A propos de l'équation de transport

Problèmes de traces - Régularité des solutions

F. Boyer

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
CNRS / Université de Provence

Grenoble, 10 Février 2005

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Méthode des caractéristiques dans $\mathbb{R}^d$

Equation de transport dans $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}^d, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{1}$$

avec

$$v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \ \text{ Lipschitzien borné, et } \ \operatorname{div} v = 0.$$

Méthode des caractéristiques dans $\mathbb{R}^d$

Equation de transport dans $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{1}$$

avec

$$v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \quad \text{Lipschitzien borné, et} \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds} Z(s,t,x) = v(s, Z(s,t,x)), \\ Z(t,t,x) = x. \end{cases}$$

Méthode des caractéristiques dans $\mathbb{R}^d$

Equation de transport dans $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{1}$$

avec

$$v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \;\text{ Lipschitzien borné, et }\; \operatorname{div} v = 0.$$

Courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds} Z(s,t,x) = v(s, Z(s,t,x)), \\ Z(t,t,x) = x. \end{cases}$$

Proposition

Si ρ_0 est régulière, l'unique solution régulière de (1) est

$$\rho(t,x) = \rho_0(Z(0,t,x)).$$

Méthode des caractéristiques dans Ω

Equation de transport dans Ω ouvert borné régulier :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{2}$$

avec un champ de vecteurs tangent

$$v : \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d \ \text{ Lip., borné,} \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{et } v \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Méthode des caractéristiques dans Ω

Equation de transport dans Ω ouvert borné régulier :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \ \ \text{dans } \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{2}$$

avec un champ de vecteurs tangent

$$v : \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d \ \text{ Lip., borné,} \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{et } v \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Les courbes caractéristiques sont bien définies et restent dans Ω

$$Z(s,t,x) \in \Omega, \quad \forall t, s, \ \forall x \in \Omega.$$

Méthode des caractéristiques dans Ω

Equation de transport dans Ω ouvert borné régulier :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{2}$$

avec un champ de vecteurs tangent

$$v : \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d \ \text{ Lip., borné,} \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{et } v \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Les courbes caractéristiques sont bien définies et restent dans Ω

$$Z(s, t, x) \in \Omega, \quad \forall t, s, \ \forall x \in \Omega.$$

Proposition

Si ρ_0 est régulière, l'unique solution régulière de (2) est

$$\rho(t, x) = \rho_0(Z(0, t, x)).$$

Données moins régulières

Données moins régulières

Ecoulement d'un fluide non-homogène incompressible

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - 2 \operatorname{div}(\mu(\rho) D(v)) + \nabla p = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Données moins régulières

Ecoulement d'un fluide non-homogène incompressible

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - 2 \operatorname{div}(\mu(\rho) D(v)) + \nabla p = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Mélange de deux fluides non miscibles :

$$\rho_0(x) \in \{\rho_{\text{fluide1}}, \rho_{\text{fluide2}}\}.$$

$\hookrightarrow$ Nécessité de prendre en compte les données initiales peu régulières.

Données moins régulières

Ecoulement d'un fluide non-homogène incompressible

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - 2\operatorname{div}(\mu(\rho)D(v)) + \nabla p = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Mélange de deux fluides non miscibles :

$$\rho_0(x) \in \{\rho_{\text{fluide1}}, \rho_{\text{fluide2}}\}.$$

  $\hookrightarrow$ Nécessité de prendre en compte les données initiales peu régulières.

- On peut espérer au mieux :

$$v \in L^2(]0,T[, (H_0^1(\Omega))^d),$$

  et certainement pas Lipschitzien.

Solutions faibles

Définition (Solutions faibles)

Soient $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, *on dit que* $\rho \in L^\infty(]0, T[, L^p(\Omega))$ *est solution faible si*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho \left(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi\right) \, dt \, dx + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0) = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c([0, T[\times \overline{\Omega})$.

Solutions faibles

Définition (Solutions faibles)

Soient $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, *on dit que* $\rho \in L^\infty(]0, T[, L^p(\Omega))$ *est solution faible si*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho \left(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi\right) \, dt \, dx + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0) = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0, T[\times \overline{\Omega})$.

Proposition

Soient $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, v *Lipschitzien*, $\operatorname{div} v = 0$ *et* $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$. *La fonction*

$$\rho(t, x) = \rho_0(Z(0, t, x)),$$

est une solution faible de l'équation de transport.

Solutions faibles

Définition (Solutions faibles)

Soient $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, *on dit que* $\rho \in L^\infty(]0, T[, L^p(\Omega))$ *est solution faible si*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho \left(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi\right) \, dt \, dx + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0) = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0, T[\times \overline{\Omega})$.

Théorème

Soient $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $v \in L^1(]0, T[, (L^{p'}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ *et* $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$.
Il existe au moins une solution faible de l'équation de transport.

Unicité des solutions faibles

Méthode des solutions renormalisées :

- **R.J. Di Perna, P.L. Lions**, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math (1989).

Unicité des solutions faibles

Méthode des solutions renormalisées :

- **R.J. Di Perna, P.L. Lions**, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math (1989).

Théorème (Renormalisation)

Soient $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,p'}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ *et* $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ *sur* $\partial\Omega$. *Soit* $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *telle que*

$$|\beta'(x)| \leq C(1+|x|^r), \quad r < \min(p/d, p-1).$$

Pour toute solution faible $\rho \in L^\infty(]0,T[,L^p(\Omega))$ *pour la donnée* ρ_0 $\beta(\rho)$ *est solution faible pour la donnée initiale* $\beta(\rho_0)$.

Il s'agit de justifier le calcul formel suivant

$$\partial_t\beta(\rho) + v\cdot\nabla\beta(\rho) = \beta'(\rho)(\partial_t\rho + v\cdot\nabla\rho) = 0.$$

Unicité des solutions faibles

Méthode des solutions renormalisées :

- **R.J. Di Perna, P.L. Lions**, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math (1989).

Théorème (Renormalisation)

Soient $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,p'}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ *et* $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ *sur* $\partial\Omega$. *Soit* $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *telle que*

$$|\beta'(x)| \leq C(1 + |x|^r), \quad r < \min\left(p/d, p-1\right).$$

Pour toute solution faible $\rho \in L^\infty(]0,T[,L^p(\Omega))$ *pour la donnée* ρ_0 $\beta(\rho)$ *est solution faible pour la donnée initiale* $\beta(\rho_0)$.

Corollaire (Unicité et régularité en temps)

La solution faible ρ *pour la donnée* ρ_0 *est unique et de plus*

$$\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^q(\Omega)), \quad \forall\, q \text{ fini tel que } q \leq p, \quad \text{et} \quad \rho(0) = \rho_0.$$

Unicité des solutions faibles

Méthode des solutions renormalisées :

- **R.J. Di Perna, P.L. Lions**, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math (1989).

  Article fondateur de la théorie des solutions renormalisées. Application à l'étude des équations différentielles avec champ de vecteurs peu régulier.

- **B. Desjardins**, *A few remarks on ordinary differential equations*, CPDE (1996).

  Hypothèses plus générales, notamment sur la divergence de v.

- **L. Ambrosio**, *Transport equations and Cauchy problem for BV vector fields*, Invent. Math. (2004).

  Cas des solutions $L^\infty(\Omega)$ avec $v \in L^1(]0,T[,(BV(\mathbb{R}^d))^d)$.

Notations

On se donne un ouvert borné régulier Ω

On note pour $\xi > 0$ assez petit (disons $\xi < \xi_\Omega$)

$$\mathcal{O}_\xi = \{x \in \Omega,\ d(x, \Gamma) < \xi\},$$

$$\Gamma_\xi = \{x \in \overline{\Omega},\ d(x, \Gamma) = \xi\},$$

$$\Omega_\xi = \{x \in \Omega,\ d(x, \Gamma) > \xi\}.$$

Notations

On se donne un ouvert borné régulier Ω

On note pour $\xi > 0$ assez petit (disons $\xi < \xi_\Omega$)

$$\mathcal{O}_\xi = \{x \in \Omega,\ d(x,\Gamma) < \xi\},$$

$$\Gamma_\xi = \{x \in \overline{\Omega},\ d(x,\Gamma) = \xi\},$$

$$\Omega_\xi = \{x \in \Omega,\ d(x,\Gamma) > \xi\}.$$

On prolonge la normale près du bord par

$$\boldsymbol{n}(x) = -\nabla d(\cdot,\Gamma).$$

Notations

On se donne un ouvert borné régulier Ω

On note pour $\xi > 0$ assez petit (disons $\xi < \xi_\Omega$)

$$\mathcal{O}_\xi = \{x \in \Omega,\ d(x,\Gamma) < \xi\},$$

$$\Gamma_\xi = \{x \in \overline{\Omega},\ d(x,\Gamma) = \xi\},$$

$$\Omega_\xi = \{x \in \Omega,\ d(x,\Gamma) > \xi\}.$$

On prolonge la normale près du bord par

$$\boldsymbol{n}(x) = -\nabla d(\cdot,\Gamma).$$

Coordonnées normales et tangentielles près du bord de Ω

$$x \in \mathcal{O}_\xi \longrightarrow (P_\Gamma(x), d(x,\Gamma)) \in \Gamma\times]0,\xi[,$$

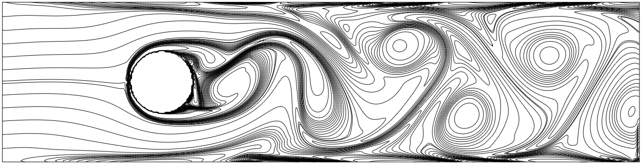
$$\sigma - s\boldsymbol{n}(\sigma) \in \mathcal{O}_\xi \longleftarrow (\sigma, s) \in \Gamma\times]0,\xi[.$$

Plan

Pourquoi des traces ?

Pourquoi des traces ?

Ecoulement d'un fluide non-homogène derrière un cylindre :



$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - 2\operatorname{div}(\mu(\rho) D(v)) + \nabla p = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v = v_e, \quad \text{en entrée} \\ \rho = \rho_e, \ \text{en entrée là où } v_e \cdot \boldsymbol{n} < 0. \\ + \text{ CL sur } v \text{ et } \rho \text{ à déterminer en sortie (B.-Fabrie 2005)} \end{cases}$$

Equation de transport
avec champ de vecteur non-tangent

Pour traiter ce problème on commence par étudier l'équation

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \;\; \text{dans } \Omega \tag{3}$$

avec un champ de vecteurs non-nécessairement tangent, par exemple

$$v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d), \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{et } v \cdot \boldsymbol{n} \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Equation de transport

avec champ de vecteur non-tangent

Pour traiter ce problème on commence par étudier l'équation

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{3}$$

avec un champ de vecteurs non-nécessairement tangent, par exemple

$$v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d), \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{et } v \cdot \boldsymbol{n} \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Problèmes à résoudre :

- Peut-on donner un sens aux traces sur $\Gamma = \partial\Omega$ des solutions faibles de (3) ?

Equation de transport

avec champ de vecteur non-tangent

Pour traiter ce problème on commence par étudier l'équation

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{3}$$

avec un champ de vecteurs non-nécessairement tangent, par exemple

$$v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d), \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{et } v \cdot \boldsymbol{n} \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Problèmes à résoudre :

- Peut-on donner un sens aux traces sur $\Gamma = \partial\Omega$ des solutions faibles de (3) ?
- Quel est le bon espace de traces ?

Equation de transport

avec champ de vecteur non-tangent

Pour traiter ce problème on commence par étudier l'équation

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \ \text{ dans } \Omega \tag{3}$$

avec un champ de vecteurs non-nécessairement tangent, par exemple

$$v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d), \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{et } v \cdot \boldsymbol{n} \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Problèmes à résoudre :

- Peut-on donner un sens aux traces sur $\Gamma = \partial\Omega$ des solutions faibles de (3) ?
- Quel est le bon espace de traces ?
- Peut-on résoudre le problème de Cauchy-Dirichlet avec donnée au bord là où le champ v est entrant ?

Equation de transport
avec champ de vecteur non-tangent

Pour traiter ce problème on commence par étudier l'équation

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{3}$$

avec un champ de vecteurs non-nécessairement tangent, par exemple

$$v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d), \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{et } v \cdot \boldsymbol{n} \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Problèmes à résoudre :

- Peut-on donner un sens aux traces sur $\Gamma = \partial\Omega$ des solutions faibles de (3) ?
- Quel est le bon espace de traces ?
- Peut-on résoudre le problème de Cauchy-Dirichlet avec donnée au bord là où le champ v est entrant ?

Notation : mesures sur $]0,T[\times\Gamma$

$$d\mu_v = (v \cdot \boldsymbol{n})\, d\sigma\, dt, \quad |d\mu_v| = |v \cdot \boldsymbol{n}|\, d\sigma\, dt,$$

$$d\mu_v = d\mu_v^+ - d\mu_v^-, \quad |d\mu_v| = d\mu_v^+ + d\mu_v^-.$$

Eléments de bibliographie

- **C. Bardos**, *Problème aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximations ; application à l'équation de transport*, Ann. ENS (1970).
  $\rightarrow$ Cas d'un champ $v(x)$ Lipschitzien par la méthode des caractéristiques et une approche semi-groupes.
- **M. Cessenat**, *Théorèmes de traces L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique*, CRAS (1984).
  $\rightarrow$ Théorème et espace de traces pour

$$\partial_t \rho + \xi \cdot \nabla_x \rho = 0, \quad (t, x, \xi) \in]0, T[\times \Omega \times \mathbb{R}^d.$$

- **S. Mischler**, *On the trace problem for the solutions of the Vlasov equation*, CPDE (2000).
  $\rightarrow$ Equation de Vlasov :

$$\partial_t \rho + \xi \cdot \nabla_x \rho + E(t, x) \cdot \nabla_\xi \rho = 0, \quad (t, x, \xi) \in]0, T[\times \Omega \times \mathbb{R}^d.$$

Théorème de traces

- $p \in]1,+\infty]$, $f \in L^1(]0,T[, L^p(\Omega))$, $v \in L^1(]0,T[, (W^{1,p'}(\Omega))^d)$
$$\operatorname{div} v = 0, \quad \text{et} \quad v \cdot \boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma).$$

Théorème de traces

- $p \in]1,+\infty]$, $f \in L^1(]0,T[, L^p(\Omega))$, $v \in L^1(]0,T[, (W^{1,p'}(\Omega))^d)$
  $$\operatorname{div} v = 0, \quad \text{et} \quad v \cdot \boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma).$$
- Soit $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ solution faible de $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = f$.

Théorème de traces

- $p \in]1,+\infty]$, $f \in L^1(]0,T[, L^p(\Omega))$, $v \in L^1(]0,T[, (W^{1,p'}(\Omega))^d)$
  $$\operatorname{div} v = 0, \quad \text{et} \quad v \cdot \boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma).$$
- Soit $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ solution faible de $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = f$.

Théorème (de traces)

1. *ρ est dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^q(\Omega))$, pour tout $1 \leq q < p$.*

Théorème de traces

- $p \in]1,+\infty]$, $f \in L^1(]0,T[, L^p(\Omega))$, $v \in L^1(]0,T[, (W^{1,p'}(\Omega))^d)$
  $\operatorname{div} v = 0, \quad \text{et} \quad v \cdot \boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$.
- Soit $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ solution faible de $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = f$.

Théorème (de traces)

1. *ρ est dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^q(\Omega))$, pour tout $1 \leq q < p$.*
2. *Il existe $\gamma\rho$ mesurable sur $]0,T[\times\Gamma$, unique $|d\mu_v| - p.p.$, telle que $\forall \beta \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \overline{\Omega})$, $\forall t_0, t_1 \in [0,T]$*

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega \beta(\rho)(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi)\, dt\, dx$$
$$+ \int_\Omega \beta(\rho(t_0))\varphi(t_0)\, dx - \int_\Omega \beta(\rho(t_1))\varphi(t_1)\, dx$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_\Gamma \beta(\gamma\rho)\varphi(v \cdot \boldsymbol{n})\, d\sigma\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega \beta'(\rho) f \varphi\, dt\, dx = 0.$$

Théorème de traces

Théorème (de traces)

1. *ρ est dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^q(\Omega))$, pour tout $1 \leq q < p$.*
2. *Il existe $\gamma\rho$ mesurable sur $]0,T[\times\Gamma$, unique $|d\mu_v| - p.p.$, telle que $\forall \beta \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\overline{\Omega})$, $\forall t_0, t_1 \in [0,T]$*

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega \beta(\rho)(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx$$
$$+\int_\Omega \beta(\rho(t_0))\varphi(t_0)\,dx - \int_\Omega \beta(\rho(t_1))\varphi(t_1)\,dx$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_\Gamma \beta(\gamma\rho)\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})\,d\sigma\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega \beta'(\rho)f\varphi\,dt\,dx = 0.$$

ATTENTION : On ne peut pas prendre $\beta(x) = x$ et donc on n'a pas pour l'instant la formulation faible à laquelle on s'attend.

Remarque sur le cas L^∞

$$\rho_{min} = \inf_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x), \quad \rho_{max} = \sup_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x).$$

Soit $\beta \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ positive telle que

$$\beta(s) = 0 \Longleftrightarrow s \in [\rho_{min}, \rho_{max}].$$

Remarque sur le cas L^∞

$$\rho_{min} = \inf_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x), \quad \rho_{max} = \sup_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x).$$

Soit $\beta \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R})$ positive telle que

$$\beta(s) = 0 \Longleftrightarrow s \in [\rho_{min}, \rho_{max}].$$

$$\underbrace{\int_0^T \int_\Omega \beta(\rho)(\partial_t \varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx}_{=0}$$

$$+ \underbrace{\int_\Omega \beta(\rho(0))\varphi(0)\,dx}_{=0} - \underbrace{\int_\Omega \beta(\rho(T))\varphi(T)\,dx}_{=0}$$

$$- \int_0^T \int_\Gamma \beta(\gamma\rho)\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})\,d\sigma\,dt + \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \beta'(\rho) f \varphi\,dt\,dx}_{=0} = 0.$$

Remarque sur le cas L^∞

$$\rho_{min} = \inf_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x), \quad \rho_{max} = \sup_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x).$$

Soit $\beta \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R})$ positive telle que

$$\beta(s) = 0 \Longleftrightarrow s \in [\rho_{min}, \rho_{max}].$$

$$\int_0^T \int_\Gamma \beta(\gamma\rho)\varphi(v\cdot \boldsymbol{n})\, d\sigma\, dt = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\overline{\Omega})$.

Remarque sur le cas L^∞

$$\rho_{min} = \inf_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x), \quad \rho_{max} = \sup_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x).$$

Soit $\beta \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ positive telle que

$$\beta(s) = 0 \Longleftrightarrow s \in [\rho_{min}, \rho_{max}].$$

$$\int_0^T \int_\Gamma \beta(\gamma\rho)\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})\,d\sigma\,dt = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\overline{\Omega})$.

$$\Longrightarrow \beta(\gamma\rho) = 0, \quad |d\mu_v|\text{-presque partout}$$

Remarque sur le cas L^∞

$$\rho_{min} = \inf_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x), \quad \rho_{max} = \sup_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x).$$

Soit $\beta \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R})$ positive telle que

$$\beta(s) = 0 \Longleftrightarrow s \in [\rho_{min}, \rho_{max}].$$

$$\int_0^T \int_\Gamma \beta(\gamma\rho)\varphi(v\cdot \boldsymbol{n})\, d\sigma\, dt = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\overline{\Omega})$.

$$\Longrightarrow \beta(\gamma\rho) = 0, \quad |d\mu_v|\text{-presque partout}$$

$$\Longrightarrow \rho_{min} \leq \gamma\rho \leq \rho_{max}, \quad |d\mu_v|\text{-presque partout}$$

Remarque sur le cas L^∞

$$\rho_{min} = \inf_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x), \quad \rho_{max} = \sup_{]0,T[\times\Omega} \rho(t,x).$$

Soit $\beta \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ positive telle que

$$\beta(s) = 0 \iff s \in [\rho_{min}, \rho_{max}].$$

$$\gamma\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|) \quad \Longleftarrow \text{espace de traces,}$$

et on a la formulation faible

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega \rho(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx$$
$$+ \int_\Omega \rho(t_0)\varphi(t_0)\,dx - \int_\Omega \rho(t_1)\varphi(t_1)\,dx$$
$$- \int_{t_0}^{t_1}\int_\Gamma (\gamma\rho)\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})\,d\sigma\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega f\varphi\,dt\,dx = 0.$$

Principe de la preuve

Régularisation par convolution

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x) \eta\left(\frac{y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{n}(y)}{\varepsilon}\right) dx.$$

Principe de la preuve

Régularisation par convolution

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x) \eta \left(\frac{y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{n}(y)}{\varepsilon} \right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ est solution faible de l'équation de transport alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = f_\varepsilon + R_\varepsilon,$$

Principe de la preuve

Régularisation par convolution

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x) \eta\left(\frac{y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{n}(y)}{\varepsilon}\right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ est solution faible de l'équation de transport alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = f_\varepsilon + R_\varepsilon,$$

- R_ε est dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$ et on a $R_\varepsilon \longrightarrow 0$.

Principe de la preuve

Régularisation par convolution

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x) \eta\left(\frac{y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{n}(y)}{\varepsilon}\right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ est solution faible de l'équation de transport alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = f_\varepsilon + R_\varepsilon,$$

- R_ε est dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$ et on a $R_\varepsilon \longrightarrow 0$.
- ρ_ε est réguliere en espace.

Principe de la preuve

Régularisation par convolution

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x)\eta\left(\frac{y-x-2\varepsilon\boldsymbol{n}(y)}{\varepsilon}\right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ est solution faible de l'équation de transport alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = f_\varepsilon + R_\varepsilon,$$

- R_ε est dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$ et on a $R_\varepsilon \longrightarrow 0$.
- ρ_ε est réguliere en espace.
- $\partial_t \rho_\varepsilon$ est dans L^1 et donc $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

Principe de la preuve

Régularisation par convolution

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x) \eta\left(\frac{y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{n}(y)}{\varepsilon}\right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ est solution faible de l'équation de transport alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = f_\varepsilon + R_\varepsilon,$$

- R_ε est dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$ et on a $R_\varepsilon \longrightarrow 0$.
- ρ_ε est réguliere en espace.
- $\partial_t \rho_\varepsilon$ est dans L^1 et donc $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

1. On montre d'abord que $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

Principe de la preuve

Régularisation par convolution

$\eta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ régulier, à support dans $B(0,1)$ et de masse 1. On pose

$$\rho_\varepsilon(t,y) = \rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_\Omega \rho(t,x) \eta \left(\frac{y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{n}(y)}{\varepsilon} \right) dx.$$

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ est solution faible de l'équation de transport alors on a

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = f_\varepsilon + R_\varepsilon,$$

- R_ε est dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$ et on a $R_\varepsilon \longrightarrow 0$.
- ρ_ε est réguliere en espace.
- $\partial_t \rho_\varepsilon$ est dans L^1 et donc $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

1. On montre d'abord que $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.
2. On montre $\forall \beta \in \mathcal{C}^1_b$ que les traces de $\beta(\rho_\varepsilon)$ sont de Cauchy dans $L^2(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^2)$.

Convergence de ρ_ε 1/3

On soustrait les équations pour ε_1 et ε_2

$$\partial_t(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) + v \cdot \nabla(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) + (f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}).$$

Convergence de ρ_ε 1/3

On soustrait les équations pour ε_1 et ε_2

$$\partial_t(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) + v \cdot \nabla(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) + (f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}).$$

Comme tout le monde est régulier on prend $\beta(s) \sim |s|$ et on a

$$\partial_t\beta(\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2})+v\cdot\nabla\beta(\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}) = \beta'(\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2})\Big[(R_{\varepsilon_1}-R_{\varepsilon_2})+(f_{\varepsilon_1}-f_{\varepsilon_2})\Big].$$

Convergence de ρ_ε 1/3

On soustrait les équations pour ε_1 et ε_2

$$\partial_t(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) + v \cdot \nabla(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) + (f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}).$$

Comme tout le monde est régulier on prend $\beta(s) \sim |s|$ et on a

$$\partial_t\beta(\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2})+v\cdot\nabla\beta(\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}) = \beta'(\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2})\Big[(R_{\varepsilon_1}-R_{\varepsilon_2})+(f_{\varepsilon_1}-f_{\varepsilon_2})\Big].$$

Pour $h > 0$, on pose $\varphi_h(x) = \frac{d(x,\Gamma)}{h}$ pour $d(x,\Gamma) \leq h$ et 1 ailleurs

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi_h\beta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2})\,dx - \int_\Omega \beta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}){\color{red}v \cdot \nabla\varphi_h}\,dx$$
$$= \int_\Omega \beta'(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2})(R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2} + f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2})\varphi_h\,dx,$$

Convergence de ρ_ε 1/3

On soustrait les équations pour ε_1 et ε_2

$$\partial_t(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) + v \cdot \nabla(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) + (f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}).$$

Comme tout le monde est régulier on prend $\beta(s) \sim |s|$ et on a

$$\partial_t\beta(\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2})+v\cdot\nabla\beta(\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}) = \beta'(\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2})\Big[(R_{\varepsilon_1}-R_{\varepsilon_2})+(f_{\varepsilon_1}-f_{\varepsilon_2})\Big].$$

Pour $h > 0$, on pose $\varphi_h(x) = \frac{d(x,\Gamma)}{h}$ pour $d(x,\Gamma) \leq h$ et 1 ailleurs

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi_h\beta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2})\,dx - \int_\Omega \beta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) v \cdot \left(-\frac{1}{h}\right) \boldsymbol{n}\,dx$$
$$= \int_\Omega \beta'(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2})(R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2} + f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2})\varphi_h\,dx,$$

Convergence de ρ_ε 1/3

On soustrait les équations pour ε_1 et ε_2

$$\partial_t(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) + v \cdot \nabla(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) + (f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}).$$

Comme tout le monde est régulier on prend $\beta(s) \sim |s|$ et on a

$$\partial_t\beta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) + v \cdot \nabla\beta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) = \beta'(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2})\Big[(R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) + (f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2})\Big].$$

Pour $h > 0$, on pose $\varphi_h(x) = \frac{d(x,\Gamma)}{h}$ pour $d(x,\Gamma) \leq h$ et 1 ailleurs

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \int_{\Omega_h} \beta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2})\,dx &\leq C\|\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}\|_{L^1_{t,x}} \\ &+ C\|R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}\|_{L^1_{t,x}} + C\|f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}\|_{L^1_{t,x}} \\ &+ \frac{C}{h}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_h} |\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}||v \cdot \boldsymbol{n}|\,dt\,dx.\end{aligned}$$

Convergence de ρ_ε 1/3

On soustrait les équations pour ε_1 et ε_2

$$\partial_t(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) + v \cdot \nabla(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) + (f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}).$$

Comme tout le monde est régulier on prend $\beta(s) \sim |s|$ et on a

$$\partial_t\beta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) + v\cdot\nabla\beta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) = \beta'(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2})\Big[(R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) + (f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2})\Big].$$

Pour $h > 0$, on pose $\varphi_h(x) = \frac{d(x,\Gamma)}{h}$ pour $d(x,\Gamma) \leq h$ et 1 ailleurs

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega |\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}|\,dx \leq C|\mathcal{O}_h|^{\frac{1}{p'}} &+ C\|\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}\|_{L^1_{t,x}} \\ &+ C\|R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}\|_{L^1_{t,x}} + C\|f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}\|_{L^1_{t,x}} \\ &+ \frac{C}{h}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_h} |\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}||v \cdot \boldsymbol{n}|\,dt\,dx.\end{aligned}$$

Convergence de ρ_ε 2/3

Estimons le terme issu du bord

$$\frac{C}{h}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_h}|\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v\cdot\boldsymbol{n}|\,dt\,dx$$
$$\leq \frac{C}{h}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_h}|\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v(t,x)\cdot\boldsymbol{n}-v(t,P_\Gamma x)\cdot\boldsymbol{n}|\,dt\,dx$$
$$+\frac{C}{h}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_h}|\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v(t,P_\Gamma x)\cdot\boldsymbol{n}|\,dt\,dx$$

Convergence de ρ_ε 2/3

Estimons le terme issu du bord

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{h}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_h}|\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v\cdot\boldsymbol{n}|\,dt\,dx\\
&\leq \frac{C}{h}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_h}|\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v(t,x)\cdot\boldsymbol{n}-v(t,P_\Gamma x)\cdot\boldsymbol{n}|\,dt\,dx\\
&\quad+\frac{C}{h}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_h}|\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v(t,P_\Gamma x)\cdot\boldsymbol{n}|\,dt\,dx
\end{aligned}$$

Premier terme :

$$\leq C\|\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}\|_{L^\infty(L^p)}\int_0^T\left(\frac{1}{h}\int_0^h\int_{\Omega_\xi}|\nabla v|^{p'}\,dx\,d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\,dt$$

Convergence de ρ_ε 2/3

Estimons le terme issu du bord

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{h}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_h}|\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v\cdot\boldsymbol{n}|\,dt\,dx\\
&\leq \frac{C}{h}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_h}|\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v(t,x)\cdot\boldsymbol{n}-v(t,P_\Gamma x)\cdot\boldsymbol{n}|\,dt\,dx\\
&\quad+\frac{C}{h}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_h}|\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v(t,P_\Gamma x)\cdot\boldsymbol{n}|\,dt\,dx
\end{aligned}$$

Premier terme :

$$\leq C\int_0^T\left(\frac{1}{h}\int_0^h\int_{\Omega_\xi}|\nabla v|^{p'}\,dx\,d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}dt\xrightarrow[h\to 0]{}0,\ \text{ind. de } \varepsilon_1,\varepsilon_2$$

Convergence de ρ_ε 2/3

Estimons le terme issu du bord

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{h}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_h} |\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v\cdot \boldsymbol{n}|\,dt\,dx \\
&\leq \frac{C}{h}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_h} |\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v(t,x)\cdot \boldsymbol{n} - v(t,P_\Gamma x)\cdot \boldsymbol{n}|\,dt\,dx \\
&\quad + \frac{C}{h}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_h} |\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}||v(t,P_\Gamma x)\cdot \boldsymbol{n}|\,dt\,dx
\end{aligned}$$

Second terme : il existe $\delta > 1$ tq $v\cdot \boldsymbol{n} \in L^\delta(]0,T[,L^{p'}(\Gamma))$

$$\leq \frac{C}{h^{1-\frac{1}{p'}}}\|\rho_{\varepsilon_1}-\rho_{\varepsilon_2}\|_{L^{\delta'}(]0,T[,L^p(\Omega))}\|v\cdot \boldsymbol{n}\|_{L^\delta(]0,T[,L^{p'}(\Gamma))}.$$

Convergence de ρ_ε 3/3

Bilan :

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega |\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}|\,dx$$

$$\leq C|\mathcal{O}_h|^{\frac{1}{p'}} + C\|\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}\|_{L^1_{t,x}}$$

$$+ C\|R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}\|_{L^1_{t,x}} + C\|f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}\|_{L^1_{t,x}}$$

$$+ o(h) + \frac{C}{h^{1-\frac{1}{p'}}}\|\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}\|_{L^{\delta'}(]0,T[,L^p(\Omega))}\|v\cdot \boldsymbol{n}\|_{L^\delta(]0,T[,L^{p'}(\Gamma))}.$$

$$\Longrightarrow (\rho_\varepsilon)_\varepsilon \text{ est de Cauchy dans } \mathcal{C}^0([0,T],L^1(\Omega)).$$

$$\Longrightarrow \rho \ \text{ est dans } \mathcal{C}^0([0,T],L^1(\Omega)).$$

$$\Longrightarrow \rho \ \text{ est dans } \mathcal{C}^0([0,T],L^q(\Omega)), \ \ \forall q < p.$$

Convergence des traces de ρ_ε

Soit $\beta \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R})$, et ψ à support compact en temps

$$\begin{aligned}\partial_t(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})) &+ v \cdot \nabla(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})) \\ &= \beta'(\rho_{\varepsilon_1})(R_{\varepsilon_1} + f_{\varepsilon_1}) - \beta'(\rho_{\varepsilon_2})(R_{\varepsilon_2} + f_{\varepsilon_2}).\end{aligned}$$

Convergence des traces de ρ_ε

Soit $\beta \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$, et ψ à support compact en temps

$$\partial_t(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})) + v \cdot \nabla(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})) \\ = \beta'(\rho_{\varepsilon_1})(R_{\varepsilon_1} + f_{\varepsilon_1}) - \beta'(\rho_{\varepsilon_2})(R_{\varepsilon_2} + f_{\varepsilon_2}).$$

On prend $(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2}))\psi$ comme fonction test $(\psi(0) = \psi(T) = 0)$

$$\int_0^T \int_\Gamma |\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})|^2 \psi(v \cdot \boldsymbol{n})\, dt\, d\sigma =$$
$$\int_0^T \int_\Omega |\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})|^2 (\partial_t \psi + v \cdot \nabla\psi)\, dt\, dx$$
$$+ 2\int_0^T \int_\Omega (\beta'(\rho_{\varepsilon_1})(R_{\varepsilon_1} + f_{\varepsilon_1}) - \beta'(\rho_{\varepsilon_2})(R_{\varepsilon_2} + f_{\varepsilon_2}))(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2}))\psi\, dt\, dx.$$

Convergence des traces de ρ_ε

Soit $\beta \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$, et ψ à support compact en temps

$$\partial_t(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})) + v \cdot \nabla(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})) \\ = \beta'(\rho_{\varepsilon_1})(R_{\varepsilon_1} + f_{\varepsilon_1}) - \beta'(\rho_{\varepsilon_2})(R_{\varepsilon_2} + f_{\varepsilon_2}).$$

On prend $(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2}))\psi$ comme fonction test ($\psi(0) = \psi(T) = 0$)

$$\int_0^T \int_\Gamma |\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})|^2 \psi(v \cdot \boldsymbol{n})\, dt\, d\sigma = \\ \int_0^T \int_\Omega |\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})|^2 (\partial_t \psi + v \cdot \nabla\psi)\, dt\, dx \\ + 2\int_0^T \int_\Omega (\beta'(\rho_{\varepsilon_1})(R_{\varepsilon_1} + f_{\varepsilon_1}) - \beta'(\rho_{\varepsilon_2})(R_{\varepsilon_2} + f_{\varepsilon_2}))(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2}))\psi\, dt\, dx.$$

On voudrait prendre $\psi = v \cdot \boldsymbol{n}$ mais on ne peut pas à cause de la dérivée en temps !
Soit $g_n \in \mathcal{C}_c^1(]0,T[, H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))$ qui converge vers $v \cdot \boldsymbol{n}$ dans $L^2(]0,T[\times\Gamma)$

Convergence des traces de ρ_ε

Soit $\beta \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R})$, et ψ à support compact en temps

$$\partial_t(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})) + v \cdot \nabla(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})) \\ = \beta'(\rho_{\varepsilon_1})(R_{\varepsilon_1} + f_{\varepsilon_1}) - \beta'(\rho_{\varepsilon_2})(R_{\varepsilon_2} + f_{\varepsilon_2}).$$

Soit $\psi = G_n$ un prolongement de g_n :

$$\int_0^T \int_\Gamma |\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})|^2 |v \cdot \boldsymbol{n}|^2 \, dt \, d\sigma =$$

$$\int_0^T \int_\Gamma |\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})|^2 (v \cdot \boldsymbol{n} - g_n)(v \cdot \boldsymbol{n}) \, dt \, d\sigma$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega |\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})|^2 (\partial_t G_n + v \cdot \nabla G_n) \, dt \, dx$$

$$+ 2 \int_0^T \int_\Omega (\beta'(\rho_{\varepsilon_1})(R_{\varepsilon_1} + f_{\varepsilon_1}) - \beta'(\rho_{\varepsilon_2})(R_{\varepsilon_2} + f_{\varepsilon_2}))(\beta(\rho_{\varepsilon_1}) - \beta(\rho_{\varepsilon_2})) G_n \, dt \, dx$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Enoncé

$f \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega)), v \in L^1(]0,T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ et $v \cdot \boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$.

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Enoncé

$$f \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega)), v \in L^1(]0,T[, (W^{1,1}(\Omega))^d), \operatorname{div} v = 0 \text{ et } v\cdot\boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma).$$

Théorème

- *Pour tout* $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ *et tout* $\rho^e \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^-)$, *il existe* $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *et* $\rho^s \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)$ **uniques** *tels que pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0,T[\times\overline{\Omega})$

$$\int_0^T \int_\Omega \rho(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho_0\varphi(0)\,dx - \int_0^T\int_\Gamma \rho^s\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^+\,d\sigma\,dt$$
$$+ \int_0^T\int_\Gamma \rho^e\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^-\,d\sigma\,dt + \int_0^T\int_\Omega f\varphi\,dt\,dx = 0.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Enoncé

$f \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega)), v \in L^1(]0,T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ et $v \cdot \boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$.

Théorème

- *Pour tout $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ et tout $\rho^e \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^-)$, il existe $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ et $\rho^s \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)$* **uniques** *tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0,T[\times\overline{\Omega})$*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0)\,dx - \int_0^T \int_\Gamma \rho^s \varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^+\,d\sigma\,dt$$
$$+ \int_0^T \int_\Gamma \rho^e \varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^-\,d\sigma\,dt + \int_0^T \int_\Omega f\varphi\,dt\,dx = 0.$$

- **Continuité :** *ρ est dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^q(\Omega))$ pour tout $q < +\infty$.*

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Enoncé

$f \in L^1(]0,T[, L^\infty(\Omega)), v \in L^1(]0,T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ et $v \cdot \boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$.

Théorème

- *Pour tout* $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ *et tout* $\rho^e \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^-)$, *il existe* $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *et* $\rho^s \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)$ **uniques** *tels que pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0,T[\times\overline{\Omega})$

$$\int_0^T \int_\Omega \rho(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho_0\varphi(0)\,dx - \int_0^T \int_\Gamma \rho^s\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^+\,d\sigma\,dt$$
$$+ \int_0^T \int_\Gamma \rho^e\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^-\,d\sigma\,dt + \int_0^T \int_\Omega f\varphi\,dt\,dx = 0.$$

- **Continuité :** ρ *est dans* $\mathcal{C}^0([0,T], L^q(\Omega))$ *pour tout* $q < +\infty$.
- **Renormalisation :** *pour tout* $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, *le couple* $(\beta(\rho), \beta(\rho^s))$ *est l'unique solution pour les données* $(\beta(\rho_0), \beta(\rho^e))$ *et le terme source* $\beta'(\rho)f$.

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Idée de preuve

Existence par approximation parabolique :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho}_\varepsilon + v \cdot \nabla \tilde{\rho}_\varepsilon - \varepsilon \Delta \tilde{\rho}_\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\rho}_\varepsilon(t=0) = \rho_0, & \\ \varepsilon \dfrac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}} + (\tilde{\rho}_\varepsilon - \rho^e)(v \cdot \boldsymbol{n})^- = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Idée de preuve

Existence par approximation parabolique :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho}_\varepsilon + v \cdot \nabla \tilde{\rho}_\varepsilon - \varepsilon \Delta \tilde{\rho}_\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\rho}_\varepsilon(t=0) = \rho_0, & \\ \varepsilon \dfrac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}} + (\tilde{\rho}_\varepsilon - \rho^e)(v \cdot \boldsymbol{n})^- = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lemme (Principe du maximum)

Soient

$$\rho_{min} = \min\left(\inf \rho_0, \inf_{d\mu_v^-} \rho^e\right), \quad \rho_{max} = \max\left(\sup \rho_0, \sup_{d\mu_v^-} \rho^e\right).$$

Pour presque tout $(t,x) \in]0,T[\times\Omega$ *on a*

$$\rho_{min} - \int_0^t \|f(s)\|_\infty \, ds \leq \tilde{\rho}_\varepsilon(t,x) \leq \rho_{max} + \int_0^t \|f(s)\|_\infty \, ds.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Idée de preuve

Existence par approximation parabolique :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho}_\varepsilon + v \cdot \nabla \tilde{\rho}_\varepsilon - \varepsilon \Delta \tilde{\rho}_\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\rho}_\varepsilon(t=0) = \rho_0, & \\ \varepsilon \dfrac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}} + (\tilde{\rho}_\varepsilon - \rho^e)(v \cdot \boldsymbol{n})^- = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lemme (Principe du maximum)

Soient

$$\rho_{min} = \min\left(\inf \rho_0, \inf_{d\mu_v^-} \rho^e\right), \quad \rho_{max} = \max\left(\sup \rho_0, \sup_{d\mu_v^-} \rho^e\right).$$

Pour $d\mu_v^+$-presque tout $(t,\sigma) \in]0,T[\times\Gamma$ on a

$$\rho_{min} - \int_0^t \|f(s)\|_\infty \, ds \leq \tilde{\rho}_\varepsilon(t,\sigma) \leq \rho_{max} + \int_0^t \|f(s)\|_\infty \, ds.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Idée de preuve

Existence par approximation parabolique :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho}_\varepsilon + v \cdot \nabla \tilde{\rho}_\varepsilon - \varepsilon \Delta \tilde{\rho}_\varepsilon = f, \quad \text{dans } \Omega \\ \tilde{\rho}_\varepsilon(t=0) = \rho_0, \\ \varepsilon \dfrac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}} + (\tilde{\rho}_\varepsilon - \rho^e)(v \cdot \boldsymbol{n})^- = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Estimations :

$$\left.\begin{array}{l} \|\tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)} \leq C \\ \|\tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)} \leq C \\ \sqrt{\varepsilon}\|\nabla\tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^2(]0,T[\times\Omega)} \leq C \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{convergences faibles-}\star.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Idée de preuve

Existence par approximation parabolique :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho}_\varepsilon + v \cdot \nabla \tilde{\rho}_\varepsilon - \varepsilon \Delta \tilde{\rho}_\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\rho}_\varepsilon(t=0) = \rho_0, & \\ \varepsilon \dfrac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}} + (\tilde{\rho}_\varepsilon - \rho^e)(v \cdot \boldsymbol{n})^- = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Estimations :

$$\left.\begin{aligned} \|\tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)} &\leq C \\ \|\tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)} &\leq C \\ \sqrt{\varepsilon}\|\nabla\tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^2(]0,T[\times\Omega)} &\leq C \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{convergences faibles-}\star.$$

Passage à la limite immédiat et la trace est :

$$\gamma\rho(v \cdot \boldsymbol{n}) = \rho^s (v \cdot \boldsymbol{n})^+ - \rho^e (v \cdot \boldsymbol{n})^-.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Propriétés

Principe de comparaison

$$\left.\begin{array}{l} \rho_0^1 \leq \rho_0^2, \quad \text{p.p.} \\ f_1 \leq f_2, \quad \text{p.p.} \\ \rho_1^e \leq \rho_2^e, \quad d\mu_v^- \text{-p.p.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \rho_1 \leq \rho_2, \quad \text{p.p.} \\ \rho_1^s \leq \rho_2^s, \quad d\mu_v^+ \text{-p.p.} \end{cases}$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Propriétés

Principe de comparaison

$$\left.\begin{array}{l} \rho_0^1 \leq \rho_0^2, \quad \text{p.p.} \\ f_1 \leq f_2, \quad \text{p.p.} \\ \rho_1^e \leq \rho_2^e, \quad d\mu_v^-\text{-p.p.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho_1 \leq \rho_2, \quad \text{p.p.} \\ \rho_1^s \leq \rho_2^s, \quad d\mu_v^+\text{-p.p.} \end{array}\right.$$

Principe du produit

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t \rho_1 + v \cdot \nabla \rho_1 = f_1 \\ \partial_t \rho_2 + v \cdot \nabla \rho_2 = f_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \partial_t(\rho_1\rho_2) + v \cdot \nabla(\rho_1\rho_2) = \rho_1 f_2 + \rho_2 f_1 \\ \gamma(\rho_1\rho_2) = (\gamma\rho_1)(\gamma\rho_2) \end{array}\right.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^∞

Propriétés

Principe de comparaison

$$\left.\begin{aligned} &\rho_0^1 \leq \rho_0^2, \quad \text{p.p.} \\ &f_1 \leq f_2, \quad \text{p.p.} \\ &\rho_1^e \leq \rho_2^e, \quad d\mu_v^- \text{-p.p.} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} &\rho_1 \leq \rho_2, \quad \text{p.p.} \\ &\rho_1^s \leq \rho_2^s, \quad d\mu_v^+ \text{-p.p.} \end{aligned}\right.$$

Principe du produit

$$\left.\begin{aligned} \partial_t \rho_1 + v \cdot \nabla \rho_1 = f_1 \\ \partial_t \rho_2 + v \cdot \nabla \rho_2 = f_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} &\partial_t(\rho_1\rho_2) + v \cdot \nabla(\rho_1\rho_2) = \rho_1 f_2 + \rho_2 f_1 \\ &\gamma(\rho_1\rho_2) = (\gamma\rho_1)(\gamma\rho_2) \end{aligned}\right.$$

Convergence forte de l'approximation parabolique

Pour tout $p < +\infty$

$$\tilde{\rho}_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \rho, \quad \text{dans } \mathcal{C}^0([0,T], L^p(\Omega)),$$

$$\tilde{\rho}_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \gamma\rho, \quad \text{dans } L^p(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|).$$

Notion de temps de parcours dans Ω

Définition

Notion de temps de parcours dans Ω

Définition

Temps de parcours passé

$$\begin{cases} \partial_t \tau_- + v \cdot \nabla \tau_- = 1, \\ \tau_-(0) = 0, \\ \gamma \tau_- = 0, \text{ là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) < 0. \end{cases}$$

Notion de temps de parcours dans Ω

Définition

Temps de parcours passé

$$\begin{cases} \partial_t \tau_- + v \cdot \nabla \tau_- = 1, \\ \tau_-(0) = 0, \\ \gamma \tau_- = 0, \text{ là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) < 0. \end{cases}$$

Temps de parcours futur

$$\begin{cases} \partial_t \tau_+ + v \cdot \nabla \tau_+ = -1, \\ \tau_+(T) = 0, \\ \gamma \tau_+ = 0, \text{ là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) > 0. \end{cases}$$

Notion de temps de parcours dans Ω

Définition

Temps de parcours passé

$$\begin{cases} \partial_t \tau_- + v \cdot \nabla \tau_- = 1, \\ \tau_-(0) = 0, \\ \gamma \tau_- = 0, \text{ là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) < 0. \end{cases}$$

Temps de parcours futur

$$\begin{cases} \partial_t \tau_+ + v \cdot \nabla \tau_+ = -1, \\ \tau_+(T) = 0, \\ \gamma \tau_+ = 0, \text{ là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) > 0. \end{cases}$$

Temps de parcours total

$$\tau = \tau_+ + \tau_-.$$

Notion de temps de parcours dans Ω

Propriétés - Espace de traces pour $p < +\infty$

Proposition

$$\tau_+(t_0, x) > 0,\ \forall t_0 \in [0, T[,\ \textit{pour presque tout } x \in \Omega,$$

$$\tau_-(t_0, x) > 0,\ \forall t_0 \in]0, T],\ \textit{pour presque tout } x \in \Omega,$$

$$\gamma\tau(t, \sigma) > 0,\ \textit{pour } |d\mu_v|\textit{-presque tout } (t, \sigma) \in]0, T[\times\Gamma.$$

Notion de temps de parcours dans Ω

Propriétés - Espace de traces pour $p < +\infty$

Proposition

$$\tau_+(t_0, x) > 0,\ \forall t_0 \in [0, T[,\ \textit{pour presque tout } x \in \Omega,$$

$$\tau_-(t_0, x) > 0,\ \forall t_0 \in]0, T],\ \textit{pour presque tout } x \in \Omega,$$

$$\gamma\tau(t, \sigma) > 0,\ \textit{pour } |d\mu_v|\textit{-presque tout } (t, \sigma) \in]0, T[\times\Gamma.$$

Théorème (Espace de trace dans le cas L^p)

Si $p < +\infty$ *et* $\rho \in L^\infty(]0, T[, L^p(\Omega))$ *est solution faible de l'équation alors*

$$\gamma\rho \in L^p(]0, T[\times\Gamma, \gamma\tau|d\mu_v|),$$

et

$$\|\gamma\rho\|_{L^p(]0,T[\times\Gamma,\gamma\tau|d\mu_v|)} \leq C\left(\|\rho\|_{L^\infty(]0,T[,L^p(\Omega))} + \|f\|_{L^1(]0,T[,L^p(\Omega))}\right).$$

Estimation de la trace dans le cas L^p

On pose $\varphi = \tau_+ - \tau_-$:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi = 2, \\ \gamma\varphi(v \cdot \boldsymbol{n}) = \gamma\tau |v \cdot \boldsymbol{n}|. \end{cases}$$

Estimation de la trace dans le cas L^p

On pose $\varphi = \tau_+ - \tau_-$:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi = 2, \\ \gamma\varphi(v \cdot \boldsymbol{n}) = \gamma\tau |v \cdot \boldsymbol{n}|. \end{cases}$$

Equation vérifiée par $\beta(\rho)\varphi$, $\beta \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$:

$$\partial_t(\beta(\rho)\varphi) + v \cdot \nabla(\beta(\rho)\varphi) = 2\beta(\rho) + \beta'(\rho) f \varphi.$$

Estimation de la trace dans le cas L^p

On pose $\varphi = \tau_+ - \tau_-$:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi = 2, \\ \gamma\varphi(v \cdot \boldsymbol{n}) = \gamma\tau|v \cdot \boldsymbol{n}|. \end{cases}$$

Equation vérifiée par $\beta(\rho)\varphi$, $\beta \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$:

$$\partial_t(\beta(\rho)\varphi) + v \cdot \nabla(\beta(\rho)\varphi) = 2\beta(\rho) + \beta'(\rho) f \varphi.$$

On intègre cette équation sur $]0, T[\times\Omega$:

$$\int_0^T \int_\Gamma \beta(\gamma\rho)\gamma\varphi(v \cdot \boldsymbol{n})\, d\sigma\, dt = 2\int_0^T \int_\Omega \beta(\rho)\, dx\, dt$$
$$- \int_\Omega \beta(\rho(0))\tau_+(0)\, dx - \int_\Omega \beta(\rho(T))\tau_-(T)\, dx$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \beta'(\rho) f \varphi\, dx\, dt.$$

Estimation de la trace dans le cas L^p

On pose $\varphi = \tau_+ - \tau_-$:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi = 2, \\ \gamma\varphi(v \cdot \boldsymbol{n}) = \gamma\tau |v \cdot \boldsymbol{n}|. \end{cases}$$

Equation vérifiée par $\beta(\rho)\varphi$, $\beta \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$:

$$\partial_t(\beta(\rho)\varphi) + v \cdot \nabla(\beta(\rho)\varphi) = 2\beta(\rho) + \beta'(\rho) f \varphi.$$

On intègre cette équation sur $]0, T[\times\Omega$:

$$\int_0^T \int_\Gamma \beta(\gamma\rho)\gamma\tau|v \cdot \boldsymbol{n}|\, d\sigma\, dt = 2\int_0^T \int_\Omega \beta(\rho)\, dx\, dt$$
$$- \int_\Omega \beta(\rho(0))\tau_+(0)\, dx - \int_\Omega \beta(\rho(T))\tau_-(T)\, dx$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \beta'(\rho) f \varphi\, dx\, dt.$$

Estimation de la trace dans le cas L^p

On pose $\varphi = \tau_+ - \tau_-$:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi = 2, \\ \gamma\varphi(v \cdot \boldsymbol{n}) = \gamma\tau |v \cdot \boldsymbol{n}|. \end{cases}$$

Equation vérifiée par $\beta(\rho)\varphi$, $\beta \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$:

$$\partial_t(\beta(\rho)\varphi) + v \cdot \nabla(\beta(\rho)\varphi) = 2\beta(\rho) + \beta'(\rho) f \varphi.$$

On intègre cette équation sur $]0, T[\times\Omega$:

$$\text{on prend} \quad \beta_n(s) = \frac{|s|^p}{1 + \frac{1}{n}|s|^p},$$

$$\int_0^T \int_\Gamma \beta_n(\gamma\rho)\gamma\tau |v \cdot \boldsymbol{n}| \, d\sigma \, dt$$

$$\leq 2 \int_0^T \int_\Omega \beta_n(\rho) \, dx \, dt + T \int_0^T \int_\Omega |\beta_n'(\rho)||f| \, dx \, dt$$

Estimation de la trace dans le cas L^p

On pose $\varphi = \tau_+ - \tau_-$:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi = 2, \\ \gamma\varphi(v \cdot \boldsymbol{n}) = \gamma\tau |v \cdot \boldsymbol{n}|. \end{cases}$$

Equation vérifiée par $\beta(\rho)\varphi$, $\beta \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$:

$$\partial_t(\beta(\rho)\varphi) + v \cdot \nabla(\beta(\rho)\varphi) = 2\beta(\rho) + \beta'(\rho) f \varphi.$$

On intègre cette équation sur $]0, T[\times\Omega$:

$$\text{on prend} \quad \beta_n(s) = \frac{|s|^p}{1 + \frac{1}{n}|s|^p},$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Gamma \beta_n(\gamma\rho)\gamma\tau |v \cdot \boldsymbol{n}| \, d\sigma \, dt \\ &\leq 2 \int_0^T \int_\Omega \beta_n(\rho) \, dx \, dt + T \int_0^T \int_\Omega |\beta_n'(\rho)||f| \, dx \, dt \\ &\leq C\|\rho\|^p_{L^p(]0,T[\times\Omega)} + C\|\rho\|^{p-1}_{L^\infty(]0,T[,L^p(\Omega))} \|f\|_{L^1(]0,T[,L^p(\Omega))} \end{aligned}$$

Remarque sur l'espace de traces

Cas L^∞ :

$$L^\infty(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|) = L^\infty(]0,T[\times\Gamma, \gamma\tau|d\mu_v|).$$

Remarque sur l'espace de traces

Cas L^∞ :

$$L^\infty(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|) = L^\infty(]0,T[\times\Gamma,\gamma\tau|d\mu_v|).$$

Cas L^p :

En général :

$$L^p(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|) \subsetneq L^p(]0,T[\times,\gamma\tau|d\mu_v|),$$

$$\gamma\rho \notin L^p(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|).$$

Remarque sur l'espace de traces

Cas L^∞ :

$$L^\infty(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|) = L^\infty(]0,T[\times\Gamma,\gamma\tau|d\mu_v|).$$

Cas L^p :

En général :

$$L^p(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|) \subsetneq L^p(]0,T[\times,\gamma\tau|d\mu_v|),$$

$$\gamma\rho \notin L^p(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|).$$

Exemple stationnaire donné par C. Bardos :

$$\Omega =]-1,1[\times]0,1[,\ \ v(x,y) = (-1,x),\ \ \rho(x,y) = \left(y+\frac{x^2}{2}\right)^\alpha,\ \ -\frac{3}{2p} \leq \alpha \leq -\frac{1}{p}.$$

Remarque sur l'espace de traces

Cas L^∞ :

$$L^\infty(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|) = L^\infty(]0,T[\times\Gamma,\gamma\tau|d\mu_v|).$$

Cas L^p :
En général :

$$L^p(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|) \subsetneq L^p(]0,T[\times,\gamma\tau|d\mu_v|),$$

$$\gamma\rho \notin L^p(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|).$$

Exemple stationnaire donné par C. Bardos :

$$\Omega =]-1,1[\times]0,1[,\ \ v(x,y)=(-1,x),\ \ \rho(x,y)=\left(y+\frac{x^2}{2}\right)^\alpha,\ \ -\frac{3}{2p}\leq\alpha\leq-\frac{1}{p}.$$

- On a bien $\rho\in L^p(\Omega)$ et $v\cdot\nabla\rho=0$.

Remarque sur l'espace de traces

Cas L^∞ :

$$L^\infty(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|) = L^\infty(]0,T[\times\Gamma,\gamma\tau|d\mu_v|).$$

Cas L^p :

En général :

$$L^p(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|) \subsetneq L^p(]0,T[\times,\gamma\tau|d\mu_v|),$$

$$\gamma\rho \notin L^p(]0,T[\times\Gamma,|d\mu_v|).$$

Exemple stationnaire donné par C. Bardos :

$$\Omega =]-1,1[\times]0,1[,\ \ v(x,y) = (-1,x),\ \ \rho(x,y) = \left(y+\frac{x^2}{2}\right)^\alpha,\ \ -\frac{3}{2p} \leq \alpha \leq -\frac{1}{p}.$$

- On a bien $\rho \in L^p(\Omega)$ et $v\cdot\nabla\rho = 0$.
- La trace $\gamma\rho = \rho(\cdot,0)$ n'est pas dans $L^p(]-1,1[,|x|\,dx)$.

Remarque sur l'espace de traces

Cas L^∞ :

$$L^\infty(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|) = L^\infty(]0,T[\times\Gamma, \gamma\tau|d\mu_v|).$$

Cas L^p :

En général :

$$L^p(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|) \subsetneq L^p(]0,T[\times, \gamma\tau|d\mu_v|),$$

$$\gamma\rho \notin L^p(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|).$$

Exemple stationnaire donné par C. Bardos :

$$\Omega =]-1,1[\times]0,1[,\;\; v(x,y) = (-1,x),\;\; \rho(x,y) = \left(y + \frac{x^2}{2}\right)^\alpha,\;\; -\frac{3}{2p} \leq \alpha \leq -\frac{1}{p}.$$

- On a bien $\rho \in L^p(\Omega)$ et $v\cdot\nabla\rho = 0$.
- La trace $\gamma\rho = \rho(\cdot,0)$ n'est pas dans $L^p(]-1,1[,|x|\,dx)$.
- On calcule le temps de parcours sur $]-1,1[\times\{0\}$: $\gamma\tau(x) = 2|x|$.

$$\int_{-1}^{1} \rho^p(x,0)|x|^2\,dx < +\infty \Longrightarrow \gamma\rho \in L^p(]-1,1[,\gamma\tau|v\cdot\boldsymbol{n}|\,dx).$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

$f \in L^1(]0,T[,L^p(\Omega)), v \in L^1(]0,T[,(W^{1,p'}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ et $v{\cdot}\boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$.

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

$f \in L^1(]0,T[, L^p(\Omega)), v \in L^1(]0,T[, (W^{1,p'}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ et $v \cdot \boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$.

Théorème

- *Pour tout $\rho_0 \in L^p(\Omega)$ et tout $\rho^e \in L^p(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^-)$, il existe $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ et $\rho^s \in L^p(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)$* **uniques** *tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0,T[\times\overline{\Omega})$*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla\varphi)\, dt\, dx + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0)\, dx - \int_0^T \int_\Gamma \rho^s \varphi (v \cdot \boldsymbol{n})^+ \, d\sigma\, dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Gamma \rho^e \varphi (v \cdot \boldsymbol{n})^- \, d\sigma\, dt + \int_0^T \int_\Omega f\varphi\, dt\, dx = 0.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

$f \in L^1(]0,T[,L^p(\Omega)), v \in L^1(]0,T[,(W^{1,p'}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ et $v \cdot \boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$.

Théorème

- *Pour tout* $\rho_0 \in L^p(\Omega)$ *et tout* $\rho^e \in L^p(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^-)$, *il existe* $\rho \in L^\infty(]0,T[,L^p(\Omega))$ *et* $\rho^s \in L^p(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)$ **uniques** *tels que pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0,T[\times\overline{\Omega})$

$$\int_0^T \int_\Omega \rho(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla\varphi)\, dt\, dx + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0)\, dx - \int_0^T \int_\Gamma \rho^s \varphi (v \cdot \boldsymbol{n})^+ \, d\sigma\, dt$$
$$+ \int_0^T \int_\Gamma \rho^e \varphi (v \cdot \boldsymbol{n})^- \, d\sigma\, dt + \int_0^T \int_\Omega f\varphi\, dt\, dx = 0.$$

- **Continuité :** ρ *est dans* $\mathcal{C}^0([0,T],L^q(\Omega))$ *pour tout* $q \leq p$.

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

$f \in L^1(]0,T[, L^p(\Omega)), v \in L^1(]0,T[, (W^{1,p'}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ et $v\cdot\boldsymbol{n} \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$.

Théorème

- *Pour tout $\rho_0 \in L^p(\Omega)$ et tout $\rho^e \in L^p(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^-)$, il existe $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ et $\rho^s \in L^p(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)$* **uniques** *tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0,T[\times\overline{\Omega})$*

$$\int_0^T\int_\Omega \rho(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho_0\varphi(0)\,dx - \int_0^T\int_\Gamma \rho^s\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^+\,d\sigma\,dt$$
$$+ \int_0^T\int_\Gamma \rho^e\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^-\,d\sigma\,dt + \int_0^T\int_\Omega f\varphi\,dt\,dx = 0.$$

- **Continuité :** *ρ est dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^q(\Omega))$ pour tout $q \leq p$.*
- **Renormalisation :** *pour tout $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, telle que $|\beta(x)| \leq C(1+|x|^\alpha)$, $|\beta'(x)| \leq C(1+|x|^{p-1})$, $\alpha = \min(p, \frac{p}{p+d})$, le couple $(\beta(\rho), \beta(\rho^s))$ est l'unique solution pour les données $(\beta(\rho_0), \beta(\rho^e))$ et le terme source $\beta'(\rho)f$.*

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 1/3

Troncature : $T_n(s) = \min(\max(s, -n), n)$.
On résout le problème avec les données bornées définies par

$$\rho_n^0 = T_n(\rho_0), \quad \rho_n^e = T_n(\rho^e), \quad f_n = T_n(f).$$

On obtient une solution bornée (ρ_n, ρ_n^s).

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 1/3

Troncature : $T_n(s) = \min(\max(s, -n), n)$.
On résout le problème avec les données bornées définies par

$$\rho_n^0 = T_n(\rho_0), \quad \rho_n^e = T_n(\rho^e), \quad f_n = T_n(f).$$

On obtient une solution bornée (ρ_n, ρ_n^s).
Estimation fondamentale :
On utilise la renormalisation avec $\beta(x) = |x|^p$, pour $s \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\rho_n(s)|^p\, dx + \int_0^s \int_\Gamma |\rho_n^s|^p (v \cdot \boldsymbol{n})^+ \, d\sigma\, dt \\ = \int_\Omega |T_n(\rho_0)|^p\, dx + \int_0^s \int_\Gamma |T_n(\rho^e)|^p (v \cdot \boldsymbol{n})^- \, d\sigma\, dt \\ + p\int_0^s \int_\Omega |\rho_n|^{p-2} \rho_n T_n(f)\, dx\, dt.\end{aligned}$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 1/3

Troncature : $T_n(s) = \min(\max(s, -n), n)$.
On résout le problème avec les données bornées définies par

$$\rho_n^0 = T_n(\rho_0), \quad \rho_n^e = T_n(\rho^e), \quad f_n = T_n(f).$$

On obtient une solution bornée (ρ_n, ρ_n^s).
Estimation fondamentale :
On utilise la renormalisation avec $\beta(x) = |x|^p$, pour $s \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\rho_n(s)|^p \, dx + \int_0^s \int_\Gamma |\rho_n^s|^p (v \cdot \boldsymbol{n})^+ \, d\sigma \, dt \\ \leq \int_\Omega |\rho_0|^p \, dx + \int_0^s \int_\Gamma |\rho^e|^p (v \cdot \boldsymbol{n})^- \, d\sigma \, dt \\ + p \int_0^s \|\rho_n(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|f(t)\|_{L^p(\Omega)} \, dt.\end{aligned}$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 1/3

Troncature : $T_n(s) = \min(\max(s, -n), n)$.
On résout le problème avec les données bornées définies par

$$\rho_n^0 = T_n(\rho_0), \quad \rho_n^e = T_n(\rho^e), \quad f_n = T_n(f).$$

On obtient une solution bornée (ρ_n, ρ_n^s).
Estimation fondamentale :
On utilise la renormalisation avec $\beta(x) = |x|^p$, pour $s \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\rho_n(s)|^p \, dx + \int_0^s \int_\Gamma |\rho_n^s|^p (v \cdot \boldsymbol{n})^+ \, d\sigma \, dt \\ \leq \int_\Omega |\rho_0|^p \, dx + \int_0^s \int_\Gamma |\rho^e|^p (v \cdot \boldsymbol{n})^- \, d\sigma \, dt \\ + p \int_0^s \|\rho_n(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|f(t)\|_{L^p(\Omega)} \, dt. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\rho_n\|_{\mathcal{C}^0([0,T], L^p(\Omega))} + \|\rho_n^s\|_{L^p(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)} \leq C.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 1/3

Troncature : $T_n(s) = \min(\max(s, -n), n)$.
On résout le problème avec les données bornées définies par

$$\rho_n^0 = T_n(\rho_0), \quad \rho_n^e = T_n(\rho^e), \quad f_n = T_n(f).$$

On obtient une solution bornée (ρ_n, ρ_n^s).
Estimation fondamentale :
On utilise la renormalisation avec $\beta(x) = |x|^p$, pour $s \in [0, T]$

$$\Rightarrow \|\rho_n\|_{\mathcal{C}^0([0,T],L^p(\Omega))} + \|\rho_n^s\|_{L^p(]0,T[\times\Gamma,d\mu_v^+)} \leq C.$$

$\Rightarrow$ Convergence faible et passage à la limite.

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 1/3

Troncature : $T_n(s) = \min(\max(s, -n), n)$.
On résout le problème avec les données bornées définies par

$$\rho_n^0 = T_n(\rho_0), \quad \rho_n^e = T_n(\rho^e), \quad f_n = T_n(f).$$

On obtient une solution bornée (ρ_n, ρ_n^s).
Estimation fondamentale :
On utilise la renormalisation avec $\beta(x) = |x|^p$, pour $s \in [0, T]$

$$\Rightarrow \|\rho_n\|_{\mathcal{C}^0([0,T],L^p(\Omega))} + \|\rho_n^s\|_{L^p(]0,T[\times\Gamma,d\mu_v^+)} \leq C.$$

$$\Rightarrow \text{Convergence faible et passage à la limite.}$$

La limite faible ρ vérifie l'équation de transport et donc

$$\rho \in \mathcal{C}^0([0, T], L^q(\Omega)), \quad \forall q < p.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 2/3

Identification de la trace :

On a trouvé $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ et $\rho^s \in L^p(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)$ tq

$$\int_0^T \int_\Omega \rho(\partial_t \varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho_0\varphi(0)\,dx$$
$$-\int_0^T \int_\Gamma \rho^s \varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^+\,dt\,d\sigma + \int_0^T \int_\Gamma \rho^e \varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^-\,dt\,d\sigma + \int_0^T\int_\Omega f\varphi\,dt\,dx = 0.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 2/3

Identification de la trace :

On a trouvé $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ et $\rho^s \in L^p(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)$ tq

$$\int_0^T \int_\Omega \rho(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho_0\varphi(0)\,dx$$
$$- \int_0^T \int_\Gamma \rho^s\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^+\,dt\,d\sigma + \int_0^T \int_\Gamma \rho^e\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^-\,dt\,d\sigma + \int_0^T \int_\Omega f\varphi\,dt\,dx = 0.$$

Le théorème de traces donne $\gamma\rho \in L^p(]0,T[\times\Gamma, \gamma\tau|d\mu_v|)$ tq $\forall\beta \in \mathcal{C}_b^1$

$$\int_0^T \int_\Omega \beta(\rho)(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \beta(\rho_0)\varphi(0)\,dx$$
$$- \int_0^T \int_\Gamma \beta(\gamma\rho)\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})\,dt\,d\sigma + \int_0^T \int_\Omega f\varphi\,dt\,dx = 0.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 2/3

Identification de la trace :

On a trouvé $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ et $\rho^s \in L^p(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)$ tq

$$\int_0^T\int_\Omega \rho(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho_0\varphi(0)\,dx$$
$$-\int_0^T\int_\Gamma \rho^s\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^+\,dt\,d\sigma + \int_0^T\int_\Gamma \rho^e\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^-\,dt\,d\sigma + \int_0^T\int_\Omega f\varphi\,dt\,dx = 0.$$

Le théorème de traces donne $\gamma\rho \in L^p(]0,T[\times\Gamma, \gamma\tau|d\mu_v|)$ tq $\forall\beta\in\mathcal{C}_b^1$

$$\int_0^T\int_\Omega \beta(\rho)(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \beta(\rho_0)\varphi(0)\,dx$$
$$-\int_0^T\int_\Gamma \beta(\gamma\rho)\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})\,dt\,d\sigma + \int_0^T\int_\Omega f\varphi\,dt\,dx = 0.$$

Peut-on identifier $\gamma\rho$ en fonction de ρ^e et ρ^s ?

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 3/3

Soit $\beta > 0$ régulière tq $\beta(x) \underset{\infty}{=} 1/|x|$ et $\beta_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\beta(x) \Rightarrow \beta, \beta_2 \in \mathcal{C}_b^1$.

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 3/3

Soit $\beta > 0$ régulière tq $\beta(x) \underset{\infty}{=} 1/|x|$ et $\beta_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\beta(x) \Rightarrow \beta, \beta_2 \in \mathcal{C}_b^1$.

On prend $\varphi = \psi\beta(\rho)$ dans la formulation en ρ^e, ρ^s (**via** $\rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon$)

$$\int_0^T \int_\Omega \rho\beta(\rho)(\partial_t\psi + v \cdot \nabla\psi)\, dt\, dx + \int_\Omega \rho_0\beta(\rho_0)\psi(0)\, dx$$
$$- \int_0^T \int_\Gamma \rho^s\beta(\gamma\rho)\psi(v \cdot \boldsymbol{n})^+\, dt\, d\sigma + \int_0^T \int_\Gamma \rho^e\beta(\gamma\rho)\psi(v \cdot \boldsymbol{n})^-\, dt\, d\sigma$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega f(\beta(\rho) + \rho\beta'(\rho))\psi\, dt\, dx = 0.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 3/3

Soit $\beta > 0$ régulière tq $\beta(x) \underset{\infty}{=} 1/|x|$ et $\beta_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\beta(x) \Rightarrow \beta, \beta_2 \in \mathcal{C}_b^1$.

On prend $\varphi = \psi\beta(\rho)$ dans la formulation en ρ^e, ρ^s (**via** $\rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon$)

$$\int_0^T \int_\Omega \rho\beta(\rho)(\partial_t \psi + v \cdot \nabla\psi)\, dt\, dx + \int_\Omega \rho_0 \beta(\rho_0)\psi(0)\, dx$$
$$- \int_0^T \int_\Gamma \rho^s \beta(\gamma\rho)\psi(v \cdot \boldsymbol{n})^+\, dt\, d\sigma + \int_0^T \int_\Gamma \rho^e \beta(\gamma\rho)\psi(v \cdot \boldsymbol{n})^-\, dt\, d\sigma$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega f(\beta(\rho) + \rho\beta'(\rho))\psi\, dt\, dx = 0.$$

On applique le théorème de traces pour la fonction β_2 :

$$\int_0^T \int_\Omega \rho\beta(\rho)(\partial_t \psi + v \cdot \nabla\psi)\, dt\, dx + \int_\Omega \rho_0 \beta(\rho_0)\psi(0)\, dx$$
$$- \int_0^T \int_\Gamma \gamma\rho\beta(\gamma\rho)\psi(v \cdot \boldsymbol{n})\, dt\, d\sigma + \int_0^T \int_\Omega f(\beta(\rho) + \rho\beta'(\rho))\psi\, dt\, dx = 0.$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 3/3

Soit $\beta > 0$ régulière tq $\beta(x) \underset{\infty}{=} 1/|x|$ et $\beta_2(x) \overset{\text{def}}{=} x\beta(x) \Rightarrow \beta, \beta_2 \in \mathcal{C}_b^1$.

$$\int_0^T \int_\Gamma \rho^s \beta(\gamma\rho)\psi(v\cdot\boldsymbol{n})^+ \,dt\,d\sigma - \int_0^T \int_\Gamma \rho^e \beta(\gamma\rho)\psi(v\cdot\boldsymbol{n})^- \,dt\,d\sigma$$
$$= \int_0^T \int_\Gamma \gamma\rho\beta(\gamma\rho)\psi(v\cdot\boldsymbol{n}) \,dt\,d\sigma$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 3/3

Soit $\beta > 0$ régulière tq $\beta(x) \underset{\infty}{=} 1/|x|$ et $\beta_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\beta(x) \Rightarrow \beta, \beta_2 \in \mathcal{C}_b^1$.

$$\rho^s \beta(\gamma\rho)(v \cdot \boldsymbol{n})^+ - \rho^e \beta(\gamma\rho)(v \cdot \boldsymbol{n})^- = \gamma\rho\beta(\gamma\rho)(v \cdot \boldsymbol{n}).$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 3/3

Soit $\beta > 0$ régulière tq $\beta(x) \underset{\infty}{=} 1/|x|$ et $\beta_2(x) \overset{\text{def}}{=} x\beta(x) \Rightarrow \beta, \beta_2 \in \mathcal{C}_b^1$.

$$\rho^s(v \cdot \boldsymbol{n})^+ - \rho^e(v \cdot \boldsymbol{n})^- = \gamma\rho(v \cdot \boldsymbol{n}).$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 3/3

Soit $\beta > 0$ régulière tq $\beta(x) \underset{\infty}{=} 1/|x|$ et $\beta_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\beta(x) \Rightarrow \beta, \beta_2 \in \mathcal{C}_b^1$.

$$\rho^s(v \cdot \boldsymbol{n})^+ - \rho^e(v \cdot \boldsymbol{n})^- = \gamma\rho(v \cdot \boldsymbol{n}).$$

- La trace $\gamma\rho$ est donc

$$\gamma\rho = \begin{cases} \rho^e, & \text{là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) < 0, \\ \rho^s, & \text{là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) > 0. \end{cases}$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 3/3

Soit $\beta > 0$ régulière tq $\beta(x) \underset{\infty}{=} 1/|x|$ et $\beta_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\beta(x) \Rightarrow \beta, \beta_2 \in \mathcal{C}_b^1$.

$$\rho^s(v \cdot \boldsymbol{n})^+ - \rho^e(v \cdot \boldsymbol{n})^- = \gamma\rho(v \cdot \boldsymbol{n}).$$

- La trace $\gamma\rho$ est donc

$$\gamma\rho = \begin{cases} \rho^e, & \text{là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) < 0, \\ \rho^s, & \text{là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) > 0. \end{cases}$$

- D'où

$$\gamma\rho \in L^p(]0, T[\times\Gamma, |d\mu_v|).$$

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 3/3

Soit $\beta > 0$ régulière tq $\beta(x) \underset{\infty}{=} 1/|x|$ et $\beta_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\beta(x) \Rightarrow \beta, \beta_2 \in \mathcal{C}_b^1$.

$$\rho^s(v \cdot \boldsymbol{n})^+ - \rho^e(v \cdot \boldsymbol{n})^- = \gamma\rho(v \cdot \boldsymbol{n}).$$

- La trace $\gamma\rho$ est donc

$$\gamma\rho = \begin{cases} \rho^e, & \text{là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) < 0, \\ \rho^s, & \text{là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) > 0. \end{cases}$$

- D'où

$$\gamma\rho \in L^p(]0, T[\times\Gamma, |d\mu_v|).$$

- On étend la propriété de renormalisation aux β non bornées.

Problème de Cauchy / Dirichlet : cas L^p

Idée de la preuve 3/3

Soit $\beta > 0$ régulière tq $\beta(x) \underset{\infty}{=} 1/|x|$ et $\beta_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\beta(x) \Rightarrow \beta, \beta_2 \in \mathcal{C}_b^1$.

$$\rho^s (v \cdot \boldsymbol{n})^+ - \rho^e (v \cdot \boldsymbol{n})^- = \gamma\rho(v \cdot \boldsymbol{n}).$$

- La trace $\gamma\rho$ est donc

$$\gamma\rho = \begin{cases} \rho^e, & \text{là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) < 0, \\ \rho^s, & \text{là où } (v \cdot \boldsymbol{n}) > 0. \end{cases}$$

- D'où

$$\gamma\rho \in L^p(]0, T[\times\Gamma, |d\mu_v|).$$

- On étend la propriété de renormalisation aux β non bornées.
- On déduit que $t \mapsto \|\rho(t)\|_{L^p}$ est continue, d'où

$$\rho \in \mathcal{C}^0([0, T], L^p(\Omega)).$$

Plan

Introduction

EXEMPLE :

On se place pour l'instant dans $\Omega = \mathbb{R}^2$.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ à support compact,}$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \text{ avec } \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

Introduction

Exemple :

On se place pour l'instant dans $\Omega = \mathbb{R}^2$.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ à support compact,}$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \text{ avec } \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

Calcul explicite de la solution sans terme source :

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - \Phi(t), y), \text{ avec } \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds.$$

Introduction

Exemple :

On se place pour l'instant dans $\Omega = \mathbb{R}^2$.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \ \text{ à support compact,}$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \text{ avec } \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

Calcul explicite de la solution sans terme source :

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - \Phi(t), y), \text{ avec } \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds.$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\rho(t,x,y) - \rho(t,x_0,y)|\, dt\, dy$$
$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x - \Phi(t), y) - \rho_0(x_0 - \Phi(t), y)|\, dt\, dy$$

Introduction

Exemple :

On se place pour l'instant dans $\Omega = \mathbb{R}^2$.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \ \text{ à support compact,}$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \text{ avec } \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

Calcul explicite de la solution sans terme source :

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - \Phi(t), y), \text{ avec } \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds.$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\rho(t,x,y) - \rho(t,x_0,y)|\, dt\, dy \\ &= \int_0^{\Phi(T)} \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x-\tau,y) - \rho_0(x_0-\tau,y)| \frac{1}{\varphi(\Phi^{-1}(\tau))}\, d\tau\, dy. \end{aligned}$$

Introduction

EXEMPLE :

On se place pour l'instant dans $\Omega = \mathbb{R}^2$.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \ \text{ à support compact,}$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \text{ avec } \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

CALCUL EXPLICITE DE LA SOLUTION SANS TERME SOURCE :

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - \Phi(t), y), \text{ avec } \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds.$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\rho(t,x,y) - \rho(t,x_0,y)|\, dt\, dy$$
$$\leq \frac{1}{\inf \varphi} \int_0^{\Phi(T)} \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x-\tau,y) - \rho_0(x_0-\tau,y)|\, d\tau\, dy.$$

Introduction

Exemple :

On se place pour l'instant dans $\Omega = \mathbb{R}^2$.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \ \text{ à support compact,}$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \ \text{avec } \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

Calcul explicite de la solution sans terme source :

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - \Phi(t), y), \ \text{avec } \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds.$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\rho(t,x,y) - \rho(t,x_0,y)|\,dt\,dy$$

$$\leq \frac{1}{\inf \varphi} \int_0^{\Phi(T)} \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x-\tau,y) - \rho_0(x_0-\tau,y)|\,d\tau\,dy.$$

Continuité des translations dans L^1 :

On déduit que

$$x \mapsto \rho(\cdot, x, \cdot) \in \mathcal{C}^0_x(\mathbb{R}, L^1_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R})).$$

Introduction
Remarques

- Aucune continuité par rapport à y !
  On a seulement continuité dans la direction de v.

Introduction

Remarques

- Aucune continuité par rapport à y !
  On a seulement continuité dans la direction de v.
- Si φ s'annulle sur $]t_0, t_1[$ alors on a

$$\rho(t, x, y) = \rho_0(x - C, y), \quad \forall t \in]t_0, t_1[,$$

et donc il n'y a sûrement pas continuité en x !

Introduction
Remarques

- Aucune continuité par rapport à y !
  On a seulement continuité dans la direction de v.
- Si φ s'annulle sur $]t_0, t_1[$ alors on a

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - C, y), \quad \forall t \in]t_0, t_1[,$$

  et donc il n'y a sûrement pas continuité en x !
- On peut quand même montrer par le calcul précédent que

$$\rho(t,x,y)\varphi(t) \in \mathcal{C}^0_x(\mathbb{R}, L^1_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R})),$$

  autrement dit

$$x \mapsto \rho(\cdot,x,\cdot)(v(\cdot,x,\cdot)\cdot e_x) \in \mathcal{C}^0_x(\mathbb{R}, L^1_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R})).$$

Introduction

Remarques

- Aucune continuité par rapport à y !
  On a seulement continuité dans la direction de v.
- Si φ s'annulle sur $]t_0, t_1[$ alors on a

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - C, y), \quad \forall t \in]t_0, t_1[,$$

  et donc il n'y a sûrement pas continuité en x !
- On peut quand même montrer par le calcul précédent que

$$\rho(t,x,y)\varphi(t) \in \mathcal{C}^0_x(\mathbb{R}, L^1_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R})),$$

  autrement dit

$$x \mapsto \rho(\cdot,x,\cdot)(v(\cdot,x,\cdot)\cdot e_x) \in \mathcal{C}^0_x(\mathbb{R}, L^1_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R})).$$

- Aucune régularité nécessaire sur φ.
  $\Rightarrow$ Aucune régularité en temps nécessaire sur v.

Tentative de preuve

Faisons un calcul formel en supposant $v_1(t,x,y) \geq \alpha > 0$.

L'équation

$$\partial_t \rho + v_1 \partial_x \rho + v_2 \partial_y \rho = f.$$

s'écrit aussi

$$\partial_x(\rho v_1) + \partial_t \left(\frac{1}{v_1}(\rho v_1) \right) + \partial_y \left(\frac{v_2}{v_1}(\rho v_1) \right) = f.$$

Tentative de preuve

Faisons un calcul formel en supposant $v_1(t,x,y) \geq \alpha > 0$.

L'équation

$$\partial_t \rho + v_1 \partial_x \rho + v_2 \partial_y \rho = f.$$

s'écrit aussi

$$\partial_x(\rho v_1) + \partial_t \left(\frac{1}{v_1}(\rho v_1) \right) + \partial_y \left(\frac{v_2}{v_1}(\rho v_1) \right) = f.$$

On prend x comme variable de temps

$$\partial_x R + w_0 \partial_t R + w_2 \partial_y R + cR = f,$$

où

$$R = \rho v_1, \quad w_0 = \frac{1}{v_1}, \; w_2 = \frac{v_2}{v_1}, \; c = \partial_t w_0 + \partial_y w_2.$$

Tentative de preuve

Faisons un calcul formel en supposant $v_1(t,x,y) \geq \alpha > 0$.

L'équation

$$\partial_t \rho + v_1 \partial_x \rho + v_2 \partial_y \rho = f.$$

s'écrit aussi

$$\partial_x(\rho v_1) + \partial_t \left(\frac{1}{v_1}(\rho v_1) \right) + \partial_y \left(\frac{v_2}{v_1}(\rho v_1) \right) = f.$$

On prend x comme variable de temps

$$\partial_x R + w_0 \partial_t R + w_2 \partial_y R + cR = f,$$

où

$$R = \rho v_1, \quad w_0 = \frac{1}{v_1}, \; w_2 = \frac{v_2}{v_1}, \; c = \partial_t w_0 + \partial_y w_2.$$

Peut-on utiliser la théorie de Di Perna - Lions ?

Pour cela, il faut au moins $(w_0, w_2) \in L^1_x(]0,T[, (W^{1,1}_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R}))^d)$.

Cela nécessite de la régularité en temps sur v !

Autre stratégie

Continuité des traces par rapport au domaine

Soit $v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d)$ et ρ solution bornée de $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = f$. Pour $\xi \geq 0$ assez petit, ρ est solution dans Ω_ξ donc possède une trace

$$\gamma_\xi \rho \in L^\infty(]0,T[\times \Gamma_\xi, |d\mu_v|).$$

Autre stratégie

Continuité des traces par rapport au domaine

Soit $v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d)$ et ρ solution bornée de $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = f$. Pour $\xi \geq 0$ assez petit, ρ est solution dans Ω_ξ donc possède une trace

$$\gamma_\xi \rho \in L^\infty(]0,T[\times \Gamma_\xi, |d\mu_v|).$$

On utilise l'isomorphisme naturel entre Γ et Γ_ξ.

Théorème

$$\rho(t,\xi,\sigma)(v(t,\xi,\sigma)\cdot \boldsymbol{n}) = (\gamma_\xi \rho)(t,\sigma)(v(t,\xi,\sigma)\cdot \boldsymbol{n}) \quad \textit{presque partout.}$$

Autre stratégie

Continuité des traces par rapport au domaine

Soit $v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d)$ et ρ solution bornée de $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = f$.
Pour $\xi \geq 0$ assez petit, ρ est solution dans Ω_ξ donc possède une trace

$$\gamma_\xi \rho \in L^\infty(]0,T[\times \Gamma_\xi, |d\mu_v|).$$

On utilise l'isomorphisme naturel entre Γ et Γ_ξ.

Théorème

$\rho(t,\xi,\sigma)(v(t,\xi,\sigma) \cdot \boldsymbol{n}) = (\gamma_\xi \rho)(t,\sigma)(v(t,\xi,\sigma) \cdot \boldsymbol{n})$ *presque partout.*

Théorème

L'application $\xi \mapsto \gamma_\xi \rho\,(v(\cdot,\xi,\cdot) \cdot \boldsymbol{n}) \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$ *est continue.*

Autre stratégie

Continuité des traces par rapport au domaine

Soit $v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d)$ et ρ solution bornée de $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = f$.
Pour $\xi \geq 0$ assez petit, ρ est solution dans Ω_ξ donc possède une trace

$$\gamma_\xi \rho \in L^\infty(]0,T[\times \Gamma_\xi, |d\mu_v|).$$

On utilise l'isomorphisme naturel entre Γ et Γ_ξ.

Théorème

$\rho(t,\xi,\sigma)(v(t,\xi,\sigma)\cdot \boldsymbol{n}) = (\gamma_\xi \rho)(t,\sigma)(v(t,\xi,\sigma)\cdot \boldsymbol{n})$ *presque partout.*

Théorème

L'application $\xi \mapsto \gamma_\xi \rho\, (v(\cdot,\xi,\cdot)\cdot \boldsymbol{n}) \in L^2(]0,T[\times \Gamma)$ *est continue.*

Corollaire

Soit $\Gamma_1 \subset \Gamma$ *tel que* $|v\cdot \boldsymbol{n}| \geq \alpha > 0$ *sur* $]0,T[\times \Gamma_1 \times [0,\xi_0]$. *Alors*

$$\rho \in \mathcal{C}^0_\xi([0,\xi_0], L^p_{t,\sigma}(]0,T[\times \Gamma_1)), \quad \forall p < +\infty.$$

Survol des preuves

Théorème 1 : Identification de la solution et des traces

Soit $h > 0$ assez petit, on pose

$$\psi_h(x) = 1 - \frac{d(x,\Gamma)}{h}, x \in \mathcal{O}_h, \quad \text{et} \quad \psi_h(x) = 0, \quad x \in \Omega_h.$$

Survol des preuves

Théorème 1 : Identification de la solution et des traces

Soit $h > 0$ assez petit, on pose

$$\psi_h(x) = 1 - \frac{d(x, \Gamma)}{h}, x \in \mathcal{O}_h, \quad \text{et} \quad \psi_h(x) = 0, \quad x \in \Omega_h.$$

On prend $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)\psi_h(x)$ comme fonction test dans Ω :

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Gamma \gamma_0 \rho (v \cdot \boldsymbol{n}) \varphi \, dt \, d\sigma = & \frac{1}{h} \int_0^T \int_{\mathcal{O}_h} \rho (v \cdot \boldsymbol{n}) \varphi \, dt dx + \int_0^T \int_{\mathcal{O}_h} f \varphi \psi_h \, dt \, dx \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{O}_h} \rho \psi_h (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi) \, dt \, dx \\ & + \int_{\mathcal{O}_h} \rho(0) \varphi(0) \psi_h \, dx - \int_{\mathcal{O}_h} \rho(T) \varphi(T) \psi_h \, dx.\end{aligned}$$

Survol des preuves

Théorème 1 : Identification de la solution et des traces

Soit $h > 0$ assez petit, on pose

$$\psi_h(x) = 1 - \frac{d(x, \Gamma)}{h}, x \in \mathcal{O}_h, \quad \text{et} \quad \psi_h(x) = 0, \quad x \in \Omega_h.$$

On prend $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)\psi_h(x)$ comme fonction test dans Ω :

$$\int_0^T \int_\Gamma \gamma_0 \rho(v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt \, d\sigma = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^T \int_{\mathcal{O}_h} \rho(v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt dx.$$

Survol des preuves

Théorème 1 : Identification de la solution et des traces

Soit $h > 0$ assez petit, on pose

$$\psi_h(x) = 1 - \frac{d(x,\Gamma)}{h}, x \in \mathcal{O}_h, \quad \text{et} \quad \psi_h(x) = 0, \quad x \in \Omega_h.$$

On prend $(t,x) \mapsto \varphi(t,x)\psi_h(x)$ comme fonction test dans Ω :

$$\int_0^T \int_\Gamma \gamma_0 \rho (v \cdot \boldsymbol{n}) \varphi \, dt \, d\sigma = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^T \int_{\mathcal{O}_h} \rho (v \cdot \boldsymbol{n}) \varphi \, dt dx.$$

On applique ceci en remplaçant Ω par Ω_ξ :

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^T \int_{\mathcal{O}_\xi} \rho (v \cdot \boldsymbol{n}) \varphi \, dt dx = \int_0^T \int_{\Gamma_\xi} \gamma_\xi \rho \, (v \cdot \boldsymbol{n}) \varphi \, dt \, d\sigma, \quad \forall \xi \in [0, \xi_\Omega[.$$

Survol des preuves
Théorème 1 : Identification de la solution et des traces

Soit $h > 0$ assez petit, on pose

$$\psi_h(x) = 1 - \frac{d(x,\Gamma)}{h}, x \in \mathcal{O}_h, \quad \text{et} \quad \psi_h(x) = 0, \quad x \in \Omega_h.$$

On prend $(t,x) \mapsto \varphi(t,x)\psi_h(x)$ comme fonction test dans Ω :

$$\int_0^T \int_\Gamma \gamma_0 \rho(v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt \, d\sigma = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^T \int_{\mathcal{O}_h} \rho(v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt dx.$$

On applique ceci en remplaçant Ω par Ω_ξ :

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^T \int_{\mathcal{O}_\xi} \rho(v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt dx = \int_0^T \int_{\Gamma_\xi} \gamma_\xi \rho \, (v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt \, d\sigma, \quad \forall \xi \in [0, \xi_\Omega[.$$

$$\forall \xi \in [0, \xi_\Omega[\quad \int_0^T \int_{\mathcal{O}_\xi} \rho(v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt dx = \int_0^\xi \int_0^T \int_{\Gamma_\xi} \gamma_\xi \rho \, (v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt \, d\sigma.$$

Survol des preuves

Théorème 2 : continuité des traces par rapport au domaine

On suppose $\rho \geq 0$. Soient $0 \leq \xi_0 < \xi_1 \leq \xi_\Omega$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\overline{\Omega})$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{\xi_i}} (\gamma_{\xi_i}\rho)^p (v\cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt\, d\sigma = \int_0^T \int_{\Omega_{\xi_i}} \big(\rho^p(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi) + p\rho^{p-1} f\varphi\big)\, dt\, dx$$
$$+ \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(0)^p\varphi(0)\, dx - \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(T)^p \varphi(T)\, dx.$$

Survol des preuves

Théorème 2 : continuité des traces par rapport au domaine

On suppose $\rho \geq 0$. Soient $0 \leq \xi_0 < \xi_1 \leq \xi_\Omega$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \overline{\Omega})$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{\xi_i}} (\gamma_{\xi_i}\rho)^p (v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt \, d\sigma = \int_0^T \int_{\Omega_{\xi_i}} \left(\rho^p(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla\varphi) + p\rho^{p-1} f \varphi\right) dt \, dx + \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(0)^p \varphi(0) \, dx - \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(T)^p \varphi(T) \, dx.$$

Quand on fait tendre ξ_1 vers ξ_0 :

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{\xi_1}} (\gamma_{\xi_1}\rho)^p (v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt \, d\sigma \xrightarrow[\xi_1 \to \xi_0]{} \int_0^T \int_{\Gamma_{\xi_0}} (\gamma_{\xi_0}\rho)^p (v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt \, d\sigma$$

Survol des preuves
Théorème 2 : continuité des traces par rapport au domaine

On suppose $\rho \geq 0$. Soient $0 \leq \xi_0 < \xi_1 \leq \xi_\Omega$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \overline{\Omega})$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{\xi_i}} (\gamma_{\xi_i}\rho)^p (v \cdot \boldsymbol{n}) \varphi \, dt \, d\sigma = \int_0^T \int_{\Omega_{\xi_i}} \left(\rho^p (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi) + p\rho^{p-1} f \varphi \right) dt \, dx + \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(0)^p \varphi(0) \, dx - \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(T)^p \varphi(T) \, dx.$$

On ramène tout à Γ :

$$\int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_1}\rho)^p (v(\xi_1) \cdot \boldsymbol{n}) \varphi(\xi_1) \, dt \, d\sigma \xrightarrow[\xi_1 \to \xi_0]{} \int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_0}\rho)^p (v(\xi_0) \cdot \boldsymbol{n}) \varphi(\xi_0) \, dt \, d\sigma$$

Survol des preuves

Théorème 2 : continuité des traces par rapport au domaine

On suppose $\rho \geq 0$. Soient $0 \leq \xi_0 < \xi_1 \leq \xi_\Omega$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \overline{\Omega})$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{\xi_i}} (\gamma_{\xi_i}\rho)^p (v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt\, d\sigma = \int_0^T \int_{\Omega_{\xi_i}} \left(\rho^p(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla\varphi) + p\rho^{p-1} f\varphi\right) dt\, dx$$
$$+ \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(0)^p \varphi(0)\, dx - \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(T)^p \varphi(T)\, dx.$$

On ramène tout à Γ :

$$\int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_1}\rho)^p (v(\xi_1)\cdot \boldsymbol{n})\varphi(\xi_1)\, dt\, d\sigma \xrightarrow[\xi_1 \to \xi_0]{} \int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_0}\rho)^p (v(\xi_0)\cdot \boldsymbol{n})\varphi(\xi_0)\, dt\, d\sigma$$

Par densité, ceci est encore vrai pour les $\varphi \in \mathcal{C}^0_\xi(L^2_{t,\sigma}(]0,T[\times\Gamma))$!

Survol des preuves

Théorème 2 : continuité des traces par rapport au domaine

On suppose $\rho \geq 0$. Soient $0 \leq \xi_0 < \xi_1 \leq \xi_\Omega$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \overline{\Omega})$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{\xi_i}} (\gamma_{\xi_i}\rho)^p (v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt \, d\sigma = \int_0^T \int_{\Omega_{\xi_i}} \left(\rho^p(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla\varphi) + p\rho^{p-1} f \varphi\right) dt \, dx$$
$$+ \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(0)^p \varphi(0) \, dx - \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(T)^p \varphi(T) \, dx.$$

On ramène tout à Γ :

$$\int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_1}\rho)^p (v(\xi_1) \cdot \boldsymbol{n}) \varphi(\xi_1) \, dt \, d\sigma \underset{\xi_1 \to \xi_0}{\longrightarrow} \int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_0}\rho)^p (v(\xi_0) \cdot \boldsymbol{n}) \varphi(\xi_0) \, dt \, d\sigma$$

Par densité, ceci est encore vrai pour les $\varphi \in \mathcal{C}^0_\xi(L^2_{t,\sigma}(]0,T[\times\Gamma))$!

En particulier :

$$\int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_1}\rho)^p |v(\xi_1) \cdot \boldsymbol{n}|^2 \, dt \, d\sigma \underset{\xi_1 \to \xi_0}{\longrightarrow} \int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_0}\rho)^p |v(\xi_0) \cdot \boldsymbol{n}|^2 \, dt \, d\sigma$$

Survol des preuves

Théorème 2 : continuité des traces par rapport au domaine

On suppose $\rho \geq 0$. Soient $0 \leq \xi_0 < \xi_1 \leq \xi_\Omega$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \overline{\Omega})$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{\xi_i}} (\gamma_{\xi_i}\rho)^p (v \cdot \boldsymbol{n})\varphi \, dt \, d\sigma = \int_0^T \int_{\Omega_{\xi_i}} \left(\rho^p(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla\varphi) + p\rho^{p-1} f\varphi\right) dt \, dx$$
$$+ \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(0)^p \varphi(0) \, dx - \int_{\Omega_{\xi_i}} \rho(T)^p \varphi(T) \, dx.$$

On ramène tout à Γ :

$$\int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_1}\rho)^p (v(\xi_1)\cdot\boldsymbol{n})\varphi(\xi_1) \, dt \, d\sigma \xrightarrow[\xi_1 \to \xi_0]{} \int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_0}\rho)^p (v(\xi_0)\cdot\boldsymbol{n})\varphi(\xi_0) \, dt \, d\sigma$$

Par densité, ceci est encore vrai pour les $\varphi \in \mathcal{C}^0_\xi(L^2_{t,\sigma}(]0,T[\times\Gamma))$!

En particulier :

$$\int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_1}\rho)^p |v(\xi_1) \cdot \boldsymbol{n}|^2 \, dt \, d\sigma \xrightarrow[\xi_1 \to \xi_0]{} \int_0^T \int_\Gamma (\gamma_{\xi_0}\rho)^p |v(\xi_0) \cdot \boldsymbol{n}|^2 \, dt \, d\sigma$$

On conclut par cv faible et cv des normes

QUELQUES MOTS SUR LE CAS L^p

ENONCÉ DU RÉSULTAT GÉNÉRAL

- On introduit τ_ξ le temps de parcours associé à chaque Ω_ξ.

Quelques mots sur le cas L^p

Enoncé du résultat général

- On introduit τ_ξ le temps de parcours associé à chaque Ω_ξ.
- On montre que $\xi \mapsto \tau_\xi$ est continue à valeurs dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^q(\Omega))$ pour tout $q < +\infty$.

Quelques mots sur le cas L^p

Enoncé du résultat général

- On introduit τ_ξ le temps de parcours associé à chaque Ω_ξ.
- On montre que $\xi \mapsto \tau_\xi$ est continue à valeurs dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^q(\Omega))$ pour tout $q < +\infty$.
- On montre que $\xi \mapsto \gamma_\xi \tau_\xi(v(\cdot,\xi,\cdot)\cdot \boldsymbol{n})$ est continue à valeurs dans $L^2(]0,T[\times\Gamma)$.

Quelques mots sur le cas L^p

Enoncé du résultat général

- On introduit τ_ξ le temps de parcours associé à chaque Ω_ξ.
- On montre que $\xi \mapsto \tau_\xi$ est continue à valeurs dans $\mathcal{C}^0([0,T], L^q(\Omega))$ pour tout $q < +\infty$.
- On montre que $\xi \mapsto \gamma_\xi \tau_\xi (v(\cdot,\xi,\cdot)\cdot \boldsymbol{n})$ est continue à valeurs dans $L^2(]0,T[\times\Gamma)$.

Théorème

Si $p < +\infty$ et $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ est solution de l'équation de transport alors on a

$$\xi \mapsto \rho(\cdot,\xi,\cdot)\gamma_\xi \tau_\xi (v(\cdot,\xi,\cdot)\cdot \boldsymbol{n}),$$

est continue à valeurs dans $L^r(]0,T[\times\Gamma)$ pour tout $r < \frac{2p}{p+1}$.

Quelques mots sur le cas L^p

Un exemple

$$\text{Domaine} \quad \Omega =]0,1[\times \mathbb{R},$$
$$v(t,x,y) = (v_1(t,y), v_2(t,x)), \quad \text{tel que } v \in L^2_{loc}([0,T[,(H^1(\Omega))^2).$$
$$0 < \alpha_1 \leq v_1(t,y) \leq \alpha_2, \quad \text{pour presque tout } (t,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Quelques mots sur le cas L^p

Un exemple

$$\text{Domaine} \quad \Omega =]0,1[\times\mathbb{R},$$
$$v(t,x,y) = (v_1(t,y), v_2(t,x)), \quad \text{tel que } v \in L^2_{loc}([0,T[,(H^1(\Omega))^2).$$
$$0 < \alpha_1 \leq v_1(t,y) \leq \alpha_2, \quad \text{pour presque tout } (t,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On considère pour $\xi \in [0,1[$

$$\Omega_\xi = \{(x,y) \in \Omega,\ x > \xi\} \Rightarrow \text{ temps de parcours } \tau_\xi.$$

Quelques mots sur le cas L^p

Un exemple

$$\text{Domaine} \ \ \Omega =]0,1[\times\mathbb{R},$$

$$v(t,x,y) = (v_1(t,y), v_2(t,x)), \ \ \text{tel que } v \in L^2_{loc}([0,T[,(H^1(\Omega))^2).$$

$$0 < \alpha_1 \leq v_1(t,y) \leq \alpha_2, \ \ \text{pour presque tout } (t,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On considère pour $\xi \in [0,1[$

$$\Omega_\xi = \{(x,y) \in \Omega, \ x > \xi\} \Rightarrow \text{ temps de parcours } \tau_\xi.$$

On a "presque"

$$\gamma_\xi \tau_\xi \geq \frac{(1-\xi)}{\alpha_2} > 0, \ \ \text{et} \ \ v \cdot e_x = v_1 \geq \alpha_1 > 0.$$

Quelques mots sur le cas L^p

Un exemple

$$\text{Domaine } \ \Omega =]0,1[\times\mathbb{R},$$

$$v(t,x,y) = (v_1(t,y), v_2(t,x)), \quad \text{tel que } v \in L^2_{loc}(]0,T[,(H^1(\Omega))^2).$$

$$0 < \alpha_1 \leq v_1(t,y) \leq \alpha_2, \quad \text{pour presque tout } (t,y)\in\mathbb{R}^2.$$

On considère pour $\xi \in [0,1[$

$$\Omega_\xi = \{(x,y)\in\Omega,\ x>\xi\} \Rightarrow \text{ temps de parcours } \tau_\xi.$$

On a “presque”

$$\gamma_\xi \tau_\xi \geq \frac{(1-\xi)}{\alpha_2} > 0, \quad \text{et} \quad v\cdot e_x = v_1 \geq \alpha_1 > 0.$$

Théorème

Toute solution $\rho \in L^\infty(]0,T[,L^2(\Omega))$ de l'équation de transport pour le champ v vérifie

$$\rho \in \mathcal{C}^0_x([0,1], L^2_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R})).$$

Plan

Stabilité par rapport au champ de vitesse

Théorème (Stabilité / Compacité)

Soient $\rho_0^k \in L^\infty(\Omega)$, $v_k \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d)$ *tel que* $\operatorname{div} v_k = 0$, $\rho_k^e \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma)$. *On note* (ρ_k, ρ_k^s) *la solution du problème*

$$\partial_t \rho_k + v_k \cdot \nabla \rho_k = 0, \quad \rho_k(0) = \rho_0^k, \quad \gamma\rho_k = \rho_k^e, \quad \text{là où } (v_k \cdot \boldsymbol{n}) < 0.$$

On suppose

- $(\rho_k^0)_k$ *est bornée dans* $L^\infty(\Omega)$ *et* $\rho_k^0 \longrightarrow \rho_0$ *dans* $L^1(\Omega)$.
- $(\rho_k^e)_k$ *est bornée dans* $L^\infty(]0,T[\times\Gamma)$ *et* $\rho_k^e \longrightarrow \rho^e$ *dans* L^2.
- v_k *converge faiblement vers* v *dans* $L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d)$.
- $v_k \cdot \boldsymbol{n}$ *converge fortement vers* $v \cdot \boldsymbol{n}$ *dans* $L^2(]0,T[\times\Gamma)$.

Alors ρ_k *converge fortement dans* $L^p(]0,T[\times\Omega)$ *pour tout* $p < +\infty$ *vers l'unique solution faible du problème limite.*
De plus $\beta(\rho_k^s)(v_k \cdot \boldsymbol{n})$ *converge fortement vers* $\beta(\rho^s)(v \cdot \boldsymbol{n})$ *dans* $L^2(]0,T[\times\Gamma)$ *pour tout* $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Conditions aux limites en sortie d'un écoulement non-homogène

B.-Fabrie, 2005 :

Existence de solutions faibles pour le modèle

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - 2 \operatorname{div}(\mu(\rho) D(v)) + \nabla p = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \rho(0) = \rho_0, \\ (\rho v)(0) = \rho_0 v_0, \\ \rho = \rho^e, \quad \text{là où } v \cdot \boldsymbol{n} < 0, \\ v = v_b, \ \text{sur } \Gamma_1, \\ \sigma.\boldsymbol{n} = -\frac{1}{2}\rho^e (v \cdot \boldsymbol{n})^- (v - v_{\text{ref}}) + \sigma_{\text{ref}}.\boldsymbol{n}, \quad \text{sur } \Gamma_2, \end{cases}$$

avec $\sigma = 2\mu(\rho) D(v) - p \,\mathrm{Id}$, et $(v_{\text{ref}}, \sigma_{\text{ref}})$ écoulement de référence en sortie.