De la modélisation à la simulation numérique

Illustration sur un exemple simple mais instructif

F. Boyer

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
CNRS / Université de Provence

Mardi 23 Janvier 2007

- Un phénomène complexe que l'on veut :

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre

Expliquer les observations que l'on peut faire.

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser

Prédire théoriquement des comportements.
Savoir comment agir sur le système.

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler

    Peut-on reproduire fidèlement le système sur un ordinateur ?

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler
- Une échelle à laquelle on s'intéresse :
  Exemples en mécanique des fluides
  - Echelle moléculaire

Zones hautes de l'atmosphère. Plasmas.

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler
- Une échelle à laquelle on s'intéresse :
  Exemples en mécanique des fluides
  - Echelle moléculaire
    Zones hautes de l'atmosphère. Plasmas.
  - Echelle d'une goutte d'eau
    Formation et évolution des nuages. Agronomie. Pollution.

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler
- Une échelle à laquelle on s'intéresse :
  Exemples en mécanique des fluides
  - Echelle moléculaire
    Zones hautes de l'atmosphère. Plasmas.
  - Echelle d'une goutte d'eau
    Formation et évolution des nuages. Agronomie. Pollution.
  - Echelle du laboratoire
    Remplissage des réservoirs en aéronautique.

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler
- Une échelle à laquelle on s'intéresse :
  Exemples en mécanique des fluides
  - Echelle moléculaire
    Zones hautes de l'atmosphère. Plasmas.
  - Echelle d'une goutte d'eau
    Formation et évolution des nuages. Agronomie. Pollution.
  - Echelle du laboratoire
    Remplissage des réservoirs en aéronautique.
  - Echelle d'une ville
    Innondations. Nappes phréatiques ou pétrolières.

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler
- Une échelle à laquelle on s'intéresse :
  Exemples en mécanique des fluides
  - Echelle moléculaire
    Zones hautes de l'atmosphère. Plasmas.
  - Echelle d'une goutte d'eau
    Formation et évolution des nuages. Agronomie. Pollution.
  - Echelle du laboratoire
    Remplissage des réservoirs en aéronautique.
  - Echelle d'une ville
    Innondations. Nappes phréatiques ou pétrolières.
  - Echelle de la planète
    Mouvements océaniques. Raz de marée. Ouragans.

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler
- Une échelle à laquelle on s'intéresse :
  Exemples en mécanique des fluides
- Choix de quantités pertinentes pour le phénomène :
  Exemple en océanographie

Vitesse, pression, température
Composition chimique (salinité, pollution)
Topographie des fonds marins, de la côte
Quantités ponctuelles ou moyennées ?

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler
- Une échelle à laquelle on s'intéresse :
  Exemples en mécanique des fluides
- Choix de quantités pertinentes pour le phénomène :
  Exemple en océanographie
- Ecriture des relations entre ces quantités :

Principe fondamental de la dynamique
Premier et Second principe de la thermodynamique
Cinétique chimique
Comportements aléatoires
Lois empiriques
...

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler
- Une échelle à laquelle on s'intéresse :
  Exemples en mécanique des fluides
- Choix de quantités pertinentes pour le phénomène :
  Exemple en océanographie
- Ecriture des relations entre ces quantités :
- Simplifications :

Adimensionnement (ordres de grandeur)
Modèles asymptotiques
Résolution analytique approchée d'une partie des équations

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler
- Une échelle à laquelle on s'intéresse :
  Exemples en mécanique des fluides
- Choix de quantités pertinentes pour le phénomène :
  Exemple en océanographie
- Ecriture des relations entre ces quantités :
- Simplifications :
- Détermination des paramètres du système :

Paramètres mesurés
Paramètres tabulés
Paramètres estimés
Identification de paramètres à partir de mesures indirectes

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler
- Une échelle à laquelle on s'intéresse :
  Exemples en mécanique des fluides
- Choix de quantités pertinentes pour le phénomène :
  Exemple en océanographie
- Ecriture des relations entre ces quantités :
- Simplifications :
- Détermination des paramètres du système :
- Analyse mathématique :

Le modèle obtenu *in fine* est-il bien posé ?
Justification des simplifications
Compréhension du comportement en fonction des paramètres
Identification des limites du modèle

- Un phénomène complexe que l'on veut :
  - Comprendre
  - Analyser
  - Simuler
- Une échelle à laquelle on s'intéresse :
  Exemples en mécanique des fluides
- Choix de quantités pertinentes pour le phénomène :
  Exemple en océanographie
- Ecriture des relations entre ces quantités :
- Simplifications :
- Détermination des paramètres du système :
- Analyse mathématique :
- Simulation numérique :

Discrétisation. Analyse de l'erreur.
Mise en oeuvre. Algorithmique.
Visualisation et traitement des résultats.
Validation par confrontation à l'expérience et à la théorie.
Mise en évidence de nouveaux comportements.

Le phénomène en jeu :

Circulation automobile sur autoroute $\Rightarrow$ Comprendre les bouchons.

Le phénomène en jeu :

Circulation automobile sur autoroute $\Rightarrow$ Comprendre les bouchons.

Simplifications :

Autoroute à 3 voies rectiligne de longueur L. Pas d'entrées et sorties.

Le phénomène en jeu :

Circulation automobile sur autoroute $\Rightarrow$ Comprendre les bouchons.

Simplifications :

Autoroute à 3 voies rectiligne de longueur L. Pas d'entrées et sorties.

Echelle :

Celle de l'autoroute dans son ensemble.

Le phénomène en jeu :

Circulation automobile sur autoroute $\Rightarrow$ Comprendre les bouchons.

Simplifications :

Autoroute à 3 voies rectiligne de longueur L. Pas d'entrées et sorties.

Echelle :

Celle de l'autoroute dans son ensemble.

Quantités pertinentes :

Variables : temps $t \in \mathbb{R}$, position sur l'autoroute $x \in [0, L]$

Inconnues en description **Eulérienne** $\begin{cases} \text{Densité de véhicules } \rho(t,x) \in \mathbb{R}, \\ \text{Vitesse des véhicules } v(t,x) \in \mathbb{R} \end{cases}$

Le phénomène en jeu :

Circulation automobile sur autoroute $\Rightarrow$ Comprendre les bouchons.

Simplifications :

Autoroute à 3 voies rectiligne de longueur L. Pas d'entrées et sorties.

Echelle :

Celle de l'autoroute dans son ensemble.

Quantités pertinentes :

Variables : temps $t \in \mathbb{R}$, position sur l'autoroute $x \in [0, L]$

Inconnues en description **Eulérienne** $\begin{cases} \text{Densité de véhicules } \rho(t,x) \in \mathbb{R}, \\ \text{Vitesse des véhicules } v(t,x) \in \mathbb{R} \end{cases}$

Relations entre les inconnues

$\begin{cases} \text{Principe de conservation du nombre de véhicules} \\ \text{Comportement des conducteurs} \Rightarrow \text{loi } \textbf{empirique } v = g(\rho) \end{cases}$

Théorème

La densité ρ et la vitesse v vérifient l'équation aux dérivées partielles

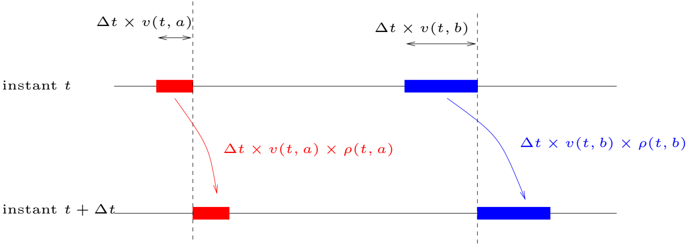
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0.$$

Théorème

La densité ρ et la vitesse v vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0.$$

La démonstration des physiciens



$$\int_a^b \rho(t+\Delta t, x)\,dx = \int_a^b \rho(t,x)\,dx + \Delta t\, v(t,a)\rho(t,a) - \Delta t\, v(t,b)\rho(t,b).$$

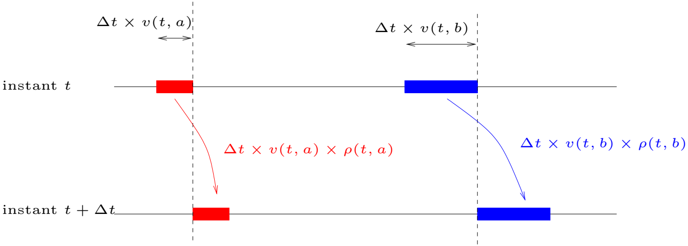
Retour

Théorème

La densité ρ et la vitesse v vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0.$$

La démonstration des physiciens



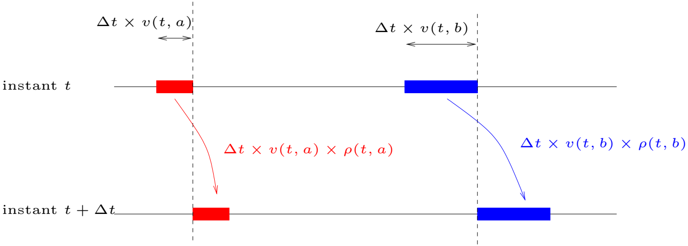
$$\int_a^b \rho(t+\Delta t, x)\,dx = \int_a^b \rho(t,x)\,dx - \Delta t \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(\rho(t,x)v(t,x))\,dx.$$

Théorème

La densité ρ et la vitesse v vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0.$$

La démonstration des physiciens



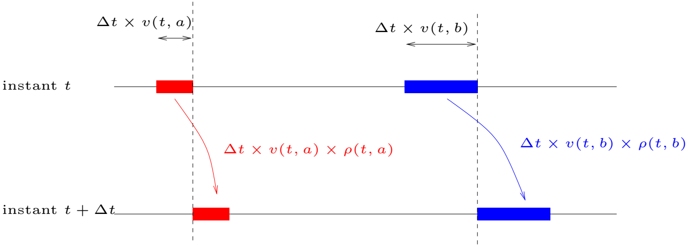
$$\int_a^b \frac{\rho(t+\Delta t,x)-\rho(t,x)}{\Delta t}\,dx + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(\rho(t,x)v(t,x))\,dx = 0.$$

Théorème

La densité ρ et la vitesse v vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0.$$

La démonstration des physiciens



$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x)\,dx + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(\rho(t,x)v(t,x))\,dx = 0.$$

On a obtenu la loi de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0.$$

Il faut lier la densité et la vitesse :

On a obtenu la loi de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0.$$

Il faut lier la densité et la vitesse :

- Modèle 1 : Tous les véhicules roulent à la même vitesse

$$v = \text{constante} = V_{\max} > 0, \quad (= 130\text{km/h dans un monde idéal !}).$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + V_{\max}\frac{\partial}{\partial x}\rho = 0.$$

On a obtenu la loi de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0.$$

Il faut lier la densité et la vitesse :

- Modèle 1 : Tous les véhicules roulent à la même vitesse

$$v = \text{constante} = V_{\max} > 0, \quad (= 130\text{km/h dans un monde idéal !}).$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + V_{\max}\frac{\partial}{\partial x}\rho = 0.$$

- Modèle 2 : La vitesse des véhicules dépend du trafic

$$\text{Loi empirique :} \quad v = V_{\max}(1-\rho).$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + V_{\max}\frac{\partial}{\partial x}(\rho(1-\rho)) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}(v(v-V_{\max})) = 0.$$

On veut étudier l'**équation aux dérivées partielles**

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + V_{\max}\frac{\partial}{\partial x}\rho = 0. \qquad (\star)$$

On se donne une donnée initiale $\rho_0(x)$ et des conditions aux limites périodiques.

Théorème

L'unique solution de (**??**) *est donnée par*

$$\rho(t,x) = \rho_0(x - V_{\max}t).$$

C'est l'EDP non triviale la plus simple du monde !

C'est quoi un schéma numérique ?

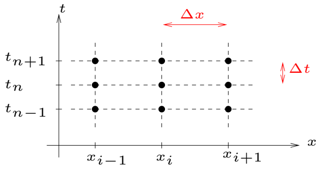
- La fonction $(t,x) \mapsto \rho(t,x)$ vit dans un espace de dimension infinie !

C'est quoi un schéma numérique ?

- La fonction $(t, x) \mapsto \rho(t, x)$ vit dans un espace de dimension infinie !
- Il faut arriver à décrire le phénomène grâce à un nombre fini (mais grand) de réels $\leadsto$ ordinateur.

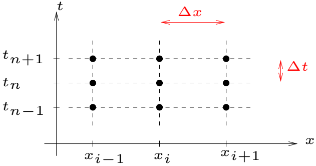
C'est quoi un schéma numérique ?

- La fonction $(t,x) \mapsto \rho(t,x)$ vit dans un espace de dimension infinie !
- Il faut arriver à décrire le phénomène grâce à un nombre fini (mais grand) de réels $\rightsquigarrow$ ordinateur.
- On se donne un **maillage** caractérisé par un pas de temps Δt et un pas d'espace Δx petits.



C'est quoi un schéma numérique ?

- La fonction $(t,x) \mapsto \rho(t,x)$ vit dans un espace de dimension infinie !
- Il faut arriver à décrire le phénomène grâce à un nombre fini (mais grand) de réels $\rightsquigarrow$ ordinateur.
- On se donne un **maillage** caractérisé par un pas de temps Δt et un pas d'espace Δx petits.



- Essayons donc de trouver des relations entre les valeurs $\rho(t_n, x_i)$ à partir de l'EDP.

Idée de base : remplacer les dérivées par des quotients différentiels.

Par exemple : $$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}(t_n, x_i) \approx \dfrac{\rho(t_{n+1}, x_i) - \rho(t_n, x_i)}{\Delta t}, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial x}(t_n, x_i) \approx \dfrac{\rho(t_n, x_{i+1}) - \rho(t_n, x_i)}{\Delta x}. \end{cases}$$

Idée de base : remplacer les dérivées par des quotients différentiels.

- D'après l'équation on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t}(t_n, x_i) + V_{\max} \frac{\partial \rho}{\partial x}(t_n, x_i) \\ &\boxed{\approx} \frac{\rho(t_{n+1}, x_i) - \rho(t_n, x_i)}{\Delta t} + V_{\max} \frac{\rho(t_n, x_{i+1}) - \rho(t_n, x_i)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

IDÉE DE BASE : remplacer les dérivées par des quotients différentiels.

- D'après l'équation on a

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t}(t_n, x_i) + V_{\max} \frac{\partial \rho}{\partial x}(t_n, x_i)$$
$$\boxed{\approx} \; \frac{\rho(t_{n+1}, x_i) - \rho(t_n, x_i)}{\Delta t} + V_{\max} \frac{\rho(t_n, x_{i+1}) - \rho(t_n, x_i)}{\Delta x}.$$

- On **définit** un SCHÉMA comme l'ensemble des relations

$$0 \; \boxed{=} \; \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + V_{\max} \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{\Delta x}, \quad \forall i, \forall n, \tag{SCH}$$

et la donnée initiale

$$\rho_i^0 = \rho_0(x_i), \quad \forall i. \tag{DI}$$

Idée de base : remplacer les dérivées par des quotients différentiels.

- D'après l'équation on a

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t}(t_n, x_i) + V_{\max}\frac{\partial \rho}{\partial x}(t_n, x_i)$$
$$\boxed{\approx} \frac{\rho(t_{n+1}, x_i) - \rho(t_n, x_i)}{\Delta t} + V_{\max}\frac{\rho(t_n, x_{i+1}) - \rho(t_n, x_i)}{\Delta x}.$$

- On **définit** un schéma comme l'ensemble des relations

$$0 \boxed{=} \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + V_{\max}\frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{\Delta x}, \quad \forall i, \forall n, \tag{SCH}$$

et la donnée initiale

$$\rho_i^0 = \rho_0(x_i), \quad \forall i. \tag{DI}$$

- Analyse numérique :
  - Montrer que (**??**)-(**??**) définit de manière unique les $(\rho_i^n)_{i,n}$.
  - Montrer que, si Δt et Δx sont assez petits, on a

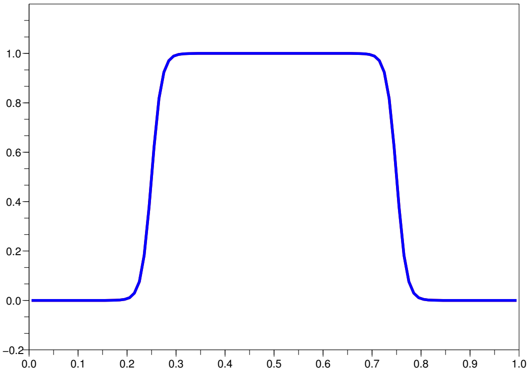
$$\rho_i^n \approx \rho(t_n, x_i).$$

Tout cela a l'air fort simple ... mais la zoologie des schémas est vaste !

Tout cela a l'air fort simple ... mais la zoologie des schémas est vaste !

Schéma décentré amont :

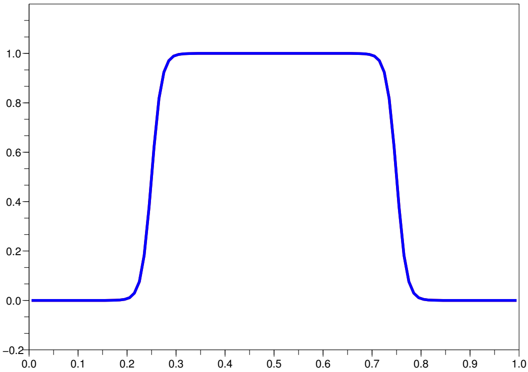
$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + V_{\max} \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$



Tout cela a l'air fort simple ... mais la zoologie des schémas est vaste !

Schéma décentré aval :

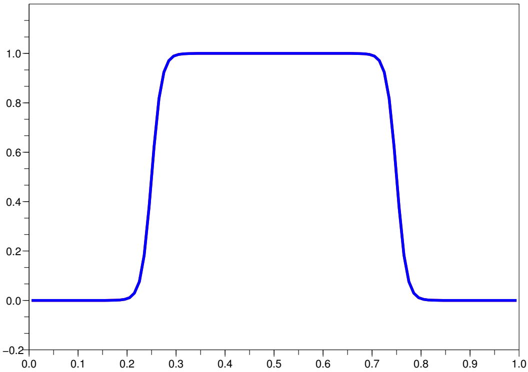
$$\frac{\rho_i^{n+1}-\rho_i^n}{\Delta t}+V_{\max}\frac{\rho_{i+1}^n-\rho_i^n}{\Delta x}=0.$$



Tout cela a l'air fort simple ... mais la zoologie des schémas est vaste !

Schéma centré :

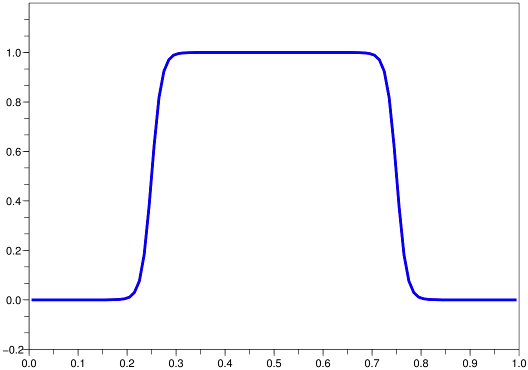
$$\frac{\rho_i^{n+1}-\rho_i^n}{\Delta t}+V_{\max}\frac{\rho_{i+1}^n-\rho_{i-1}^n}{2\Delta x}=0.$$



Tout cela a l'air fort simple ... mais la zoologie des schémas est vaste !

Schéma de Lax-Friedrichs :

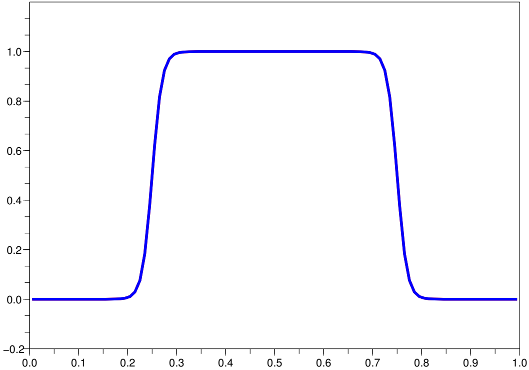
$$\frac{\rho_i^{n+1} - (\rho_{i-1}^n + \rho_{i+1}^n)/2}{\Delta t} + V_{\max} \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$



Tout cela a l'air fort simple ... mais la zoologie des schémas est vaste !

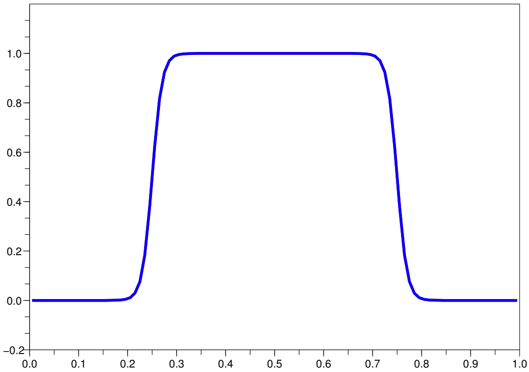
Schéma de Lax-Wendroff :

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + V_{\max} \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n}{2\Delta x} + V_{\max}^2 \Delta t \frac{\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$



Tout cela a l'air fort simple ... mais la zoologie des schémas est vaste !

Schéma à limiteur de flux :



On veut maintenant étudier l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x}(f(v)) = 0, \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases} \qquad (\star)$$

avec

$$f(v) = v \times (v - V_{\max}).$$

Théorème

Il existe (beaucoup !) de données initiales **régulières** v_0 *pour lesquelles* **il ne peut pas exister de solutions régulières** *au problème* (**??**) *pour tout temps* $t > 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v + \dfrac{\partial}{\partial x}(f(v)) = 0, \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

Démonstration

Supposons qu'il existe une solution $v(t,x)$ régulière pour tout $t > 0$.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit une courbe $(t, x(t))$ par l'éq. différentielle

$$x'(t) = f'(v(t, x(t))), \ \forall t \quad \text{et} \quad x(0) = x_0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}v + \dfrac{\partial}{\partial x}(f(v)) = 0, \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

Démonstration

Supposons qu'il existe une solution $v(t,x)$ régulière pour tout $t > 0$.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit une courbe $(t, x(t))$ par l'éq. différentielle

$$x'(t) = f'(v(t, x(t))),\ \forall t \quad \text{et} \quad x(0) = x_0.$$

Lemme

La solution v est **constante** *le long de la courbe $(t, x(t))$.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v + \dfrac{\partial}{\partial x}(f(v)) = 0, \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

Démonstration

Supposons qu'il existe une solution $v(t,x)$ régulière pour tout $t > 0$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit une courbe $(t, x(t))$ par l'éq. différentielle

$$x'(t) = f'(v(t, x(t))),\ \forall t \quad \text{et} \quad x(0) = x_0.$$

Lemme

La solution v est **constante** *le long de la courbe $(t, x(t))$.*

En effet, on a

$$\frac{d}{dt}\Big[v(t,x(t))\Big] = \left(\frac{\partial}{\partial t} v\right)(t, x(t)) + x'(t) \left(\frac{\partial}{\partial x} v\right)(t, x(t))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}v + \dfrac{\partial}{\partial x}(f(v)) = 0, \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

Démonstration

Supposons qu'il existe une solution $v(t,x)$ régulière pour tout $t > 0$.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit une courbe $(t, x(t))$ par l'éq. différentielle

$$x'(t) = f'(v(t,x(t))),\ \forall t \quad \text{et} \quad x(0) = x_0.$$

Lemme

La solution v est **constante** *le long de la courbe $(t, x(t))$.*

En effet, on a

$$\frac{d}{dt}\Big[v(t,x(t))\Big] = \left(\frac{\partial}{\partial t}v\right)(t,x(t)) + f'(v(t,x(t)))\left(\frac{\partial}{\partial x}v\right)(t,x(t))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v + \dfrac{\partial}{\partial x}(f(v)) = 0, \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

Démonstration

Supposons qu'il existe une solution $v(t,x)$ régulière pour tout $t > 0$.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit une courbe $(t, x(t))$ par l'éq. différentielle

$$x'(t) = f'(v(t,x(t))), \ \forall t \quad \text{et} \quad x(0) = x_0.$$

Lemme

La solution v est **constante** *le long de la courbe $(t, x(t))$.*

En effet, on a

$$\frac{d}{dt}\Big[v(t,x(t))\Big] = \left(\frac{\partial}{\partial t} v\right)(t,x(t)) + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(v)\right)(t,x(t))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v + \dfrac{\partial}{\partial x}(f(v)) = 0, \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

Démonstration

Supposons qu'il existe une solution $v(t,x)$ régulière pour tout $t > 0$.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit une courbe $(t, x(t))$ par l'éq. différentielle

$$x'(t) = f'(v(t,x(t))), \ \forall t \quad \text{et} \quad x(0) = x_0.$$

Lemme

La solution v est **constante** *le long de la courbe $(t, x(t))$.*

En effet, on a

$$\frac{d}{dt}\Big[v(t,x(t))\Big] = \left(\frac{\partial}{\partial t} v\right)(t,x(t)) + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(v)\right)(t,x(t)) \boxed{= 0.}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v + \dfrac{\partial}{\partial x}(f(v)) = 0, \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

Démonstration

Supposons qu'il existe une solution $v(t,x)$ régulière pour tout $t > 0$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit une courbe $(t, x(t))$ par l'éq. différentielle

$$x'(t) = f'(v(t,x(t))),\ \forall t \quad \text{et} \quad x(0) = x_0.$$

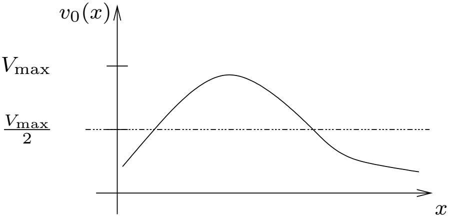
Lemme

La solution v est **constante** *le long de la courbe $(t, x(t))$.*

Ainsi

$$v(t,x(t)) = v(0,x(0)) = v_0(x_0) \implies x'(t) = f'(v_0(x_0))$$

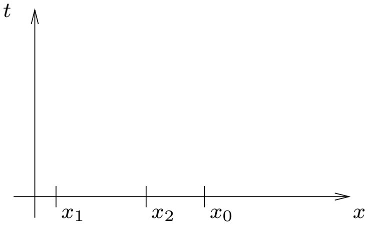
Les courbes $(t, x(t))$ sont donc **des droites de pente** $f'(v_0(x_0))$.



Modèle de trafic routier :

$$f(v) = v(v - V_{\max}),$$

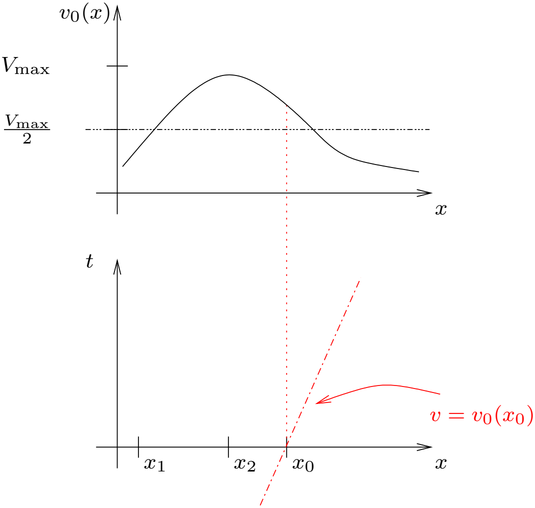
$$f'(v) = 2v - V_{\max}.$$



Modèle de trafic routier :

$$f(v) = v(v - V_{\max}),$$

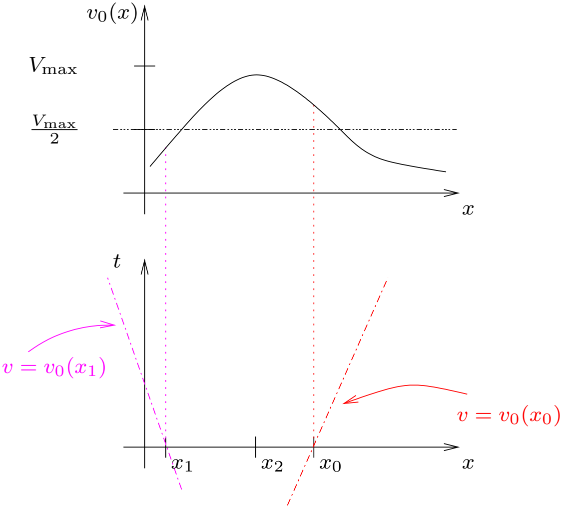
$$f'(v) = 2v - V_{\max}.$$



Modèle de trafic routier :

$$f(v) = v(v - V_{\max}),$$

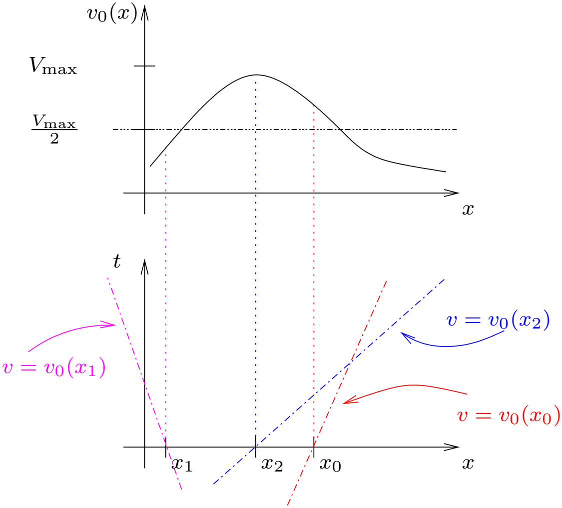
$$f'(v) = 2v - V_{\max}.$$



Modèle de trafic routier :

$$f(v) = v(v - V_{\max}),$$

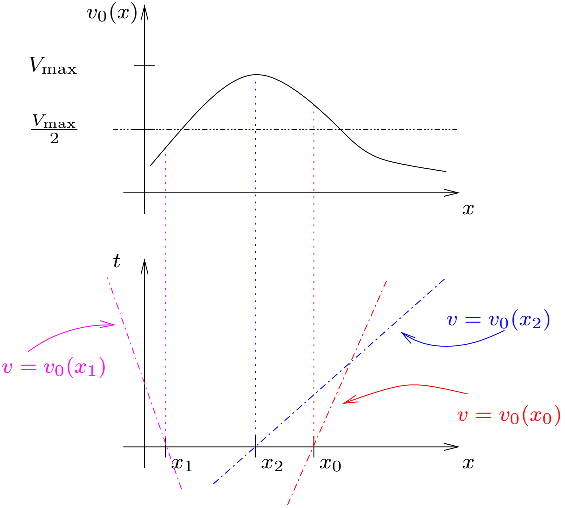
$$f'(v) = 2v - V_{\max}.$$



Modèle de trafic routier :

$$f(v) = v(v - V_{\max}),$$

$$f'(v) = 2v - V_{\max}.$$



Il y a des caractéristiques qui se coupent !

En de tels points la solution ne peut pas être régulière !

Bilan :

- Même pour des données régulières, les solutions au sens classique n'existent pas toujours.

Bilan :

- Même pour des données régulières, les solutions au sens classique n'existent pas toujours.
- Il y a des **discontinuités** dans la solution appelées ***chocs***.

Bilan :

- Même pour des données régulières, les solutions au sens classique n'existent pas toujours.
- Il y a des **discontinuités** dans la solution appelées ***chocs***.
- Problème : en quel sens peut-on dire qu'une fonction qui présente des sauts est solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = 0 \quad ? \qquad (\star)$$

Bilan :

- Même pour des données régulières, les solutions au sens classique n'existent pas toujours.
- Il y a des **discontinuités** dans la solution appelées ***chocs***.
- Problème : en quel sens peut-on dire qu'une fonction qui présente des sauts est solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}f(v) = 0 \quad ? \qquad (\star)$$

A-t'on fait une erreur de modélisation ?

Oui et Non ▸ Come back

Bilan :

- Même pour des données régulières, les solutions au sens classique n'existent pas toujours.
- Il y a des **discontinuités** dans la solution appelées ***chocs***.
- Problème : en quel sens peut-on dire qu'une fonction qui présente des sauts est solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}f(v) = 0 \quad ? \tag{$\star$}$$

Suite de l'aventure, en accéléré ...

- On définit une notion de **solution faible** de (**??**).
  On remarque que les solutions classiques vérifient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}f(v)\right)\varphi(t,x)\,dt\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left(v\frac{\partial}{\partial t}\varphi + f(v)\frac{\partial}{\partial x}\varphi\right)dt\,dx, \end{aligned}$$

pour toute **fonction-test** φ régulière et à support compact.

Bilan :

- Même pour des données régulières, les solutions au sens classique n'existent pas toujours.
- Il y a des **discontinuités** dans la solution appelées ***chocs***.
- Problème : en quel sens peut-on dire qu'une fonction qui présente des sauts est solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}f(v) = 0 \quad ? \tag{$\star$}$$

Suite de l'aventure, en accéléré ...

- On définit une notion de **solution faible** de (**??**).
- Problème : il n'y a pas unicité des solutions faibles ...

Bilan :

- Même pour des données régulières, les solutions au sens classique n'existent pas toujours.
- Il y a des **discontinuités** dans la solution appelées ***chocs***.
- Problème : en quel sens peut-on dire qu'une fonction qui présente des sauts est solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}f(v) = 0 \quad ? \tag{$\star$}$$

Suite de l'aventure, en accéléré ...

- On définit une notion de **solution faible** de (**??**).
- Problème : il n'y a pas unicité des solutions faibles ...

A-t'on re-fait une erreur de modélisation ?

Oui et Non ...

On a négligé des phénomènes importants

$$v = g\left(\rho, \epsilon\frac{\partial \rho}{\partial x}\right).$$

Bilan :

- Même pour des données régulières, les solutions au sens classique n'existent pas toujours.
- Il y a des **discontinuités** dans la solution appelées ***chocs***.
- Problème : en quel sens peut-on dire qu'une fonction qui présente des sauts est solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}f(v) = 0 \quad ? \qquad (\star)$$

Suite de l'aventure, en accéléré ...

- On définit une notion de **solution faible** de (**??**).
- Problème : il n'y a pas unicité des solutions faibles ...
- On garde trace de ces nouveaux phénomènes pour étudier (**??**).

Notion de solution faible **entropique**

Bilan :

- Même pour des données régulières, les solutions au sens classique n'existent pas toujours.
- Il y a des **discontinuités** dans la solution appelées ***chocs***.
- Problème : en quel sens peut-on dire qu'une fonction qui présente des sauts est solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}f(v) = 0 \quad ? \qquad (\star)$$

Suite de l'aventure, en accéléré ...

- On définit une notion de **solution faible** de (**??**).
- Problème : il n'y a pas unicité des solutions faibles ...
- On garde trace de ces nouveaux phénomènes pour étudier (**??**).

Notion de solution faible **entropique**

- $\rightsquigarrow$ **existence** et **unicité** des solutions faibles entropiques.

Bilan :

- Même pour des données régulières, les solutions au sens classique n'existent pas toujours.
- Il y a des **discontinuités** dans la solution appelées ***chocs***.
- Problème : en quel sens peut-on dire qu'une fonction qui présente des sauts est solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}f(v) = 0 \quad ? \tag{$\star$}$$

Suite de l'aventure, en accéléré ...

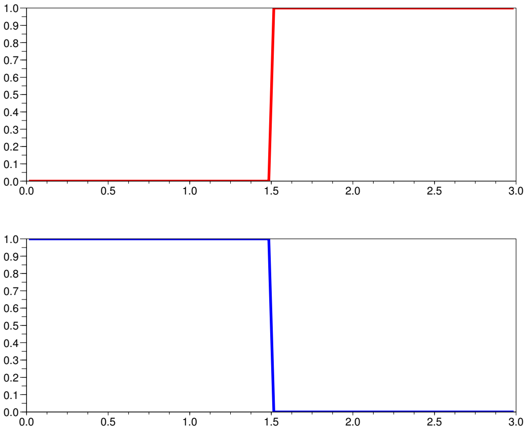
- On définit une notion de **solution faible** de (**??**).
- Problème : il n'y a pas unicité des solutions faibles ...
- On garde trace de ces nouveaux phénomènes pour étudier (**??**).

  Notion de solution faible **entropique**

- $\rightsquigarrow$ **existence** et **unicité** des solutions faibles entropiques.
- Reste le problème de l'approximation numérique ...

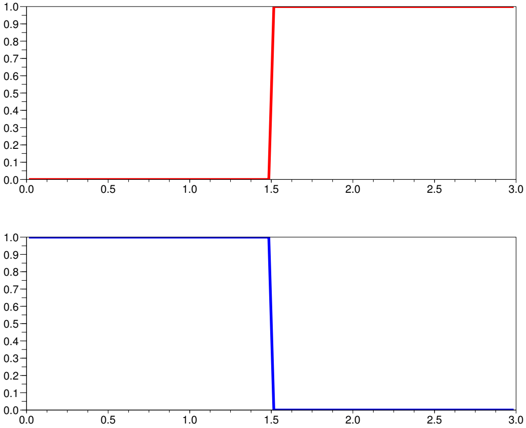
Démarrage à un feu rouge (sur l'autoroute ?!?!)

Schéma de Godunov :



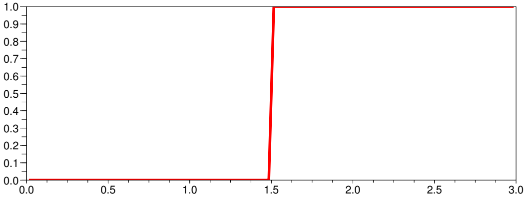
Démarrage à un feu rouge (sur l'autoroute ?!?!)

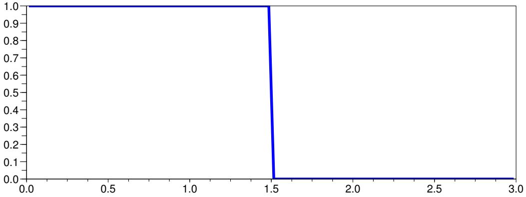
Schéma de Lax-Friedrichs :



Démarrage à un feu rouge (sur l'autoroute ?!?!)

Schéma non-conservatif :

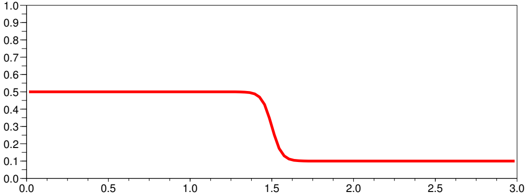


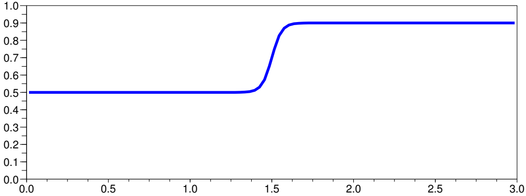


Propagation d'un choc

Schéma de Godunov :

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \frac{f(v_i^n) - f(v_{i-1}^n)}{\Delta x} = 0.$$

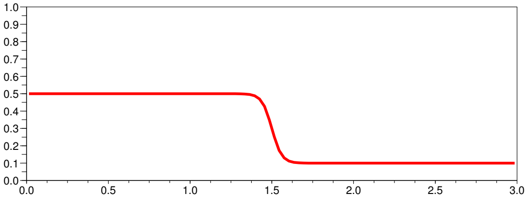


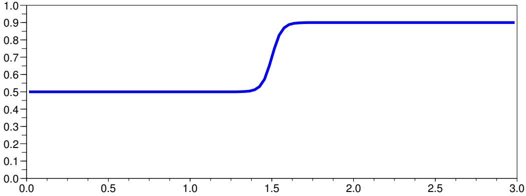


Propagation d'un choc

Schéma non conservatif décentré amont :

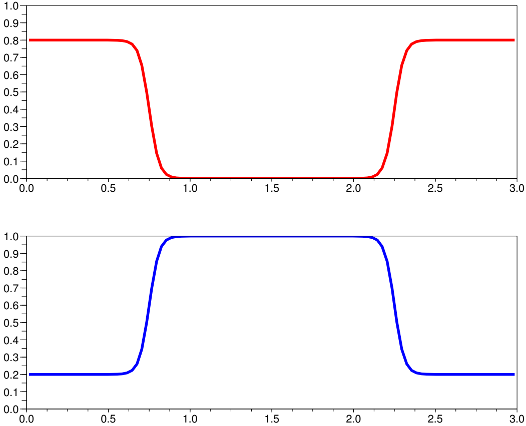
$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + f'(v_i^n)\frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$





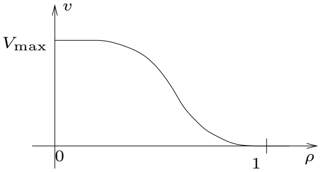
Un bouchon au milieu de l'autoroute

Schéma de Godunov :

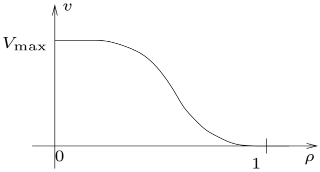


Des raffinements du modèle

- Affiner la loi $v = f(\rho)$ qui doit plutôt ressembler à



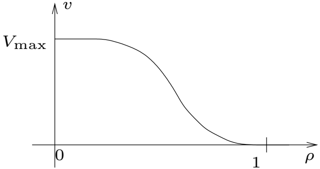
- Affiner la loi $v = f(\rho)$ qui doit plutôt ressembler à



- Prise en compte des entrées et les sorties

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = \text{Termes sources ponctuels.}$$

- Affiner la loi $v = f(\rho)$ qui doit plutôt ressembler à



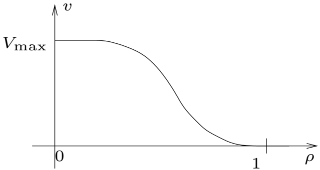
- Prise en compte des entrées et les sorties

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = \text{Termes sources ponctuels.}$$

- Prise en compte des variations de condition de circulation (nb de voies, $V_{\max}$ variables)

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) f(v) \right) = 0.$$

- Affiner la loi $v = f(\rho)$ qui doit plutôt ressembler à



- Prise en compte des entrées et les sorties

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = \text{Termes sources ponctuels.}$$

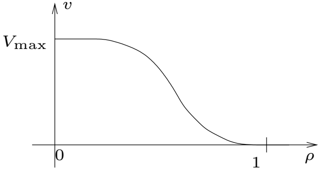
- Prise en compte des variations de condition de circulation (nb de voies, $V_{\max}$ variables)

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) f(v)\right) = 0.$$

- Prise en compte de péages (autre échelle ...).

Des raffinements du modèle

- Affiner la loi $v = f(\rho)$ qui doit plutôt ressembler à



- Prise en compte des entrées et les sorties

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = \text{Termes sources ponctuels.}$$

- Prise en compte des variations de condition de circulation (nb de voies, $V_{\max}$ variables)

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) f(v)\right) = 0.$$

- Prise en compte de péages (autre échelle ...).
- Jonctions d'autoroutes (couplage de deux modèles ...).

Conclusions

Modèles de trafic routier

Bien que très *simplistes*, on peut rendre compte de :

- "Démarrages à un feu".
- Création, propagation et dissipation des bouchons.

Conclusions

Modèles de trafic routier

Bien que très *simplistes*, on peut rendre compte de :

- "Démarrages à un feu".
- Création, propagation et dissipation des bouchons.

Difficultés de la démarche

- dans la modélisation :
    - Choix d'une échelle.
    - Choix d'une représentation du système.
    - Calibration des lois empiriques et des paramètres.

Conclusions

Modèles de trafic routier

Bien que très *simplistes*, on peut rendre compte de :

- "Démarrages à un feu".
- Création, propagation et dissipation des bouchons.

Difficultés de la démarche

- dans la modélisation :
  - Choix d'une échelle.
  - Choix d'une représentation du système.
  - Calibration des lois empiriques et des paramètres.
- dans l'analyse :
  - La notion classique de solution d'une EDP n'est pas adaptée.
  - Notion de solution faible.
  - Nécessité d'un critère (qui provient du phénomène étudié !) pour avoir unicité.

Conclusions

Modèles de trafic routier

Bien que très *simplistes*, on peut rendre compte de :

- "Démarrages à un feu".
- Création, propagation et dissipation des bouchons.

Difficultés de la démarche

- dans la modélisation :
  - Choix d'une échelle.
  - Choix d'une représentation du système.
  - Calibration des lois empiriques et des paramètres.
- dans l'analyse :
  - La notion classique de solution d'une EDP n'est pas adaptée.
  - Notion de solution faible.
  - Nécessité d'un critère (qui provient du phénomène étudié !) pour avoir unicité.
- dans l'approximation numérique :
  - Phénomènes de stabilité / instabilité.
  - Le schéma peut approcher une *mauvaise solution*.
  - Il faut pouvoir avoir confiance dans le schéma !