$

$$\begin{cases} x'(t) = u_1(t), \\ y'(t) = 0, \\ \theta'(t) = u_2(t). \end{cases}$$

Ce nouveau système n'est **manifestement pas contrôlable** car y est constant.

Est-ce à dire que les poussettes ne peuvent pas être manoeuvrées ???



RETOUR AU SYSTÈME NON-LINÉAIRE INITIAL

$$\begin{cases} x'(t) = u_1(t) \cos(\theta(t)), \\ y'(t) = u_1(t) \sin(\theta(t)), \\ \theta'(t) = u_2(t), \\ x(0) = y(0) = \theta(0) = 0. \end{cases}$$

THÉORÈME

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un contrôle $(u_1, u_2) : [0, 4\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in [0, 4\varepsilon], \quad |u_1(t)| \leq \varepsilon, \quad |u_2(t)| \leq \varepsilon,$$

$$\forall t \in [0, 4\varepsilon], \quad |x(t)| \leq \varepsilon^2, \quad |y(t)| \leq \varepsilon^2, \quad |\theta(t)| \leq \varepsilon^2,$$

et

$$x(4\varepsilon) = \theta(4\varepsilon) = 0, \quad y(4\varepsilon) > 0.$$

Autrement dit, on peut faire des **petits** mouvements pour amener le système à un état de la forme $(0, \eta, 0)$, $\eta > 0$ **bien que** ce soit impossible pour le système linéarisé.

RETOUR AU SYSTÈME NON-LINÉAIRE INITIAL

$$\begin{cases} x'(t) = u_1(t) \cos(\theta(t)), \\ y'(t) = u_1(t) \sin(\theta(t)), \\ \theta'(t) = u_2(t), \\ x(0) = y(0) = \theta(0) = 0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION

- Pour $t \in [0, \varepsilon]$, on pose $u_1(t) = 0$, $u_2(t) = \varepsilon$, on trouve
 $x(\varepsilon) = 0$, $y(\varepsilon) = 0$, $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^2$.

RETOUR AU SYSTÈME NON-LINÉAIRE INITIAL

$$\begin{cases} x'(t) = u_1(t) \cos(\theta(t)), \\ y'(t) = u_1(t) \sin(\theta(t)), \\ \theta'(t) = u_2(t), \\ x(0) = y(0) = \theta(0) = 0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION

- Pour $t \in [0, \varepsilon]$, on pose $u_1(t) = 0$, $u_2(t) = \varepsilon$, on trouve

$$x(\varepsilon) = 0, y(\varepsilon) = 0, \theta(\varepsilon) = \varepsilon^2.$$

- Pour $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, on pose $u_1(t) = \varepsilon$, $u_2(t) = 0$, on trouve

$$x(2\varepsilon) = \varepsilon^2 \cos(\varepsilon^2), y(2\varepsilon) = \varepsilon^2 \sin(\varepsilon^2), \theta(2\varepsilon) = \varepsilon^2.$$

RETOUR AU SYSTÈME NON-LINÉAIRE INITIAL

$$\begin{cases} x'(t) = u_1(t) \cos(\theta(t)), \\ y'(t) = u_1(t) \sin(\theta(t)), \\ \theta'(t) = u_2(t), \\ x(0) = y(0) = \theta(0) = 0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION

- Pour $t \in [0, \varepsilon]$, on pose $u_1(t) = 0, u_2(t) = \varepsilon$, on trouve

$$x(\varepsilon) = 0, y(\varepsilon) = 0, \theta(\varepsilon) = \varepsilon^2.$$

- Pour $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, on pose $u_1(t) = \varepsilon, u_2(t) = 0$, on trouve

$$x(2\varepsilon) = \varepsilon^2 \cos(\varepsilon^2), y(2\varepsilon) = \varepsilon^2 \sin(\varepsilon^2), \theta(2\varepsilon) = \varepsilon^2.$$

- Pour $t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon]$, on pose $u_1(t) = 0, u_2(t) = -\varepsilon$, on trouve

$$x(3\varepsilon) = \varepsilon^2 \cos(\varepsilon^2), y(3\varepsilon) = \varepsilon^2 \sin(\varepsilon^2), \theta(3\varepsilon) = 0.$$

RETOUR AU SYSTÈME NON-LINÉAIRE INITIAL

$$\begin{cases} x'(t) = u_1(t) \cos(\theta(t)), \\ y'(t) = u_1(t) \sin(\theta(t)), \\ \theta'(t) = u_2(t), \\ x(0) = y(0) = \theta(0) = 0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION

- Pour $t \in [0, \varepsilon]$, on pose $u_1(t) = 0, u_2(t) = \varepsilon$, on trouve

$$x(\varepsilon) = 0, y(\varepsilon) = 0, \theta(\varepsilon) = \varepsilon^2.$$

- Pour $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, on pose $u_1(t) = \varepsilon, u_2(t) = 0$, on trouve

$$x(2\varepsilon) = \varepsilon^2 \cos(\varepsilon^2), y(2\varepsilon) = \varepsilon^2 \sin(\varepsilon^2), \theta(2\varepsilon) = \varepsilon^2.$$

- Pour $t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon]$, on pose $u_1(t) = 0, u_2(t) = -\varepsilon$, on trouve

$$x(3\varepsilon) = \varepsilon^2 \cos(\varepsilon^2), y(3\varepsilon) = \varepsilon^2 \sin(\varepsilon^2), \theta(3\varepsilon) = 0.$$

- Enfin pour $t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon]$, on pose $u_1(t) = -\varepsilon \cos(\varepsilon^2), u_2(t) = 0$, on trouve

$$x(4\varepsilon) = 0, y(4\varepsilon) = \varepsilon^2 \sin(\varepsilon^2) > 0, \theta(4\varepsilon) = 0.$$

RETOUR AU SYSTÈME NON-LINÉAIRE INITIAL

$$\begin{cases} x'(t) = u_1(t) \cos(\theta(t)), \\ y'(t) = u_1(t) \sin(\theta(t)), \\ \theta'(t) = u_2(t), \\ x(0) = y(0) = \theta(0) = 0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION

- Pour $t \in [0, \varepsilon]$, on pose $u_1(t) = 0, u_2(t) = \varepsilon$, on trouve

$$x(\varepsilon) = 0, y(\varepsilon) = 0, \theta(\varepsilon) = \varepsilon^2.$$
- Pour $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, on pose $u_1(t) = \varepsilon, u_2(t) = 0$, on trouve

$$x(2\varepsilon) = \varepsilon^2 \cos(\varepsilon^2), y(2\varepsilon) = \varepsilon^2 \sin(\varepsilon^2), \theta(2\varepsilon) = \varepsilon^2.$$
- Pour $t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon]$, on pose $u_1(t) = 0, u_2(t) = -\varepsilon$, on trouve

$$x(3\varepsilon) = \varepsilon^2 \cos(\varepsilon^2), y(3\varepsilon) = \varepsilon^2 \sin(\varepsilon^2), \theta(3\varepsilon) = 0.$$
- Enfin pour $t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon]$, on pose $u_1(t) = -\varepsilon \cos(\varepsilon^2), u_2(t) = 0$, on trouve

$$x(4\varepsilon) = 0, y(4\varepsilon) = \varepsilon^2 \sin(\varepsilon^2) > 0, \theta(4\varepsilon) = 0.$$

MORALITÉ

Il faut se méfier de la linéarisation

REMARQUE : Ce déplacement *latéral* de la poussette est **cher**.

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- **Poursuite / Stabilisation de trajectoires**
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

- On considère une solution ξ du système linéaire

$$\xi'(t) = A\xi(t), \quad \xi(0) = \xi_0.$$

- On se donne une nouvelle donnée initiale x_0 et on cherche un contrôle $u : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^k$ tel que la solution de

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

soit **proche** de la trajectoire de référence ξ .

- Plus précisément, on cherche u qui minimise la quantité

$$J(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 + \|x(t) - \xi(t)\|^2 dt.$$

- On considère une solution ξ du système linéaire

$$\xi'(t) = A\xi(t), \quad \xi(0) = \xi_0.$$

- On se donne une nouvelle donnée initiale x_0 et on cherche un contrôle $u : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^k$ tel que la solution de

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

soit **proche** de la trajectoire de référence ξ .

- Plus précisément, on cherche u qui minimise la quantité

$$J(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 + \|x(t) - \xi(t)\|^2 dt.$$

THÉORÈME

Il existe un unique $u : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^k$ qui minimise J .

Celui-ci vérifie la relation (dite de retour de commande)

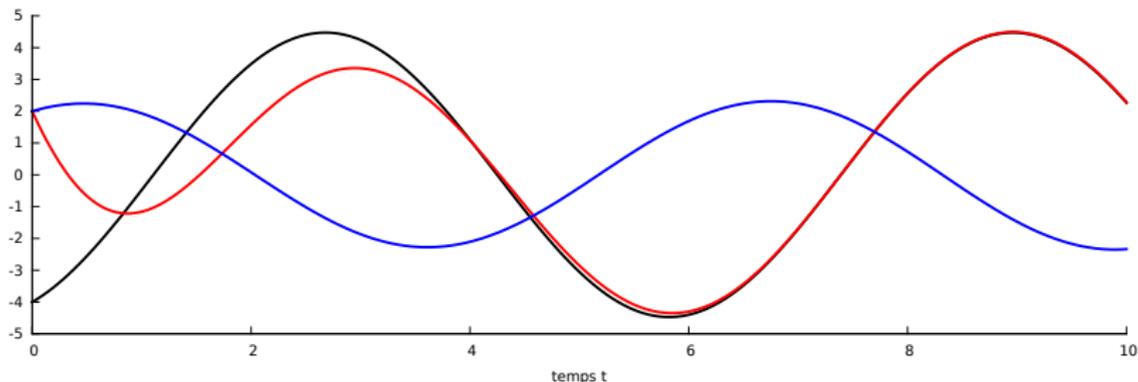
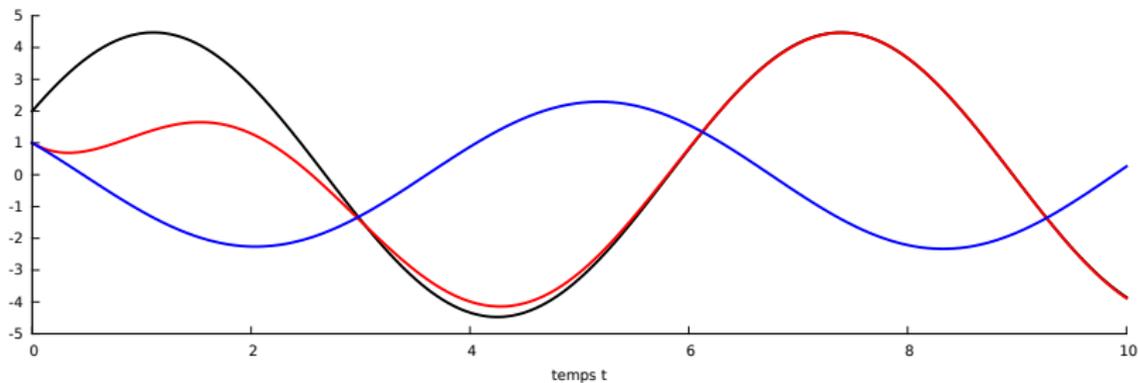
$$u(t) = {}^t B \cdot E(t) \cdot (x(t) - \xi(t)),$$

où $E : [0, T] \mapsto M_n(\mathbb{R})$ est solution de l'équation de Riccati

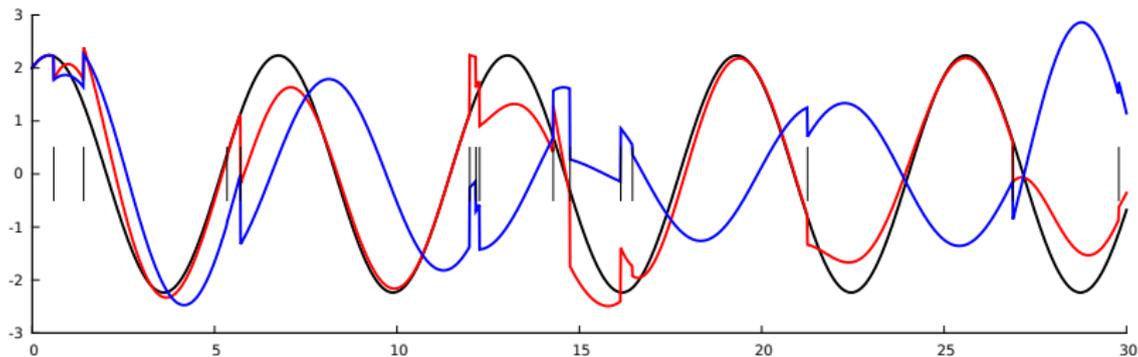
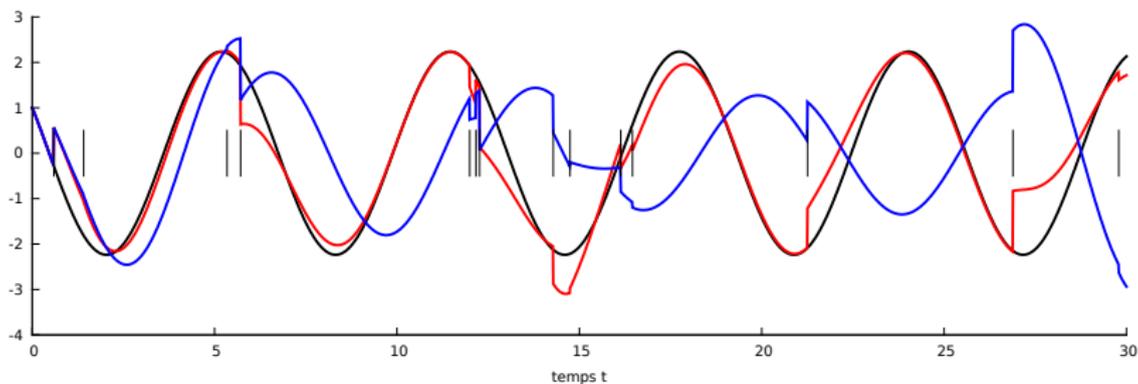
$$E'(t) = I_n - {}^t A E(t) - E(t) A - E(t) B {}^t B E(t), \quad E(T) = 0.$$

REMARQUE : $t \mapsto E(t)$ ne dépend que de T , A et B mais pas de la trajectoire ξ !

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi(t) = e^{tA}x_0, \quad +\text{perturbations aléatoires}$$



1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

- Mouvement d'un satellite autour d'une planète (contenu dans un plan).
- Celui-ci est décrit par la loi de la gravitation universelle

$$\mathbf{q}'' = -\frac{G}{Mm} \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} + \frac{\mathbf{u}(t)}{m}.$$

- $\mathbf{u}(t)$ est le contrôle : la poussée engendrée par les moteurs du satellite.

SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KEPLER LIBRE

$$\mathbf{q}'' = -\frac{G}{Mm} \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3}.$$

Les solutions sont des coniques dont la planète située en $(0, 0)$ est un foyer.
On s'intéresse en particulier aux trajectoires elliptiques.

OBJECTIF

Trouver \mathbf{u} qui permet d'amener le satellite d'une orbite elliptique initiale donnée vers une autre orbite elliptique déterminée à l'avance.

1 INTRODUCTION

- Problématique générale

2 LANCER DE PROJECTILES

- La mécanique de Newton - La mécanique de Lagrange
- Ballistique élémentaire
- Lanceurs mécaniques

3 CONTRÔLE DE TRAJECTOIRES

- Les équations différentielles linéaires
- Alunissage d'une fusée
- Oscillateurs harmoniques
- Avion à décollage vertical
- La poussette
- Poursuite / Stabilisation de trajectoires
- Transfert orbital

4 RÉFÉRENCES

LIVRES / NOTES DE COURS

- **E. TRÉLAT**, Contrôle optimal, théorie et applications, Vuibert (2008).
- **F. BONNANS - P. ROUCHON**, Analyse et commande de systèmes dynamiques, cours de l'école Polytechnique (2003).

<http://cas.ensmp.fr/~rouchon/X03/poly03.pdf>

- **B. BONNARD - L. FAUBOURG - E. TRÉLAT**, Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux, Coll. Mathématiques et Applications Vol. 51, Springer (2006).

ARTICLES

- **E. TRÉLAT**, Théorie du contrôle, points de Lagrange, et exploration spatiale, Images des Mathématiques, CNRS, (2010).

<http://images.math.cnrs.fr/>

- **J.M. CORON**, On the controllability of nonlinear partial differential equations, International Congress of Mathematicians, (2010).

LOGICIEL DE CALCUL NUMÉRIQUE

- **SCILAB 5.2.2**, <http://www.scilab.org>