# A propos de l'équation de transport

## Solutions faibles - Traces - Schéma upwind


Franck BOYER

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
Aix-Marseille Université


Toulouse, Janvier 2012

1. Introduction
2. Th. de traces - Pb. de Cauchy/Dirichlet
3. Analyse du schéma upwind implicite

### Equation de transport - réaction dans $\mathbb{R}^d$ :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}\,(\rho v) + c\rho = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{E}$$

avec

$$v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \text{ Lipschitzien borné et } c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R} \text{ continue.}$$

### Courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds} X(s,t,x) = v(s, X(s,t,x)), \\ X(t,t,x) = x. \end{cases}$$

**Proposition**

*Si $\rho_0$ est régulière, l'unique solution régulière de (E) est*

$$\rho(t,x) = \rho_0(X(0,t,x)) \exp\left( \int_0^t -(c + \mathrm{div}\, v)(s, X(s,t,x))\, ds \right).$$

## Equation de transport dans $\Omega$ ouvert borné régulier :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) + c\rho = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{E}$$

avec un champ de vecteurs tangent

$$v : \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d \;\; \text{Lip., borné, et } v \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Les courbes caractéristiques sont bien définies et restent dans $\Omega$

$$X(s,t,x) \in \Omega, \quad \forall t, s, \; \forall x \in \Omega.$$

### Proposition

*Si $\rho_0$ est régulière, l'unique solution régulière de (E) est*

$$\rho(t,x) = \rho_0(X(0,t,x)) \exp\left( \int_0^t -(c + \operatorname{div} v)(s, X(s,t,x))\, ds \right).$$

## Ecoulement d'un fluide non-homogène incompressible

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - 2\operatorname{div}(\mu(\rho) D(v)) + \nabla p = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v = 0, \ \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Mélange de deux fluides non miscibles :

$$\rho_0(x) \in \{\rho_{\text{fluide1}}, \rho_{\text{fluide2}}\}.$$

$\hookrightarrow$ Nécessité de prendre en compte les données initiales peu régulières.

- On peut espérer au mieux :

$$v \in L^2(]0,T[, (H^1_0(\Omega))^d),$$

et certainement pas Lipschitzien.

**Définition (Solutions faibles)**

*Soit* $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$*, on dit que* $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *est solution faible si*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho\,(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi - c\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho_0\varphi(0,.)\,dx = 0,$$

*pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}^1_c([0,T[\times\Omega)$*.*

### Définition (Solutions faibles)

*Soit* $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, *on dit que* $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *est solution faible si*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho \left(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi - c\varphi\right)\, dt\, dx + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0,.)\, dx = 0,$$

*pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}^1_c([0,T[\times\Omega)$.

### Proposition

*Soient* $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, $v$ *Lipschitzien avec* $v \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ *et* $c$ *continue.*
*La fonction*

$$\rho(t,x) = \rho_0(X(0,t,x)) \exp\left(\int_0^t -(c + \operatorname{div} v)(s, X(s,t,x))\, ds\right),$$

*est une solution faible du problème.*

**Rq** : La quantité $(c + \operatorname{div} v)^-$ contrôle la borne $L^\infty$ de $\rho$.

### Définition (Solutions faibles)

*Soit* $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, *on dit que* $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *est solution faible si*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho\,(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi - c\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho_0\varphi(0,.)\,dx = 0,$$

*pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}^1_c([0,T[\times\Omega)$.

### Théorème

*Soient* $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, $v \in L^1(]0,T[\times\Omega)^d$, $c \in L^1(]0,T[\times\Omega)$.

*Si* $(c + \operatorname{div} v)^- \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega))$, *il existe au moins une solution faible bornée de l'équation de transport.*

Quid de l'unicité ? de la régularité ? des propriétés qualitatives ?

**Rq :** On a immédiatement que $\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^\infty(\Omega)_{w*})$.

## Notion de solutions renormalisées :

- **(DiPerna-Lions, 1989)**

## NOTION DE SOLUTIONS RENORMALISÉES :

- **(DiPerna-Lions, 1989)**

### THÉORÈME (RENORMALISATION)

*Soient* $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d)$ *et* $v \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ *sur* $\partial\Omega$, $c \in L^1(]0,T[\times\Omega)$. *Pour toute fonction* $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *et toute solution faible* $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *pour la donnée* $\rho_0$, *on a :*

$$\partial_t \beta(\rho) + \operatorname{div}(\beta(\rho)v) + c\beta'(\rho)\rho + (\operatorname{div} v)(\beta'(\rho)\rho - \beta(\rho)) = 0,$$

*au sens faible* **ainsi que** $\beta(\rho)_{|t=0} = \beta(\rho_0)$.

Il s'agit de justifier le calcul formel suivant

$$\partial_t \beta(\rho) + v \cdot \nabla\beta(\rho) = \beta'(\rho)(\partial_t \rho + v \cdot \nabla\rho).$$

**Rq :** $\beta$ continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux suffit !
Pour cela, on montre d'abord que pour tout $\alpha \neq 0$, on a

$$c + \operatorname{div} v = 0, \quad \text{p.p. dans} \quad \{\rho = \alpha\}.$$

## Notion de solutions renormalisées :

- **(DiPerna-Lions, 1989)**

### Théorème (Renormalisation)

*Soient* $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d)$ *et* $v \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ *sur* $\partial\Omega$, $c \in L^1(]0,T[\times\Omega)$. *Pour toute fonction* $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *et toute solution faible* $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *pour la donnée* $\rho_0$, *on a :*

$$\partial_t\beta(\rho) + \operatorname{div}(\beta(\rho)v) + c\beta'(\rho)\rho + (\operatorname{div} v)(\beta'(\rho)\rho - \beta(\rho)) = 0,$$

*au sens faible* **ainsi que** $\beta(\rho)_{|t=0} = \beta(\rho_0)$.

### Corollaire (Unicité et régularité en temps)

*Sous l'hypothèse supplémentaire* $(\operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0,T[,L^\infty(\Omega))$.
*Si une solution faible bornée* $\rho$ *pour la donnée* $\rho_0$ *existe, elle est unique et de plus*

$$\rho \in \mathcal{C}^0([0,T],L^q(\Omega)), \quad \forall\, q < +\infty.$$

## Notion de solutions renormalisées :

- **(DiPerna-Lions, 1989)**

  Article fondateur de la théorie des solutions renormalisées.

- **(Desjardins, 1996)**

  Hypothèses plus générales, notamment sur la divergence de $v$.

- **(N. Depauw, 2003)**

  Contre-exemple à l'unicité pour un champ $L^1_{loc}(]0,T], BV(\Omega))$ mais pas dans $L^1(]0,T[, BV(\Omega))$.

- **(L. Ambrosio, 2004)**

  Cas $v \in L^1(]0,T[,(BV(\mathbb{R}^d))^d)$ et $\operatorname{div} v \in L^1(]0,T[\times\mathbb{R}^d)$.

$\rightsquigarrow$ Tous ces travaux permettent de définir un unique flot Lagrangien régulier ( caractéristiques $X$) pour le champ de vecteurs $v$, à partir de l'EDP.

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}\,(\rho v) + c\rho = 0.$$

- Pour la définition des solutions faibles, $v \in L^1$ et $c \in L^1$ suffit.
- Pour l'existence d'une solution faible bornée associée à une donnée $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, on a besoin de

$$(c + \mathrm{div}\, v)^- \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega)).$$

  Dans le cas de l'advection simple $c = -\mathrm{div}\, v$, cette hypothèse est triviale.
- Pour la propriété de renormalisation, on a besoin de régularité sur $v$ : $v \in L^1(]0,T[, W^{1,1}(\Omega))$ ...

  ... ou éventuellement $L^1(BV)$ mais avec $\mathrm{div}\, v \in L^1$ !
- Pour l'unicité on a besoin de la renormalisation et aussi de

$$(\mathrm{div}\, v)^+ \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega)),$$

  ou un peu moins (Cf. Desjardins).
- Tout ceci est valable pour un champ tangent au bord du domaine.

# Plan

On étudie la même équation que précédemment

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}\,(\rho v) + c\rho = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{1}$$

avec un champ de vecteurs non-nécessairement tangent, par exemple

$$v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d), \text{et } v \cdot \boldsymbol{\nu} \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

### Problèmes à résoudre :

- Peut-on donner un sens aux traces sur $\Gamma = \partial\Omega$ des solutions faibles bornées de (1) ?
- Quel est le bon espace de traces ?
- Peut-on résoudre le problème de Cauchy-Dirichlet avec donnée au bord là où le champ $v$ est entrant ?

### Notation : mesures sur $]0,T[\times\Gamma$

$$d\mu_v = (v\cdot\boldsymbol{\nu})\,dt\,d\sigma, \quad |d\mu_v| = |v\cdot\boldsymbol{\nu}|\,dt\,d\sigma,$$

$$d\mu_v = d\mu_v^+ - d\mu_v^-, \quad |d\mu_v| = d\mu_v^+ + d\mu_v^-.$$

- **(Bardos, 1970)**
  $\longrightarrow$ Cas d'un champ $v(x)$ Lipschitzien par la méthode des caractéristiques. Approche semi-groupes.
- **(Cessenat, 1984)**
  $\longrightarrow$ Théorème et espace de traces pour

$$\partial_t \rho + \xi \cdot \nabla_x \rho = 0, \quad (t, x, \xi) \in ]0, T[\times \Omega \times \mathbb{R}^d.$$

- **(Mischler, 2000)**
  $\longrightarrow$ Equation de Vlasov :

$$\partial_t \rho + \xi \cdot \nabla_x \rho + E(t, x) \cdot \nabla_\xi \rho = 0, \quad (t, x, \xi) \in ]0, T[\times \Omega \times \mathbb{R}^d.$$

- **(Lods et al., 2007-2010)**
  $\longrightarrow$ Cas d'un champ $v(x)$ Lipschitzien dont le flot possède une mesure invariante. Méthode des caractéristiques. Etude fine de l'opérateur de transport associé.

**(B., 2005)**

- $c \in L^1(]0,T[\times\Omega)$
- $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d)$ avec $v \cdot \boldsymbol{\nu} \in L^\alpha(]0,T[\times\Gamma), \alpha > 1$.
- On suppose $(\operatorname{div} v)^+$ et $(c + \operatorname{div} v)^-$ dans $L^1(]0,T[,L^\infty(\Omega))$.

**(B., 2005)**

- $c \in L^1(]0,T[\times\Omega)$
- $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d)$ avec $v \cdot \boldsymbol{\nu} \in L^\alpha(]0,T[\times\Gamma), \alpha > 1$.
- On suppose $(\operatorname{div} v)^+$ et $(c + \operatorname{div} v)^-$ dans $L^1(]0,T[,L^\infty(\Omega))$.

**Théorème (de traces)**

*Soit $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ une solution faible de $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) + c\rho = 0$.*

1. *$\rho$ est dans $\mathcal{C}^0([0,T],L^q(\Omega))$, pour tout $1 \leq q < +\infty$.*

**(B., 2005)**

- $c \in L^1(]0,T[\times\Omega)$
- $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d)$ avec $v\cdot\boldsymbol{\nu} \in L^\alpha(]0,T[\times\Gamma), \alpha > 1$.
- On suppose $(\mathrm{div}\, v)^+$ et $(c + \mathrm{div}\, v)^-$ dans $L^1(]0,T[,L^\infty(\Omega))$.

**Théorème (de traces)**

*Soit $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ une solution faible de $\partial_t\rho + \mathrm{div}\,(\rho v) + c\rho = 0$.*

1. *$\rho$ est dans $\mathcal{C}^0([0,T],L^q(\Omega))$, pour tout $1 \leq q < +\infty$.*
2. *Il existe $\gamma\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|)$, unique $|d\mu_v| - p.p.$, telle que*

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega \rho(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi - c\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho(t_0)\varphi(t_0)\,dx - \int_\Omega \rho(t_1)\varphi(t_1)\,dx - \int_{t_0}^{t_1}\int_\Gamma (\gamma\rho)\varphi(v\cdot\boldsymbol{\nu})\,d\sigma\,dt = 0.$$

$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\overline{\Omega}), \forall t_0, t_1 \in [0,T]$

**Rq :** Résultat intéressant même si $v\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$ sur le bord.

Toute solution faible bornée $\rho$ vérifie le

**Théorème**

$\forall \beta \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\overline{\Omega})$, $\forall t_0, t_1 \in [0,T]$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega \beta(\rho)(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dxdt$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega \big[c\rho\beta'(\rho) + (\rho\beta'(\rho)-\beta(\rho))(\mathrm{div}\,v)\big]\varphi\,dx\,dt$$
$$+\int_\Omega \beta(\rho(t_0))\varphi(t_0)\,dx - \int_\Omega \beta(\rho(t_1))\varphi(t_1)\,dx - \int_{t_0}^{t_1}\int_\Gamma \beta(\gamma\rho)\varphi(v\cdot\boldsymbol{\nu})\,d\sigma\,dt = 0.$$

**Nombreuses conséquences :**

$$\text{Monotonie / Unicité :}\quad \left.\begin{array}{l}\rho(0)\geq 0\\ \gamma^-\rho\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho\geq 0\\ \gamma^+\rho\geq 0\end{array}\right.$$

Des estimations de $\sup\rho, \inf\rho$ de la mesure des ensembles de niveau de $\rho$, ...

## Régularisation par convolution

$\Omega$ régulier

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{\nu}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x) \eta\left(\frac{y - x - 2\varepsilon\boldsymbol{\nu}(y)}{\varepsilon}\right) dx.$$

### Régularisation par convolution

$\Omega$ régulier

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{\nu}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x) \eta \left( \frac{y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{\nu}(y)}{\varepsilon} \right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ est solution faible de l'équation alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon v) + c\rho_\varepsilon = R_\varepsilon,$$

## Régularisation par convolution

$\Omega$ régulier

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{\nu}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x) \eta \left( \frac{y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{\nu}(y)}{\varepsilon} \right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ est solution faible de l'équation alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon v) + c\rho_\varepsilon = R_\varepsilon,$$

- **Lemme de Friedrichs ('58) :** $R_\varepsilon \in L^1(]0,T[\times\Omega)$ et $\|R_\varepsilon\|_{L^1} \longrightarrow 0.$

### Régularisation par convolution

$\Omega$ régulier

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{\nu}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x) \eta\left(\frac{y-x-2\varepsilon \boldsymbol{\nu}(y)}{\varepsilon}\right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ est solution faible de l'équation alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon v) + c\rho_\varepsilon = R_\varepsilon,$$

- **Lemme de Friedrichs ('58) :** $R_\varepsilon \in L^1(]0,T[\times\Omega)$ et $\|R_\varepsilon\|_{L^1} \longrightarrow 0.$
- $\rho_\varepsilon \in L^\infty(]0,T[,\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))$ et
  - $\rho_\varepsilon \to \rho$ dans $L^p(]0,T[\times\Omega)$ pour tout $p < +\infty$.
  - Pour tout $t \in [0,T]$, $\rho_\varepsilon(t) \to \rho(t)$ dans $L^p(\Omega)$.

### Régularisation par convolution

$\Omega$ régulier

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{\nu}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x) \eta\left( \frac{y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{\nu}(y)}{\varepsilon} \right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ est solution faible de l'équation alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon v) + c\rho_\varepsilon = R_\varepsilon,$$

- **Lemme de Friedrichs ('58) :** $R_\varepsilon \in L^1(]0,T[\times\Omega)$ et $\|R_\varepsilon\|_{L^1} \longrightarrow 0.$
- $\rho_\varepsilon \in L^\infty(]0,T[, \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))$ et
  - $\rho_\varepsilon \to \rho$ dans $L^p(]0,T[\times\Omega)$ pour tout $p < +\infty$.
  - Pour tout $t \in [0,T]$, $\rho_\varepsilon(t) \to \rho(t)$ dans $L^p(\Omega)$.
- $\partial_t \rho_\varepsilon$ est dans $L^1$ et donc $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

Régularisation par convolution $\Omega$ régulier

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{\nu}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x)\eta\left(\frac{y - x - 2\varepsilon\boldsymbol{\nu}(y)}{\varepsilon}\right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ est solution faible de l'équation alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon v) + c\rho_\varepsilon = R_\varepsilon,$$

- **Lemme de Friedrichs ('58) :** $R_\varepsilon \in L^1(]0,T[\times\Omega)$ et $\|R_\varepsilon\|_{L^1} \longrightarrow 0.$
- $\rho_\varepsilon \in L^\infty(]0,T[,\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))$ et
  - $\rho_\varepsilon \to \rho$ dans $L^p(]0,T[\times\Omega)$ pour tout $p < +\infty$.
  - Pour tout $t \in [0,T]$, $\rho_\varepsilon(t) \to \rho(t)$ dans $L^p(\Omega)$.
- $\partial_t \rho_\varepsilon$ est dans $L^1$ et donc $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0,T],L^1(\Omega))$.

1. On montre que $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0,T],L^1(\Omega))$.

### RÉGULARISATION PAR CONVOLUTION

$\Omega$ régulier

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{\nu}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x)\eta\left(\frac{y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{\nu}(y)}{\varepsilon}\right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ est solution faible de l'équation alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon v) + c\rho_\varepsilon = R_\varepsilon,$$

- **Lemme de Friedrichs ('58) :** $R_\varepsilon \in L^1(]0,T[\times\Omega)$ et $\|R_\varepsilon\|_{L^1} \longrightarrow 0$.
- $\rho_\varepsilon \in L^\infty(]0,T[,\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))$ et
  - $\rho_\varepsilon \to \rho$ dans $L^p(]0,T[\times\Omega)$ pour tout $p < +\infty$.
  - Pour tout $t \in [0,T]$, $\rho_\varepsilon(t) \to \rho(t)$ dans $L^p(\Omega)$.
- $\partial_t \rho_\varepsilon$ est dans $L^1$ et donc $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0,T],L^1(\Omega))$.

1. On montre que $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0,T],L^1(\Omega))$.
2. On montre que les traces de $\rho_\varepsilon$ sont de Cauchy dans $L^2(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^\alpha)$.

$c \in L^1(]0,T[\times\Omega), v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d)$, $v\cdot\boldsymbol{\nu} \in L^\alpha(]0,T[\times\Gamma)$, $\alpha > 1$.
On suppose :

$$(c + \operatorname{div} v)^- \in L^1(]0,T[,L^\infty(\Omega)) \text{ et } (\operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0,T[,L^\infty(\Omega)).$$

$c \in L^1(]0,T[\times\Omega), v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d)$, $v\cdot\boldsymbol{\nu} \in L^\alpha(]0,T[\times\Gamma)$, $\alpha > 1$.
On suppose :

$$(c + \operatorname{div} v)^- \in L^1(]0,T[,L^\infty(\Omega)) \text{ et } (\operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0,T[,L^\infty(\Omega)).$$

### THÉORÈME

- *Pour tout* $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ *et tout* $\rho^{in} \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^-)$, *il existe* $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *et* $\rho^{out} \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)$ **uniques** *tels que pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0,T[\times\overline{\Omega})$

$$\int_0^T\int_\Omega \rho(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi - c\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho_0\varphi(0)\,dx$$
$$- \int_0^T\int_\Gamma \rho^{out}\varphi(v\cdot\boldsymbol{\nu})^+\,d\sigma\,dt + \int_0^T\int_\Gamma \rho^{in}\varphi(v\cdot\boldsymbol{\nu})^-\,d\sigma\,dt = 0.$$

- **Continuité :** $\rho$ *est dans* $\mathcal{C}^0([0,T],L^q(\Omega))$ *pour tout* $q < +\infty$.
- **+ Renormalisation.**

Unicité : Renormalisation + $(\operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega))$.

Unicité : Renormalisation + $(\operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega))$.
Existence par approximation parabolique :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho}_\varepsilon + \operatorname{div}(\tilde{\rho}_\varepsilon v) + c\tilde{\rho}_\varepsilon - \varepsilon \Delta \tilde{\rho}_\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\rho}_\varepsilon(t=0) = \rho_0, \\ \varepsilon \dfrac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}} + (\tilde{\rho}_\varepsilon - \rho^{in})(v \cdot \boldsymbol{\nu})^- = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Unicité : Renormalisation + $(\operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega))$.

Existence par approximation parabolique :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho}_\varepsilon + \operatorname{div}(\tilde{\rho}_\varepsilon v) + c\tilde{\rho}_\varepsilon - \varepsilon \Delta \tilde{\rho}_\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\rho}_\varepsilon(t=0) = \rho_0, \\ \varepsilon \dfrac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}} + (\tilde{\rho}_\varepsilon - \rho^{in})(v \cdot \boldsymbol{\nu})^- = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Estimations : Ici on utilise $(c + \operatorname{div} v)^- \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega))$.

$$\left.\begin{array}{l} \|\tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)} \leq C \\ \|\tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)} \leq C \\ \sqrt{\varepsilon}\|\nabla\tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^2(]0,T[\times\Omega)} \leq C \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{convergences faibles-}\star.$$

Passage à la limite immédiat :

On vérifie que la trace limite $\gamma\rho$ s'écrit bien sous la forme

$$\gamma\rho(v \cdot \boldsymbol{\nu}) = \rho^{out}(v \cdot \boldsymbol{\nu})^+ - \rho^{in}(v \cdot \boldsymbol{\nu})^-.$$

## Principe de comparaison

$$\left.\begin{array}{l}\rho_0^1 \leq \rho_0^2, \quad \text{p.p.} \\ \rho_1^{in} \leq \rho_2^{in}, \quad d\mu_v^- \text{-p.p.}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho_1 \leq \rho_2, \quad \text{p.p.} \\ \rho_1^{out} \leq \rho_2^{out}, \quad d\mu_v^+ \text{-p.p.}\end{array}\right.$$

## Principe du produit

$$\left.\begin{array}{l}\partial_t \rho_1 + v \cdot \nabla \rho_1 = f_1 \\ \partial_t \rho_2 + v \cdot \nabla \rho_2 = f_2\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\partial_t(\rho_1 \rho_2) + v \cdot \nabla(\rho_1 \rho_2) = \rho_1 f_2 + \rho_2 f_1 \\ \gamma(\rho_1 \rho_2) = (\gamma \rho_1)(\gamma \rho_2)\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho}_\varepsilon + \mathrm{div}\,(\tilde{\rho}_\varepsilon v) + c\tilde{\rho}_\varepsilon - \varepsilon\Delta\tilde{\rho}_\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\rho}_\varepsilon(t=0) = \rho_0, \\ \varepsilon \dfrac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}} + (\tilde{\rho}_\varepsilon - \rho^{in})(v\cdot\boldsymbol{\nu})^- = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**THÉORÈME (CONVERGENCE FORTE)**

*Pour tout $p < +\infty$*

$$\tilde{\rho}_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \rho, \quad \textit{dans } \mathcal{C}^0([0,T], L^p(\Omega)),$$

$$\gamma\tilde{\rho}_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \gamma\rho, \quad \textit{dans } L^p(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|).$$

IDÉE : Comparer $\tilde{\rho}_\varepsilon$ à $\rho_{\varepsilon^\alpha} = \rho \star_{\boldsymbol{\nu}} \eta_{\varepsilon^\alpha}$, $\alpha < 1/2$ qui vérifie

$$\partial_t \rho_{\varepsilon^\alpha} + \mathrm{div}\,(\rho_{\varepsilon^\alpha} v) + c\rho_{\varepsilon^\alpha} = R_{\varepsilon^\alpha}.$$

On utilise que, par définition, on a $\|\nabla \rho_{\varepsilon^\alpha}\|_{L^2} \leq C/\varepsilon^\alpha$.

## Th. de traces et pb de Cauchy-Dirichlet dans $L^p$

L'espace de traces naturel n'est pas $L^p(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|)$.

## Stabilité forte par rapport aux données

Applications aux équations de Navier-Stokes.

## Régularité en espace des solutions du transport

- Le schéma upwind (ou **décentré amont**) est le schéma le plus simple qui assure stabilité, monotonie et convergence.
- En 1D, le schéma implicite pour $\partial_t \rho + v(t,x)\partial_x \rho = 0$, s'écrit

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\delta t} + (v_i^n)^+ \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_{i-1}^{n+1}}{\delta x} - (v_i^n)^- \frac{\rho_{i+1}^{n+1} - \rho_i^{n+1}}{\delta x} = 0.$$

- La version explicite fonctionne aussi mais sous condition CFL.
- C'est le pendant linéaire du schéma de Godunov pour les lois de conservation scalaire.

- Le schéma upwind (ou **décentré amont**) est le schéma le plus simple qui assure stabilité, monotonie et convergence.
- En 1D, le schéma implicite pour $\partial_t \rho + v(t,x)\partial_x \rho = 0$, s'écrit

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\delta t} + (v_i^n)^+ \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_{i-1}^{n+1}}{\delta x} - (v_i^n)^- \frac{\rho_{i+1}^{n+1} - \rho_i^{n+1}}{\delta x} = 0.$$

- La version explicite fonctionne aussi mais sous condition CFL.
- C'est le pendant linéaire du schéma de Godunov pour les lois de conservation scalaire.

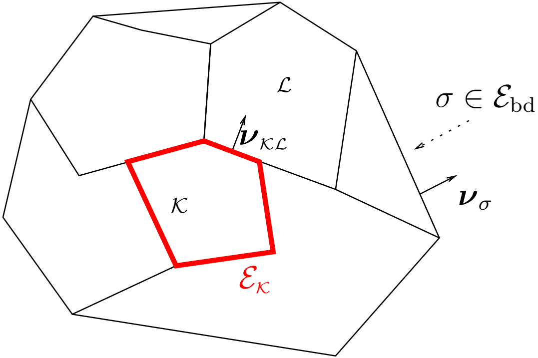
### Buts de ce travail (B., 2012)

- Ecrire le schéma upwind multi-D sur un maillage général pour des champs $v$ peu réguliers avec prise en compte des conditions au bord.
- Montrer qu'il est bien posé, monotone, stable, etc ...
- Montrer la convergence **forte uniforme en temps** de la solution approchée, c'est-à-dire dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^p(\Omega))$ pour tout $p < +\infty$ sans hypothèse de régularité sur les données.
- Etudier la stabilité par rapport aux données.

- **(Kuznetsov, 1976)** convergence à l'ordre 1/2 sur maillage cartésien, champ $v$ lipschitzien et donnée initiale $BV$.
- **(Vila-Villedieu, 2003)** Ordre 1/2 (optimal) pour les systèmes à coefficients constants.
- **(Merlet-Vovelle, 2007) (Merlet, 2007)** Ordre 1/2 sur maillage quelconque, champ lipschitzien et donnée initiale BV.
- **(Delarue-Lagoutière, 2010)** Nouvelle preuve du résultat de Vovelle et Merlet par des techniques probabilistes.
- **(Després, 2004) (Bouchut-Ghidaglia-Pascal, 2005)** Etude fine du cas où le champ est constant.
- **(Walkington, 2005)** Convergence dans $L^p(]0,T[\times\Omega)$ de schémas Discontinuous Galerkin sur maillages conformes et sans termes de bord.

### Maillage

- $\mathcal{T}$ = Ens. de volumes de contrôle $\kappa$ polygonaux, compacts, $\mathring{\kappa} \neq \emptyset$. On note $|\kappa|$ sa mesure, $d_\mathcal{K}$ son diamètre.
- Arêtes (faces) : $\sigma = \kappa|\mathcal{L} = \kappa \cap \mathcal{L}$, ou les arêtes du bord. On note $|\sigma|$ leur mesure.
- Ensembles d'arêtes $\mathcal{E}_\mathcal{K}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{\mathrm{bd}}$, $\mathcal{E}_{\mathrm{int}}$, ...
- Normales : $\boldsymbol{\nu}_\sigma$, $\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$, $\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}$, ...
- Pas de temps constant $\delta t = T/N$.



## Maillage

- $\mathcal{T}$ = Ens. de volumes de contrôle $\mathcal{K}$ polygonaux, compacts, $\mathring{\mathcal{K}} \neq \emptyset$. On note $|\mathcal{K}|$ sa mesure, $d_{\mathcal{K}}$ son diamètre.
- Arêtes (faces) : $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} = \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$, ou les arêtes du bord. On note $|\sigma|$ leur mesure.
- Ensembles d'arêtes $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{\text{bd}}$, $\mathcal{E}_{\text{int}}$, ...
- Normales : $\boldsymbol{\nu}_\sigma$, $\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$, $\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}$, ...
- Pas de temps constant $\delta t = T/N$.

## Discrétisation des données

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}, \forall n \leq N-1, \qquad v_{\mathcal{K}\sigma}^n = \frac{1}{\delta t |\sigma|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_\sigma (v \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}) \, dx \, dt,$$

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \forall n \leq N-1, \qquad c_{\mathcal{K}}^n = \frac{1}{\delta t |\mathcal{K}|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{K}} c \, dx \, dt.$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{bd}}, \forall n \leq N-1, \qquad \rho_\sigma^{in,n+1} = \frac{1}{\delta t |\sigma|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_\sigma \rho^{in} \, dx \, dt.$$

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \qquad \rho_{\mathcal{K}}^0 = \frac{1}{|\mathcal{K}|} \int_{\mathcal{K}} \rho^0(x) \, dx.$$

# Le schéma upwind implicite

Notation : $v_{\mathcal{K}\sigma}^{n+}$ et $v_{\mathcal{K}\sigma}^{n-}$ sont les parties positives et négatives de $v_{\mathcal{K}\sigma}^{n}$

$$v_{\mathcal{K}\sigma}^{n} = v_{\mathcal{K}\sigma}^{n+} - v_{\mathcal{K}\sigma}^{n-}, \quad |v_{\mathcal{K}\sigma}^{n}| = v_{\mathcal{K}\sigma}^{n+} + v_{\mathcal{K}\sigma}^{n-}$$

Schéma VF upwind implicite : On cherche $(\rho_{\mathcal{K}}^{n})_{\substack{n\in[\![0,N]\!]\\ \mathcal{K}\in\mathcal{T}}}$ t.q.

$$\begin{cases} |\mathcal{K}|\dfrac{\rho_{\mathcal{K}}^{n+1}-\rho_{\mathcal{K}}^{n}}{\delta t} + \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}\cap\mathcal{E}_{\mathrm{int}}} |\sigma|\big(v_{\mathcal{K}\sigma}^{n+}\rho_{\mathcal{K}}^{n+1} - v_{\mathcal{K}\sigma}^{n-}\rho_{\mathcal{L}}^{n+1}\big) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}\cap\mathcal{E}_{\mathrm{bd}}} |\sigma| v_{\mathcal{K}\sigma}^{n}\rho_{\sigma}^{n+1} \\ \qquad\qquad + |\mathcal{K}|c_{\mathcal{K}}^{n}\rho_{\mathcal{K}}^{n+1} = 0, \quad \forall n, \forall\mathcal{K}\in\mathcal{T}, \\ \rho_{\sigma}^{n+1} = \begin{cases} \rho_{\sigma}^{in,n+1}, & \forall n, \forall\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{bd}}, \ \text{ t.q. } \ v_{\mathcal{K}\sigma}^{n}\leq 0, \\ \rho_{\mathcal{K}}^{n+1}, & \forall n, \forall\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{bd}}, \ \text{ t.q. } \ v_{\mathcal{K}\sigma}^{n} > 0, \end{cases} \\ \rho_{\mathcal{K}}^{0} = \dfrac{1}{|\mathcal{K}|}\displaystyle\int_{\mathcal{K}} \rho^{0}\, dx, \quad \forall\mathcal{K}\in\mathcal{T}. \end{cases} \tag{VF}$$

**Notation :** $v_{\mathcal{K}\sigma}^{n+}$ et $v_{\mathcal{K}\sigma}^{n-}$ sont les parties positives et négatives de $v_{\mathcal{K}\sigma}^{n}$

$$v_{\mathcal{K}\sigma}^{n} = v_{\mathcal{K}\sigma}^{n+} - v_{\mathcal{K}\sigma}^{n-}, \quad |v_{\mathcal{K}\sigma}^{n}| = v_{\mathcal{K}\sigma}^{n+} + v_{\mathcal{K}\sigma}^{n-}$$

**Schéma VF upwind implicite :** On cherche $(\rho_{\mathcal{K}}^{n})_{\substack{n\in[\![0,N]\!]\\ \mathcal{K}\in\mathcal{T}}}$ t.q.

Ecriture équivalente si $c = \operatorname{div} v = 0$ (advection pure)

$$\begin{cases} \mathcal{K}\dfrac{\rho_{\mathcal{K}}^{n+1} - \rho_{\mathcal{K}}^{n}}{\delta t} + \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}\cap\mathcal{E}_{\text{int}}} |\sigma| v_{\mathcal{K}\sigma}^{n-}\left(\rho_{\mathcal{K}}^{n+1} - \rho_{\mathcal{L}}^{n+1}\right) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}\cap\mathcal{E}_{\text{bd}}} |\sigma| v_{\mathcal{K}\sigma}^{n-}(\rho_{\mathcal{K}}^{n+1} - \rho_{\sigma}^{in,n+1}) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall n, \forall \mathcal{K}\in\mathcal{T}, \\ \rho_{\sigma}^{n+1} = \begin{cases} \rho_{\sigma}^{in,n+1}, & \forall n, \forall\sigma\in\mathcal{E}_{\text{bd}}, \text{ t.q. } v_{\mathcal{K}\sigma}^{n} \leq 0, \\ \rho_{\mathcal{K}}^{n+1}, & \forall n, \forall\sigma\in\mathcal{E}_{\text{bd}}, \text{ t.q. } v_{\mathcal{K}\sigma}^{n} > 0, \end{cases} \\ \rho_{\mathcal{K}}^{0} = \dfrac{1}{|\mathcal{K}|}\displaystyle\int_{\mathcal{K}} \rho^{0}\,dx, \quad \forall\mathcal{K}\in\mathcal{T}. \end{cases} \tag{VF}$$

### THÉORÈME

*On suppose* $(c + \operatorname{div} v)^- \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega))$.

1. *Il existe* $\delta t_{\max} > 0$ *tel que, si* $\delta t \leq \delta t_{\max}$, *le schéma* (VF) *admet une unique solution pour toutes données bornées* $\rho^0$ *et* $\rho^{in}$.
   *La solution approchée est notée*
   $$\rho_{\mathcal{T},\delta t} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \rho_{\mathcal{K}}^{n+1} 1_{]t^n,t^{n+1}[\times\mathcal{K}} \in L^\infty(]0,T[\times\Omega).$$
2. *Dans ces conditions le schéma est monotone*
   $$\rho^0 \geq 0, \rho^{in} \geq 0 \implies \rho_{\mathcal{K}}^n \geq 0, \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \forall n.$$
3. *Enfin, on a la borne a priori suivante*
   $$\|\rho_{\mathcal{T},\delta t}\|_{L^\infty} \leq \max(\|\rho^0\|_{L^\infty}, \|\rho^{in}\|_{L^\infty}) \exp\left(2\int_0^T \|(c + \operatorname{div} v)^-\|_{L^\infty}\, dt\right).$$

On suppose que

- $\inf_\Omega \rho^0 > 0$ et $\inf_{]0,T[\times\Gamma} \rho^{in} > 0$.
- $(c + \operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega))$

On peut alors montrer une borne inférieure uniforme

$$\inf_{n,\mathcal{K}} \rho_\mathcal{K}^n \geq \inf(\rho^0, \rho^{in}) \exp\left(-\int_0^T \|(c + \operatorname{div} v)^+\|_{L^\infty} \, dt\right).$$

Même estimation que sur le problème continu

$\rightsquigarrow$ Utile dans les applications.

Rappel pour l'app. parabolique $\quad \varepsilon \|\nabla \tilde{\rho}_\varepsilon\|^2_{L^2(]0,T[\times\Omega)} \leq C. \qquad (\star)$

**Théorème**

*On suppose toujours $(c + \operatorname{div} v)^- \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega))$ et $\delta t \leq \delta t_{\max}$.*
*La solution approchée $\rho_{\mathcal{T},\delta t}$ vérifie l'estimation suivante*

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}}} |\sigma| |v^n_{\mathcal{K}\mathcal{L}}| (\rho^{n+1}_{\mathcal{L}} - \rho^{n+1}_{\mathcal{K}})^2 \leq M,$$

*où $M$ ne dépend que des données.*

Cette estimation ressemble à $(\star)$ avec $\varepsilon \sim |v| h_{\mathcal{T}}$.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}}} \underbrace{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} |\sigma|}_{\sim h^d_{\mathcal{T}}} \, d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} |v^n_{\mathcal{K}\mathcal{L}}| \left( \frac{\rho^{n+1}_{\mathcal{L}} - \rho^{n+1}_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right)^2 \leq M,$$

- La "viscosité" ici vaut $\varepsilon \sim d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} |v^n_{\mathcal{K}\mathcal{L}}|$.
- L'estimation est inutile là où $v \equiv 0$.

PREUVE

On multiplie le schéma par $\rho_{\mathcal{K}}^{n+1}$ et on somme sur $n$ et $\kappa$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\rho_{\mathcal{T}}^{N}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\|\rho_{\mathcal{T}}^{n+1}-\rho_{\mathcal{T}}^{n}\|_{L^2}^2 \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}}|\kappa|\left(c_{\mathcal{K}}^n+\frac{1}{2}(\operatorname{div} v)_{\mathcal{K}}^n\right)|\rho_{\mathcal{K}}^{n+1}|^2 \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{\sigma=\mathcal{K}|\mathcal{L}\in\mathcal{E}_{\text{int}}}|\sigma||v_{\mathcal{K}\mathcal{L}}^n|(\rho_{\mathcal{L}}^{n+1}-\rho_{\mathcal{K}}^{n+1})^2 \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{bd}}\\ v_\sigma^n<0}}|\sigma||v_\sigma^n|(\rho_\sigma^{in,n+1}-\rho_{\mathcal{K}}^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{bd}}\\ v_\sigma^n\geq 0}}|\sigma|v_\sigma^n(\rho_\sigma^{n+1})^2 \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2}\|\rho_{\mathcal{T}}^{0}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{bd}}\\ v_\sigma^n<0}}|\sigma||v_\sigma^n|(\rho_\sigma^{in,n+1})^2.
\end{aligned}
$$

- Sous des hypothèses raisonnables de régularité des maillages

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \forall f \in W^{1,1}(\mathcal{K}), \quad \|f\|_{L^1(\partial\mathcal{K})} \leq \frac{C}{d_\mathcal{K}} \|f\|_{W^{1,1}(\mathcal{K})}.$$

- Sous une hypothèse du type $\delta t \leq C h_\mathcal{T}$.

### Théorème

*On suppose* $(c + \operatorname{div} v)^-$, $(\operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$.
*Alors quand* $\delta t$ *et* $h_\mathcal{T}$ *tendent vers* 0, *on a*

- *La solution approchée* $\rho_{\mathcal{T},\delta t}$ *converge vers la solution* $\rho$ *du problème continu dans* $L^\infty(]0, T[\times\Omega)$ *faible-$*$.*
- *La trace de la solution approchée*

$$\gamma\rho_{\mathcal{T},\delta t} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{bd}}} \rho_\mathcal{K}^{n+1} 1_{]t^n,t^{n+1}[\times\sigma},$$

*converge vers* $\gamma\rho$ *dans* $L^\infty(]0, T[\times\Gamma, |d\mu_v|)$ *faible-$*$.*

### Principe de la preuve

- Par la borne a priori $L^\infty$ on extrait une sous-suite telle que

$$\rho_{\mathcal{T},\delta t} \rightharpoonup \rho, \text{ et } \gamma\rho_{\mathcal{T},\delta t} \rightharpoonup g.$$

- On prend une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\overline{\Omega})$ ; on multiplie l'équation du schéma par $\varphi_\mathcal{K}^n = \varphi(t^n, x_\mathcal{K})$ où $x_\mathcal{K}$ est un point quelconque dans $\kappa$ ; on somme tout sur $n$ et sur $\kappa$.
- On essaie de passer à la limite dans tous les termes pour obtenir :
  - Le couple $(\rho, g)$ vérifie la formulation faible du problème pour la bonne donnée initiale.
  - La trace vaut bien $g = \rho^{in}$ là où $v \cdot \boldsymbol{\nu} < 0$.
- Par unicité de la solution du problème continu on aura bien la convergence de toute la suite.

## Exemples de termes

On suppose $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\Omega))$

$$T_1 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} |\kappa|(\rho_{\mathcal{K}}^{n+1} - \rho_{\mathcal{K}}^n)\varphi(t^n, x_{\mathcal{K}}).$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= -\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \rho_{\mathcal{K}}^{n+1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\kappa|\partial_t\varphi(t, x_{\mathcal{K}})\, dt - \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} |\kappa|\rho_{\mathcal{K}}^0\varphi(0, x_{\mathcal{K}}) \\
&= -\int_0^T \int_\Omega \rho_{\mathcal{T},\delta t}\partial_t\varphi\, dx\, dt - \int_\Omega \rho_{\mathcal{T}}^0\varphi(0,.)\, dx + O_\varphi(h_{\mathcal{T}}) \\
&\xrightarrow[\substack{\delta t\to 0\\ h_{\mathcal{T}}\to 0}]{} -\int_0^T \int_\Omega \rho\partial_t\varphi\, dx\, dt - \int_\Omega \rho^0\varphi(0,.)\, dx.
\end{aligned}$$

## Exemples de termes

On suppose $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\Omega))$

$$T_2(v) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{int}}\\ \sigma=\mathcal{K}|\mathcal{L}}} |\sigma| \left( v_{\mathcal{K}\mathcal{L}}^{n-}(\rho_{\mathcal{K}}^{n+1} - \rho_{\mathcal{L}}^{n+1})\varphi(t^n, x_{\mathcal{K}}) + v_{\mathcal{K}\mathcal{L}}^{n+}(\rho_{\mathcal{L}}^{n+1} - \rho_{\mathcal{K}}^{n+1})\varphi(t^n, x_{\mathcal{L}}) \right).$$

### Lemme

1. *Pour tout* $w_1, w_2 \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d)$ *on a*
$$|T_2(w_1) - T_2(w_2)| \leq C\|w_1 - w_2\|_{L^1(W^{1,1})}.$$
2. *Pour tout* $w \in \mathcal{C}^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})^d$ *on a*
$$T_2(w) + T_2'(w) \xrightarrow[(\delta t, h_{\mathcal{T}})\to 0]{} -\int_0^T\int_\Omega \rho \operatorname{div}(\varphi w)\,dt\,dx,$$
*où* $T_2'(w)$ *vérifie* $|T_2'(w)| \leq C\|v - w\|_{L^1(W^{1,1})}$.

Bilan : $v \in L^1((W^{1,1})^d) \Rightarrow T_2(v) \xrightarrow[(\delta t, h_{\mathcal{T}})\to 0]{} -\int_0^T\int_\Omega \rho \operatorname{div}(\varphi v)\,dt\,dx.$

**THÉORÈME**

*Sous les mêmes hypothèses que précédemment on a*

$$\|\rho_{\mathcal{T},\delta t} - \rho\|_{L^\infty(]0,T[,L^p(\Omega))} \xrightarrow[\substack{h_{\mathcal{T}}\to 0\\ \delta t\to 0}]{} 0, \quad \forall p < +\infty,$$

$$\|\gamma\rho_{\mathcal{T},\delta t} - \gamma\rho\|_{L^p(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|)} \xrightarrow[\substack{h_{\mathcal{T}}\to 0\\ \delta t\to 0}]{} 0, \quad \forall p < +\infty.$$

**IDÉES** Même principe que pour l'approximation parabolique.

- Friedrichs : Soit $\rho^\varepsilon \in W^{1,\infty}(]0,T[\times\Omega) \to \rho$ telle que

$$\partial_t\rho^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon v) + c\rho^\varepsilon = R_\varepsilon \to 0 \text{ dans } L^1 \text{ fort.}$$

- On projette $\rho^\varepsilon$ sur le maillage $\rightsquigarrow \rho^\varepsilon_{\mathcal{T},\delta t}$ et on écrit

$$\|\rho_{\mathcal{T},\delta t} - \rho\|_{L^\infty(L^2)} \leq \|\rho_{\mathcal{T},\delta t} - \rho^\varepsilon_{\mathcal{T},\delta t}\|_{L^\infty(L^2)} + \underbrace{\|\rho^\varepsilon_{\mathcal{T},\delta t} - \rho^\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)}}_{\leq C\frac{\delta t + h_{\mathcal{T}}}{\varepsilon}} + \underbrace{\|\rho^\varepsilon - \rho\|_{L^\infty(L^2)}}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{ind. de } \delta t,\, h_{\mathcal{T}}} 0}.$$

# Estimation de $\rho_{\mathcal{T},\delta t} - \rho^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\delta t}$

On note $\mathcal{L}^n_{\mathcal{K}}$ l'opérateur qui définit le schéma. On a donc

$$\mathcal{L}^n_{\mathcal{K}}(\rho_{\mathcal{T},\delta t}) = 0, \quad \forall \mathcal{K}, \forall n$$

et on calcule l'action du schéma sur la projection de $\rho^{\varepsilon}$

$$\mathcal{L}^n_{\mathcal{K}}(\rho^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\delta t}) = |\mathcal{K}|(\delta^{\varepsilon,n+1}_{\mathcal{K}} - \delta^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}}) + |\mathcal{K}| R^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \delta^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}\sigma} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \gamma^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}\sigma},$$

avec

$$\delta^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}} = \frac{1}{|\mathcal{K}|}\int_{\mathcal{K}} (\rho^{\varepsilon}(t^n, x_{\mathcal{K}}) - \rho^{\varepsilon}(t^n, x))\, dx,$$

$$\delta^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}\sigma} = \frac{1}{\delta t|\sigma|}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\sigma} (v\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma})(\rho^{\varepsilon}(t^{n+1}, x_{\sigma}) - \rho^{\varepsilon}(t, x))\, dx\, dt,$$

$$\gamma^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}\sigma} = \begin{cases} -|v^n_{\mathcal{K}\sigma}| \dfrac{\rho^{\varepsilon,n+1}_{\mathcal{L}} - \rho^{\varepsilon,n+1}_{\mathcal{K}}}{2} + v^n_{\mathcal{K}\sigma}\left(\rho^{\varepsilon,n+1}_{\sigma} - \rho^{\varepsilon}(t^{n+1}, x_{\sigma})\right), & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ v^n_{\mathcal{K}\sigma}\left(\rho^{\varepsilon,n+1}_{\sigma} - \rho^{\varepsilon}(t^{n+1}, x_{\sigma})\right), & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{bd}} \end{cases}$$

$$R^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}} = \frac{1}{\delta t|\mathcal{K}|}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\mathcal{K}} R^{\varepsilon}\, dx\, dt + \frac{1}{\delta t|\mathcal{K}|}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\mathcal{K}} c(t,x)(\rho^{\varepsilon}(t^n, x_{\mathcal{K}}) - \rho^{\varepsilon}(t, x))\, dx\, dt.$$

# Estimation de $\rho_{\mathcal{T},\delta t} - \rho^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\delta t}$

On note $\mathcal{L}^n_{\mathcal{K}}$ l'opérateur qui définit le schéma. On a donc

$$\mathcal{L}^n_{\mathcal{K}}(\rho_{\mathcal{T},\delta t}) = 0, \quad \forall \mathcal{K}, \forall n$$

et on calcule l'action du schéma sur la projection de $\rho^{\varepsilon}$

$$\mathcal{L}^n_{\mathcal{K}}(\rho^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\delta t}) = |\mathcal{K}|(\delta^{\varepsilon,n+1}_{\mathcal{K}} - \delta^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}}) + |\mathcal{K}|R^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma|\delta^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}\sigma} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma|\gamma^{\varepsilon,n}_{\mathcal{K}\sigma},$$

## Estimation "usuelle" des termes sources

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \left|\mathcal{L}^n_{\mathcal{K}}(\rho_{\mathcal{T},\delta t} - \rho^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\delta t})\right| \leq C\|R^{\varepsilon}\|_{L^1} + O_{\varepsilon}(\delta t + h_{\mathcal{T}}).$$

## Estimation d'énergie

$$\Longrightarrow \|\rho_{\mathcal{T},\delta t} - \rho^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\delta t}\|_{L^\infty(L^p)} \leq C\|R^{\varepsilon}\|_{L^1} + O_{\varepsilon}(\delta t + h_{\mathcal{T}}).$$

## Quleleques ingrédients

- On utilise aussi une estimation $L^2(H^1)$ faible.
- Certains termes de bord sont pénibles mais on s'en sort grâce à

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{bd}} \\ v^n_{\mathcal{K}\sigma}<0}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma} (v\cdot\boldsymbol{\nu}_{\sigma})^+ \,dx\,dt \xrightarrow[\substack{h_{\mathcal{T}}\to 0 \\ \delta t\to 0}]{} 0.$$

A PROPOS DE L'ESTIMATION $L^2(H^1)$ FAIBLE

La convergence forte de la solution approchée, donne en fait *a posteriori* que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{bd}}} |\sigma||v_{\mathcal{K}\sigma}^n|(\rho_{\mathcal{K}}^{n+1}-\rho_\sigma^{n+1})^2 \\ + \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}\\ \sigma=\mathcal{K}|\mathcal{L}}} |\sigma||v_{\mathcal{K}\mathcal{L}}^n|(\rho_{\mathcal{L}}^{n+1}-\rho_{\mathcal{K}}^{n+1})^2 \xrightarrow[\substack{\delta t\to 0\\ h_{\mathcal{T}}\to 0}]{} 0.$$

"Renormalisation" discrète $\qquad\qquad \forall \beta \in \mathcal{C}^0,\ \mathcal{C}^1$ p.m.

$$
\begin{aligned}
&|\kappa| \frac{\beta(\rho_\mathcal{K}^{n+1}) - \beta(\rho_\mathcal{K}^n)}{\delta t} \\
&\quad + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K} \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} |\sigma| \big( v_{\mathcal{K}\sigma}^{n+} \beta(\rho_\mathcal{K}^{n+1}) - v_{\mathcal{K}\sigma}^{n-} \beta(\rho_\mathcal{L}^{n+1}) \big) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K} \cap \mathcal{E}_{\text{bd}}} |\sigma| v_{\mathcal{K}\sigma}^n \beta(\rho_\sigma^{n+1}) \\
&\qquad + |\kappa| c_\mathcal{K}^n \beta'(\rho_\mathcal{K}^{n+1}) \rho_\mathcal{K}^{n+1} + |\kappa| (\operatorname{div} v)_\mathcal{K}^n \big( \beta'(\rho_\mathcal{K}^{n+1}) \rho_\mathcal{K}^{n+1} - \beta(\rho_\mathcal{K}^{n+1}) \big) \\
&\qquad\qquad = |\kappa| R_\mathcal{K}^{n+1}, \quad \forall n \in [\![0, N-1]\!], \forall \kappa \in \mathcal{T},
\end{aligned}
$$

$$
\text{avec} \left\{
\begin{array}{l}
\|R_{\mathcal{T},\delta t}\|_{L^1} \xrightarrow[\substack{h_\mathcal{T} \to 0 \\ \delta t \to 0}]{} 0., \\
\beta \text{ convexe} \Rightarrow R_{\mathcal{T},\delta t} \leq 0, \\
\beta \text{ concave} \Rightarrow R_{\mathcal{T},\delta t} \geq 0.
\end{array}
\right.
$$

On utilise ici que

$$
\forall \alpha \neq 0, \quad \text{on a} \quad \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\kappa \in \mathcal{T}} |\kappa| |c_\mathcal{K}^n + (\operatorname{div} v)_\mathcal{K}^n| \mathbb{1}_{\{\rho_\mathcal{K}^{n+1} = \alpha\}} \xrightarrow[(\delta t, h_\mathcal{T}) \to 0]{} 0.
$$

Important en vue de l'étude de couplages

Données approchées - stabilité : Tous les résultats demeurent si

$$v^n_{\mathcal{K}\sigma} = -v^n_{\mathcal{L}\sigma}, \quad \forall \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}, \quad \forall n \in [\![0, N]\!].$$

$$\delta t \sup_n \left( \sup_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} (c^n_{\mathcal{K}} + (\operatorname{div} v)^n_{\mathcal{K}})^- \right) < 1,$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \left( \sup_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} (c^n_{\mathcal{K}} + (\operatorname{div} v)^n_{\mathcal{K}})^- \right) \leq M$$

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} c^n_{\mathcal{K}} \mathbb{1}_{]t^n, t^{n+1}[\times \mathcal{K}} \xrightarrow[(\delta t, h_{\mathcal{T}})\to 0]{} c, \quad \text{dans } L^1(]0, T[\times \Omega).$$

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} (\operatorname{div} v)^n_{\mathcal{K}} \mathbb{1}_{]t^n, t^{n+1}[\times \mathcal{K}} \xrightarrow[(\delta t, h_{\mathcal{T}})\to 0]{} \operatorname{div} v, \quad \text{dans } L^1(]0, T[\times \Omega).$$

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} d_{\mathcal{K}} \left| \delta t |\sigma| v^n_{\mathcal{K}\sigma} - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma} (v \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma})\, dx\, dt \right| \xrightarrow[(\delta t, h_{\mathcal{T}})\to 0]{} 0. \qquad (\star)$$

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{bd}}} v^n_{\sigma} \mathbb{1}_{]t^n, t^{n+1}[\times \sigma} \xrightarrow[(\delta t, h_{\mathcal{T}})\to 0]{} (v \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad \text{dans } L^1(]0, T[\times \Gamma).$$

**Données approchées - stabilité :** Tous les résultats demeurent si

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} d_\mathcal{K} \left| \delta t |\sigma| v_{\mathcal{K}\sigma}^n - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_\sigma (v \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}) \, dx \, dt \right| \xrightarrow[(\delta t, h_\mathcal{T})\to 0]{} 0. \qquad (\star)$$

**Fait**

La propriété $(\star)$ est une convergence $L^1$ !

**Exemple**

On suppose que $v_{\mathcal{K}\sigma}^n = V_\sigma^n \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}$, avec $V_\sigma^n \in \mathbb{R}^d$ :

$(\star) \Longleftrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} V_\sigma^n 1\!\!1_{]t^n,t^{n+1}[\times D_\sigma} \xrightarrow[(\delta t, h_\mathcal{T})\to 0]{} v, \quad \text{dans} \quad (L^1(]0,T[\times\Omega))^d,$$

où $D_\sigma$ est la cellule diamant associée à $\sigma$.
Ceci **nécessite** la régularité $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d)$ mais la convergence n'est demandée **que** dans $(L^1(]0,T[\times\Omega))^d$.

$$\text{Domaine} \quad \Omega = ]0,1[^2,$$

$$\text{Champ stationnaire} \quad v(x,y) = \begin{pmatrix} 0.3 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

$$\text{avec} \quad f(x) = \begin{cases} |x-0.5|^{1/2}, & \text{pour } x < 0.5 \\ |x-0.5|^{1/4}, & \text{pour } x > 0.5. \end{cases}$$

**N.B. :** $v \in (W^{1,p}(\Omega))^2$ pour tout $p < 4/3$.

$$\text{Domaine} \quad \Omega = ]0,1[^2,$$

$$\text{Champ stationnaire} \quad v(x,y) = \begin{pmatrix} 0.3 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

$$\text{avec} \quad f(x) = \begin{cases} |x-0.5|^{1/2}, & \text{pour } x < 0.5 \\ |x-0.5|^{1/4}, & \text{pour } x > 0.5. \end{cases}$$

**N.B. :** $v \in (W^{1,p}(\Omega))^2$ pour tout $p < 4/3$.

$$\text{Donnée initiale :} \quad \rho(0,x) = 0,$$

$$\text{Donnée au bord :} \quad \rho^{in} = \begin{cases} 1, & \text{sur } \{x = 0\}, \\ 2, & \text{sur } \{y = 0\}. \end{cases}$$

$$\text{Sol. exacte :} \quad \rho(t,x,y) = \begin{cases} 1, & \text{pour } x < 0.3\,t \text{ et } y > \frac{1}{0.3}(F(x) - F(0)), \\ 2, & \text{pour } x < 0.3\,t \text{ et } y < \frac{1}{0.3}(F(x) - F(0)), \\ 2, & \text{pour } x > 0.3\,t \text{ et } y < \frac{1}{0.3}(F(x) - F(x-0.3t)), \\ 0, & \text{ailleurs}, \end{cases}$$

où $F$ est une primitive de $f$.

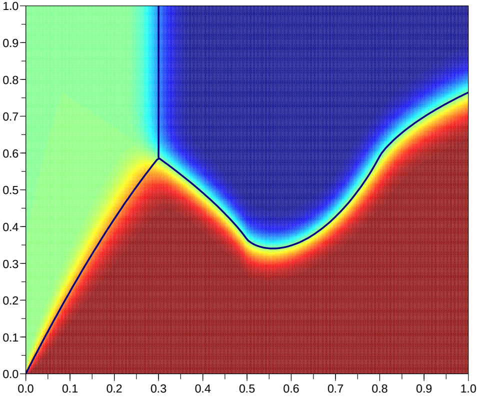
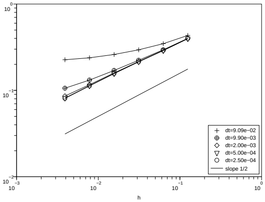


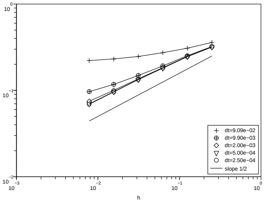

FIGURE: Solutions exacte et approchée au temps final $T = 1$

# Une illustration numérique

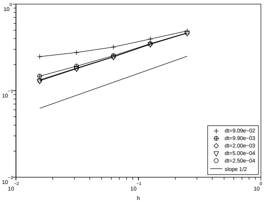





(a) Maillage rectangle uniforme




(b) Maillage non structuré




(c) Maillage rectangle loc. raffiné

Figure: Erreur $L^1$ au temps final par rapport au pas $h_{\mathcal{T}}$

## Théorie de traces pour les solutions faibles

- Définition d'une trace pour des solutions faibles du transport/réaction sous les hypothèses DiPerna-Lions.
- Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy-Dirichlet.
- Propriétés de renormalisation et de stabilité.

Ré-interpréter ces résultats en termes de flot Lagrangien du champ reste à faire.

## Schéma upwind

- Construction et analyse du schéma décentré amont sous les hypothèses DiPerna-Lions.
- Prise en compte des termes de bord.
- Preuve de la convergence forte uniforme en temps.
- Stabilité par rapport aux approximations des données.

A ce jour il n'existe pas d'estimation de l'erreur (d'ordre $\frac{1}{2}$ ?) dans ce cadre.