

# Volumes finis pour les problèmes elliptiques hétérogènes anisotropes sur maillages généraux

## PARTIE 3

Franck BOYER

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités  
CNRS / Université Paul Cézanne

Ecole d'été du GDR MOAD  
Fréjus, 31 Aout - 3 Septembre 2009



## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

- Schéma DDFV (DISCRETE DUALITY FINITE VOLUME) pour

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u(x))) = f(x), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

- $\Omega$  est un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$ .
- $u \mapsto -\operatorname{div}(\varphi(\cdot, \nabla u))$  est monotone coercif (de type Leray–Lions).

## EXEMPLES

- Loi de Darcy

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f, \quad \text{avec } A \text{ SDP},$$

- Loi de Darcy-Forchheimer

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\alpha\nabla u}{1 + \sqrt{1 + \beta|\nabla u|}}\right) = f.$$

- $p$ -laplacien

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f.$$

- Soit  $p \in ]1, \infty[$ ,  $p' = \frac{p}{p-1}$  et  $f \in L^{p'}(\Omega)$ . ►  $p \geq 2$  pour simplifier.
- $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une fonction de Caratheodory telle que :

$$(\varphi(x, \xi), \xi) \geq C_\varphi |\xi|^p - \frac{1}{C_\varphi}, \quad (\mathcal{H}_1)$$

$$|\varphi(x, \xi)| \leq C_\varphi (|\xi|^{p-1} + 1). \quad (\mathcal{H}_2)$$

$$\left( \varphi(x, \xi) - \varphi(x, \eta), \xi - \eta \right) \geq \frac{1}{C_\varphi} |\xi - \eta|^p. \quad (\mathcal{H}_3)$$

$$|\varphi(x, \xi) - \varphi(x, \eta)| \leq C_\varphi (1 + |\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2}) |\xi - \eta|. \quad (\mathcal{H}_4)$$

- $\varphi$  est lipschitzienne en  $x$ .

## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

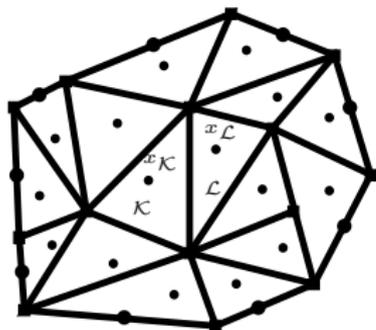
- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

(Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05) (Andreianov-Boyer-Hubert '07)

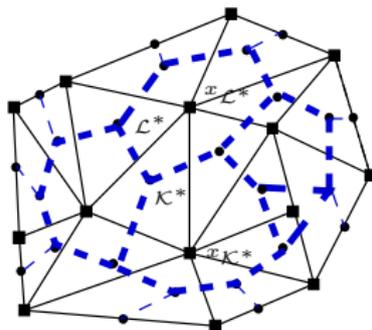
## MAILLAGES



$\triangle$  mesh  $\mathfrak{M}$

Maillage primal

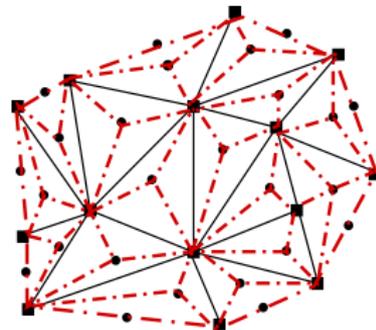
$\rightsquigarrow (u_K)_{K \in \mathfrak{M}}$



$\square$  mesh  $\mathfrak{M}^*$

Maillage dual

$\rightsquigarrow (u_{K^*})_{K^* \in \mathfrak{M}^*}$



$\square$  mesh  $\mathfrak{D}$

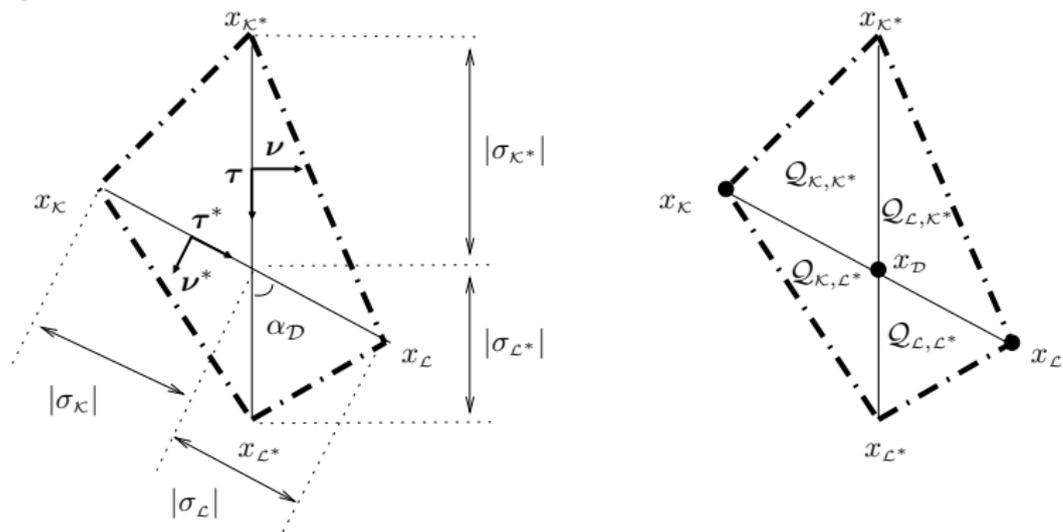
Maillage diamant

$\rightsquigarrow$  gradient discret

SOLUTION APPROCHÉE :

$$u^T = \left( (u_K)_{K \in \mathfrak{M}}, (u_{K^*})_{K^* \in \mathfrak{M}^*} \right)$$

## QUELQUES NOTATIONS



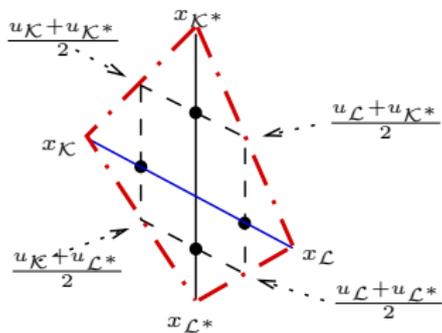
## RÉGULARITÉ DES MAILLAGES

$$\sin \alpha_{\mathcal{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\sin \alpha_{\mathcal{D}}|,$$

$$\text{reg}(\mathcal{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \max \left( \frac{1}{\alpha_{\mathcal{T}}}, \max_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \max_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \frac{d_{\mathcal{D}}}{\sqrt{|\mathcal{Q}|}}, \max_{\substack{\mathcal{K} \in \mathfrak{M} \\ \mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}}}} \frac{d_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{D}}}, \max_{\substack{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \\ \mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}}} \frac{d_{\mathcal{K}^*}}{d_{\mathcal{D}}} \right).$$

## GRADIENT DISCRET

$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left( \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}^* \right), \quad \forall \text{ diamant } \mathcal{D}.$$



## REMARQUE

$$|\sigma| = d_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}^*},$$

$$|\sigma^*| = d_{\mathcal{K} \mathcal{L}}.$$

Définition équivalente 
$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T = \frac{1}{2|\mathcal{D}|} \left( |\sigma|(u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}) \boldsymbol{\nu} + |\sigma^*|(u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}) \boldsymbol{\nu}^* \right),$$

Autre définition équivalente 
$$\begin{cases} \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}. \end{cases}$$

## GRADIENT DISCRET

$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left( \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}^* \right), \quad \forall \text{ diamant } \mathcal{D}.$$

## MÉTHODE DDFV

Formulation Volumes Finis :

$$a_{\mathcal{K}}(u^T) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}}) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M},$$

$$a_{\mathcal{K}^*}(u^T) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\sigma^* \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}} |\sigma^*| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*}) = |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*}, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*,$$

où

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\xi) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \varphi(x, \xi) dx, \quad \text{flux de masse approché sur le diamant}$$

## GRADIENT DISCRET

$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left( \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}^* \right), \quad \forall \text{ diamant } \mathcal{D}.$$

## MÉTHODE DDFV

Formulation Volumes Finis :

$$a_{\mathcal{K}}(u^T) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}}) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M},$$

$$a_{\mathcal{K}^*}(u^T) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\sigma^* \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}} |\sigma^*| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*}) = |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*}, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*,$$

## PROPOSITION (INTÉGRATION PAR PARTIES DISCRÈTES)

Pour tous  $u^T, v^T \in \mathbb{R}^T$ , on a

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} a_{\mathcal{K}}(u^T) v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*} a_{\mathcal{K}^*}(u^T) v_{\mathcal{K}^*} = 2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \nabla_{\mathcal{D}}^T v^T).$$

## GRADIENT DISCRET

$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left( \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}^* \right), \quad \forall \text{ diamant } \mathcal{D}.$$

## MÉTHODE DDFV

### PROPOSITION (INTÉGRATION PAR PARTIES DISCRÈTES)

Pour tous  $u^T, v^T \in \mathbb{R}^T$ , on a

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} a_{\mathcal{K}}(u^T) v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*} a_{\mathcal{K}^*}(u^T) v_{\mathcal{K}^*} = 2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \nabla_{\mathcal{D}}^T v^T).$$

Formulation équivalente (**Dualité Discrète**) :

On cherche  $u^T \in \mathbb{R}^T$  tel que  $\forall v^T \in \mathbb{R}^T$ ,

$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \nabla_{\mathcal{D}}^T v^T) = \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*}.$$

## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

## PROPOSITION (INTÉGRATION PAR PARTIES DISCRÈTES)

Pour tous  $u^T, v^T \in \mathbb{R}^T$ , on a

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} a_{\kappa}(u^T)v_{\kappa} + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} a_{\kappa^*}(u^T)v_{\kappa^*} = 2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \nabla_{\mathcal{D}}^T v^T).$$

On veut montrer la bijectivité de l'application

$$a : u^T \mapsto a(u^T) \stackrel{\text{def}}{=} \left( (a_{\kappa}(u^T))_{\kappa}, (a_{\kappa^*}(u^T))_{\kappa^*} \right) \in \mathbb{R}^T.$$

- **Monotonie** :  $\varphi$  monotone  $\Rightarrow a$  est monotone.
- **Surjectivité** :  $\varphi$  coercive  $\Rightarrow a$  est coercive car

$$\|u^T\|_{1,p,T} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| |\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur  $\mathbb{R}^T$ .

- La formule d'intégration par parties discrète avec  $v^T = u^T$  donne

$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) = \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} |\kappa| f_{\kappa} u_{\kappa} + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} |\kappa^*| f_{\kappa^*} u_{\kappa^*}.$$

- Mais, par hypothèse sur  $\varphi$

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \quad (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) \geq C_1 |\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T|^p - C_2,$$

- D'où

$$2C_1 \|u^T\|_{1,p,\mathcal{T}}^p \leq 2C_2 |\Omega| + \|f\|_{L^{p'}} (\|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^p} + \|u^{\mathfrak{M}^*}\|_{L^p}).$$

### THÉORÈME (INÉGALITÉ DE POINCARÉ ▶ Preuve)

*Il existe une constante  $C$  dépendant de  $\Omega$ , de  $p$  et de  $\text{reg}(\mathcal{T})$  telle que*

$$\forall u^T \in \mathbb{R}^T, \quad \|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^p} + \|u^{\mathfrak{M}^*}\|_{L^p} \leq C \|u^T\|_{1,p,\mathcal{T}}.$$

**CONCLUSION :** La solution vérifie  $\|u^T\|_{1,p,\mathcal{T}} \leq C \left( 1 + \|f\|_{L^{p'}}^{\frac{1}{p-1}} \right)$ .

## THÉORÈME

Soit  $\mathcal{T}_n$  une suite de maillages DDFV, telle que  $\text{size}(\mathcal{T}_n) \rightarrow 0$  et  $\text{reg}(\mathcal{T}_n)$  est bornée.

Alors, la solution  $u^{\mathcal{T}_n}$  du schéma converge vers la solution exacte de la façon suivante

$$u^{\mathfrak{m}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \text{ dans } L^p(\Omega),$$

$$u^{\mathfrak{m}_n^*} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \text{ dans } L^p(\Omega),$$

$$\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nabla u \text{ dans } (L^p(\Omega))^2,$$

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \varphi_{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi(\cdot, \nabla u) \text{ dans } (L^{p'}(\Omega))^2.$$

**REMARQUE :** On a convergence **forte** des gradients et des flux.

► Preuve convergence

ON SUPPOSE QUE  $\varphi$  EST RÉGULIÈRE PAR RAPPORT À  $x$

- Equation de Laplace :  $\varphi(x, \xi) = \xi$ ,  $p = 2$  : (Domelevo - Omnès, 05)  
 $\Rightarrow$  Convergence à l'ordre 1 de la solution et du gradient.
- Cas général : (Andreianov - B. - Hubert, 07)

### THÉORÈME

On suppose que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  et

$$\varphi \text{ est Lip. sur } \Omega, \text{ avec } \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \xi) \right| \leq C_\varphi (1 + |\xi|^{p-1}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (\mathcal{H}_5)$$

alors il existe  $C(\text{reg}(\mathcal{T}))$  telle que on a

$$\|u - u^{\mathfrak{M}}\|_{L^p} + \|u - u^{\mathfrak{M}*}\|_{L^p} + \|\nabla u - \nabla^T u^T\|_{L^p} \leq C h^{\frac{1}{p-1}}.$$

## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- **Implémentation**
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

## CAS LINÉAIRE

- La matrice est construite en parcourant les arêtes (i.e. les diamants). Pour chacune de ces arêtes, on assemble 4 termes.
- Stencil :
  - Indépendant du tenseur de diffusion.
  - La ligne correspondant à une inconnue  $u_{\kappa}$  a au plus  $2N + 1$  coefficients non nuls où  $N$  est le nombre d'arêtes de  $\kappa$ .
- La matrice est symétrique définie positive.
- Dans le cas d'un maillage orthogonal admissible, le système se découple en deux schémas VF4.
- Possibilité de résoudre le schéma par décomposition de domaine sans recouvrement.

## CAS LINÉAIRE

- La matrice est construite en parcourant les arêtes (i.e. les diamants). Pour chacune de ces arêtes, on assemble 4 termes.
- Stencil :
  - Indépendant du tenseur de diffusion.
  - La ligne correspondant à une inconnue  $u_\kappa$  a au plus  $2N + 1$  coefficients non nuls où  $N$  est le nombre d'arêtes de  $\kappa$ .
- La matrice est symétrique définie positive.
- Dans le cas d'un maillage orthogonal admissible, le système se découple en deux schémas VF4.
- Possibilité de résoudre le schéma par décomposition de domaine sans recouvrement.

## CAS NON-LINÉAIRE

- Si  $\varphi$  dépend d'un potentiel  $\varphi = \nabla_\xi \Phi$ , le schéma s'écrit alors comme l'équation d'Euler-Lagrange d'une bonne fonctionnelle
  - Méthodes de gradient
  - Méthode de Newton
- Dans le cas général, on peut aussi utiliser une méthode de type décomposition-coordination (Voir plus loin).

## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

## OBJECTIFS

- Prendre en compte les discontinuités de coefficients dans le problème sans perdre la précision.
- Possibilité de coupler deux problèmes avec des non-linéarités différentes (Darcy / Darcy–Forcheimer).
- Les discontinuités peuvent avoir lieu à travers
  - Les arêtes primales.
  - Les arêtes duales.
  - Les deux ...
- On veut conserver le même stencil que pour DDFV.

## OBJECTIFS

- Prendre en compte les discontinuités de coefficients dans le problème sans perdre la précision.
- Possibilité de coupler deux problèmes avec des non-linéarités différentes (Darcy / Darcy–Forcheimer).
- Les discontinuités peuvent avoir lieu à travers
  - Les arêtes primales.
  - Les arêtes duales.
  - Les deux ...
- On veut conserver le même stencil que pour DDFV.

## PRINCIPE GÉNÉRAL

- On s'inspire du travail effectué pour VF4 :
  - On introduit des inconnues artificielles bien choisies sur les arêtes.
  - On demande une forme de conservativité locale des flux.
  - On élimine les inconnues intermédiaires et on obtient des flux numériques qui ne dépendent que des inconnues principales du problème.
- Il faut adapter à la diffusion non-linéaire.
- Il faut bien tenir compte de la géométrie particulière du schéma.

$$\Omega = ] - 1, 1[, \varphi(x, \cdot) = \begin{cases} \varphi_-(\cdot), & \text{si } x < 0, \\ \varphi_+(\cdot), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$-\partial_x(\varphi(x, \partial_x u)) = f, \text{ dans } \Omega \iff \begin{cases} -\partial_x(\varphi_-(\partial_x u)) = f, & \text{sur } ] - 1, 0[, \\ -\partial_x(\varphi_+(\partial_x u)) = f, & \text{sur } ]0, 1[, \\ u^+(0) = u^-(0), \\ \varphi_+(\partial_x u^+(0)) = \varphi_-(\partial_x u^-(0)). \end{cases}$$

$$\Omega = ]-1, 1[, \varphi(x, \cdot) = \begin{cases} \varphi_-(\cdot), & \text{si } x < 0, \\ \varphi_+(\cdot), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Soit  $x_0 = -1 < \dots < x_N = 0 < \dots < x_{N+M} = 1$  une subdivision de  $[-1, 1]$ . Le schéma VF en 1D s'écrit pour  $i \in \{0, N + M - 1\}$  :

$$-F_{i+1} + F_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx. \quad (1)$$

avec

$$F_i = \varphi(x_i, \nabla_i u^T), \quad \nabla_i u^T = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}, \quad \forall i \neq N, \quad (2)$$

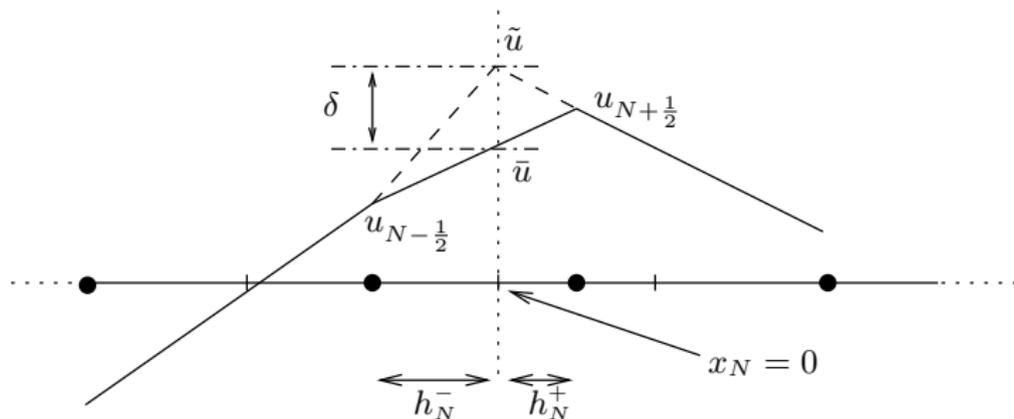
QUESTION : Comment définir le flux  $F_N$  ?

On cherche  $\tilde{u}$  tel que pour

$$\nabla_N^+ u^T = \frac{u_{N+\frac{1}{2}} - \tilde{u}}{h_N^+}, \quad \nabla_N^- u^T = \frac{\tilde{u} - u_{N-\frac{1}{2}}}{h_N^-},$$

on ait

$$\varphi_+(\nabla_N^+ u^T) = \varphi_-(\nabla_N^- u^T).$$

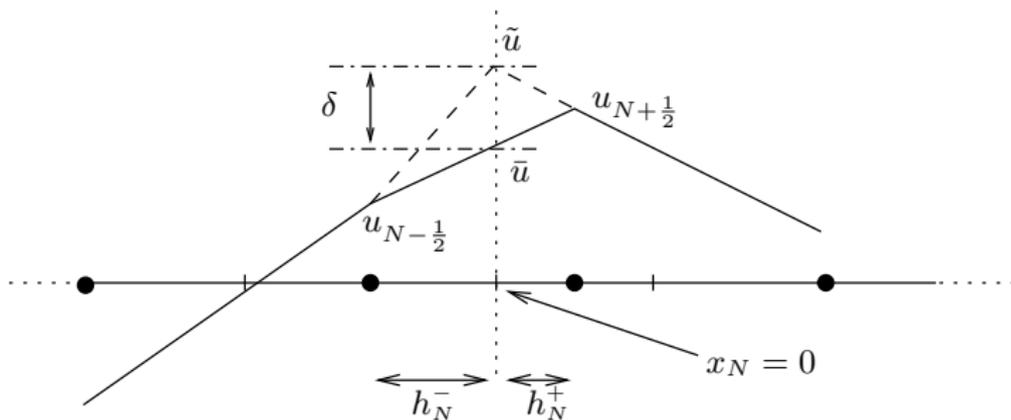


On cherche en fait  $\tilde{u}$  sous la forme

$$\tilde{u} = \bar{u} + \delta, \quad \text{avec } \bar{u} = \frac{h_N^- u_{N+\frac{1}{2}} + h_N^+ u_{N-\frac{1}{2}}}{h_N^- + h_N^+}.$$

soit

$$\nabla_N^+ u^T = \nabla_N u^T - \frac{\delta}{h_N^+}, \quad \text{et } \nabla_N^- u^T = \nabla_N u^T + \frac{\delta}{h_N^-}.$$



## THÉORÈME (CAS $p \geq 2$ )

- Pour tout  $u^T \in \mathbb{R}^N$ , il existe un unique  $\delta$  tel que

$$F_N \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_- \left( \nabla_N u^T + \frac{\delta}{h_N^-} \right) = \varphi_+ \left( \nabla_N u^T - \frac{\delta}{h_N^+} \right),$$

celui-ci est noté  $\delta_N(\nabla_N u^T)$ .

- L'application  $\nabla_N u^T \mapsto \delta_N(\nabla_N u^T)$  est monotone.
- Le nouveau schéma VF admet une unique solution  $u^T \in \mathbb{R}^T$ .
- Le flux  $F_N$  est consistant à l'ordre  $h^{\frac{1}{p-1}}$ . [► Preuve](#)

PREUVE DES TROIS PREMIERS POINTS : Monotonite, coercivité, ...

Pour deux flux de type p-laplacien

$$\varphi_-(\xi) = k_- |\xi + G_-|^{p-2} (\xi + G_-),$$

$$\varphi_+(\xi) = k_+ |\xi + G_+|^{p-2} (\xi + G_+),$$

où  $k_-, k_+ \in \mathbb{R}^+$  et  $G_-, G_+ \in \mathbb{R}^2$ . Tous calculs faits on trouve

$$F_N = \left( \frac{k_-^{\frac{1}{p-1}} k_+^{\frac{1}{p-1}} (h_N^- + h_N^+)}{h_N^+ k_-^{\frac{1}{p-1}} + h_N^- k_+^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{p-1} |\nabla_N u^T + \bar{G}|^{p-2} (\nabla_N u^T + \bar{G}),$$

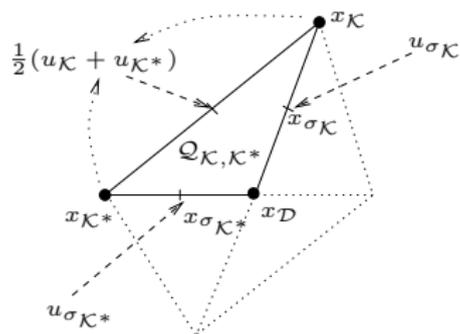
où  $\bar{G}$  est la moyenne arithmétique pondérée de  $G_-$  et  $G_+$  définie par

$$\bar{G} = \frac{h_N^- G_- + h_N^+ G_+}{h_N^- + h_N^+}.$$

**Attention : les calculs ne sont en général pas explicites.**

►  $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}} u^T$  est constant sur chaque quart de diamant

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}} u^T = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} 1_{\mathcal{Q}} \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T,$$



$$\nabla_{\mathcal{Q}_{K, K^*}}^{\mathcal{N}} u^T = \frac{2}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left( \frac{u_{\sigma K^*} - \frac{1}{2}(u_K + u_{K^*})}{|\sigma_K|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\sigma K} - \frac{1}{2}(u_K + u_{K^*})}{|\sigma_{K^*}|} \boldsymbol{\nu}^* \right)$$

$$\rightsquigarrow \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T = \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}, \forall \mathcal{Q} \subset \mathcal{D}.$$

- $\delta^{\mathcal{D}} = \iota(\delta_K^{\mathcal{D}}, \delta_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}}, \delta_{K^*}^{\mathcal{D}}, \delta_{\mathcal{L}^*}^{\mathcal{D}}) \in \mathbb{R}^4$  est à déterminer.
- $B_{\mathcal{Q}}$  est une matrice  $2 \times 4$  qui ne dépend que de la géométrie.

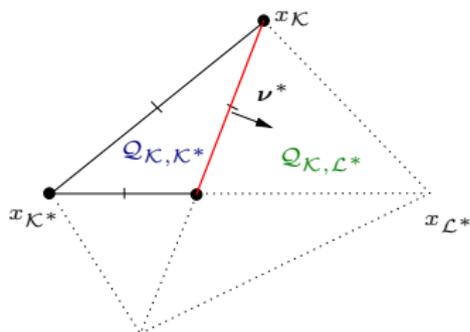
$$B_{\mathcal{Q}_{K, K^*}} = \frac{2}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left( \frac{\boldsymbol{\nu}^*}{|\sigma_{K^*}|}, 0, \frac{\boldsymbol{\nu}}{|\sigma_K|}, 0 \right) = \frac{1}{|\mathcal{Q}_{K, K^*}|} (|\sigma_K| \boldsymbol{\nu}^*, 0, |\sigma_{K^*}| \boldsymbol{\nu}, 0).$$

ON DEMANDE LA CONSERVATIVITÉ DES FLUX NUMÉRIQUES

On note

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(\xi) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} \varphi(x, \xi) dx.$$

On cherche à déterminer  $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$  tel que



$$(\varphi_{\mathcal{Q}_{K,K^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{K,K^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{K,L^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{K,L^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*)$$

## ON DEMANDE LA CONSERVATIVITÉ DES FLUX NUMÉRIQUES

On note

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(\xi) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} \varphi(x, \xi) dx.$$

On cherche à déterminer  $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$\begin{cases} (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) \\ (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) \\ (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu) \\ (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu) \end{cases}$$

$$\iff \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|^t B_{\mathcal{Q}} \cdot \varphi_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}) = 0.$$

DANS LE CAS LINÉAIRE

$$\underbrace{\left( \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|^t B_{\mathcal{Q}} A_{\mathcal{Q}} B_{\mathcal{Q}} \right)}_{\text{matrice SDP}} \delta^{\mathcal{D}} = \text{second membre linéaire en } \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T.$$

## ON DEMANDE LA CONSERVATIVITÉ DES FLUX NUMÉRIQUES

On note

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(\xi) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} \varphi(x, \xi) dx.$$

On cherche à déterminer  $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) \\ (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) \\ (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu) \\ (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu) \end{array} \right.$$

$$\iff \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|^t B_{\mathcal{Q}} \cdot \varphi_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}) = 0.$$

## PROPOSITION (CAS GÉNÉRAL)

Pour tout  $u^T \in \mathbb{R}^T$ , et tout diamant  $\mathcal{D}$ , il existe un **unique**  $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$  assurant la conservativité des flux.

Pour tout  $\mathcal{D}$ , l'application  $\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T \mapsto \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T)$  est monotone.

## LE SCHÉMA M-DDFV

On remplace dans le schéma DDFV, le flux approché

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \varphi(x, \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) dx,$$

par

$$\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \varphi_{\mathcal{Q}} \left( \underbrace{\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T)}_{=\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T} \right),$$

## LE SCHEMA M-DDFV

On remplace dans le schéma DDFV, le flux approché

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \varphi(x, \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) dx,$$

par

$$\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \varphi_{\mathcal{Q}}(\underbrace{\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T)}_{=\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T}),$$

## FORMULATION EN DUALITÉ DISCRÈTE SUR LES DIAMANTS

$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| (\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \nabla_{\mathcal{D}}^T v^T) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}} dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}*} dx, \quad \forall v^T \in \mathbb{R}^T.$$

## LE SCHEMA M-DDFV

On remplace dans le schéma DDFV, le flux approché

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \varphi(x, \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) dx,$$

par

$$\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \varphi_{\mathcal{Q}}(\underbrace{\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T)}_{=\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T}),$$

## FORMULATION EN DUALITÉ DISCRÈTE SUR LES DIAMANTS

$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} |\mathcal{D}| (\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \nabla_{\mathcal{D}}^T v^T) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{m}} dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{m}*} dx, \quad \forall v^T \in \mathbb{R}^T.$$

## FORMULATION EN DUALITÉ DISCRÈTE SUR LES QUARTS DE DIAMANT

$$2 \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}} |\mathcal{Q}| (\varphi_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T), \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} v^T) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{m}} dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{m}*} dx, \quad \forall v^T \in \mathbb{R}^T.$$

# EXEMPLE DANS LE CAS LINÉAIRE

Si  $\varphi$  est **linéaire** i.e.  $\varphi(z, \xi) = A(z)\xi$ , le nouveau flux numérique s'écrit

$$\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\xi) = A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}\xi.$$

Si de plus  $A$  est **constante par mailles primales**, on retrouve les schémas de **Hermeline (03)** pour lesquels les calculs sont **explicités**. Le tenseur de diffusion équivalent obtenu est :

$$(A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{(|\sigma_{\mathcal{K}}| + |\sigma_{\mathcal{L}}|)(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})}{|\sigma_{\mathcal{L}}|(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) + |\sigma_{\mathcal{K}}|(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})},$$

$$(A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{\nu}^*, \boldsymbol{\nu}^*) = \frac{|\sigma_{\mathcal{L}}|(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}^*, \boldsymbol{\nu}^*) + |\sigma_{\mathcal{K}}|(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}^*, \boldsymbol{\nu}^*)}{|\sigma_{\mathcal{K}}| + |\sigma_{\mathcal{L}}|} - \frac{|\sigma_{\mathcal{K}}||\sigma_{\mathcal{L}}|}{|\sigma_{\mathcal{K}}| + |\sigma_{\mathcal{L}}|} \frac{((A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}^*) - (A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}^*))^2}{|\sigma_{\mathcal{L}}|(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) + |\sigma_{\mathcal{K}}|(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})},$$

$$(A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}^*) = \frac{|\sigma_{\mathcal{L}}|(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}^*)(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) + |\sigma_{\mathcal{K}}|(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}^*)(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})}{|\sigma_{\mathcal{L}}|(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) + |\sigma_{\mathcal{K}}|(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})}.$$

Le schéma obtenu s'écrit

$$\mathcal{F} \left( \left( \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) \right)_{\mathcal{Q} \in \Omega} \right) = \text{termes sources},$$

avec sur chaque diamant

$$\delta^{\mathcal{D}}(\xi) = \mathcal{G}_{\xi}^{-1}(0) \quad \leftarrow \text{syst. de 4 \u00e9q \u00e0 4 inconnues.}$$

Le schéma obtenu s'écrit

$$\mathcal{F} \left( \left( \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) \right)_{\mathcal{Q} \in \Omega} \right) = \text{termes sources},$$

avec sur chaque diamant

$$\delta^{\mathcal{D}}(\xi) = \mathcal{G}_{\xi}^{-1}(0) \quad \leftarrow \text{syst. de 4 \u00e9q \u00e0 4 inconnues.}$$

### CAS LIN\u00c9AIRE

- Les applications  $\xi \mapsto \delta^{\mathcal{D}}(\xi)$  sont lin\u00e9aires et leurs matrices sont calcul\u00e9es au tout d\u00e9but de la r\u00e9solution (elles ne d\u00e9pendent que du maillage et de  $\varphi$ ). On peut, par exemple, appliquer une m\u00e9thode de pivot de Gauss pour r\u00e9soudre simultan\u00e9ment tous les petits syst\u00e8mes  $4 \times 4$ .
- La matrice globale du sch\u00e9ma m-DDFV est donc : lin\u00e9aire, sym\u00e9trique, d\u00e9fini positive, et a exactement le m\u00eame stencil que celle du sch\u00e9ma DDFV classique. **Cette variante est donc totalement indolore du point de vue des co\u00fbts de calcul.**

Le schéma obtenu s'écrit

$$\mathcal{F} \left( \left( \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) \right)_{\mathcal{Q} \in \Omega} \right) = \text{termes sources},$$

avec sur chaque diamant

$$\delta^{\mathcal{D}}(\xi) = \mathcal{G}_{\xi}^{-1}(0) \quad \longleftarrow \text{syst. de 4 \u00e9q \u00e0 4 inconnues.}$$

### CAS NON-LIN\u00c9AIRE

- Le calcul exact des applications non-lin\u00e9aires  $\xi \mapsto \delta^{\mathcal{D}}(\xi)$  est impossible en g\u00e9n\u00e9ral.
- La r\u00e9solution du syst\u00e8me global par une m\u00e9thode de Newton est possible mais pas n\u00e9cessairement ais\u00e9e (le calcul de la Jacobienne du syst\u00e8me n'est pas trivial ...).

## THÉORÈME

Le schéma  $m$ -DDFV possède une **unique** solution  $u^T \in \mathbb{R}^T$  qui dépend continûment des données.

## THÉORÈME (CAS $p \geq 2$ )

On suppose que  $\varphi$  est régulière par morceaux et que le maillage est compatible avec les discontinuités de  $\varphi$ .

Si  $u$  est régulière **sur chaque quart de diamant**  $\mathcal{Q}$ , on a

$$\|u - u^{\mathfrak{M}}\|_{L^p} + \|u - u^{\mathfrak{M}^*}\|_{L^p} + \|\nabla u - \nabla^{\mathcal{N}} u^T\|_{L^p} \leq C h^{\frac{1}{p-1}}.$$

► [Éléments de preuve](#)

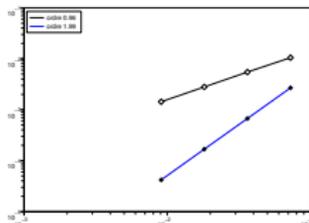
Dans le cas linéaire ( $p = 2$ ) on retrouve la convergence à l'ordre 1 attendue.

$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$  avec  $\Omega_1 = ]0, 0.5[ \times ]0, 1[$  et  $\Omega_2 = ]0.5, 1[ \times ]0, 1[$

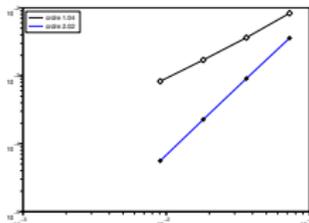
UN EXEMPLE LINÉAIRE :

$-\text{div}(A(x)\nabla u) = f$ , avec  $A(x) = \text{Id}$  dans  $\Omega_1$ ,  $A(x) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  dans  $\Omega_2$ .

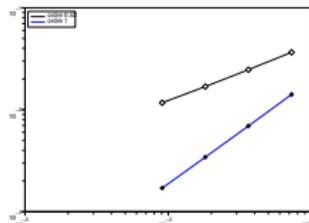
- schéma DDFV : ordre  $\frac{1}{2}$
- schéma m-DDFV : ordre 1



$L^\infty$



$L^2$



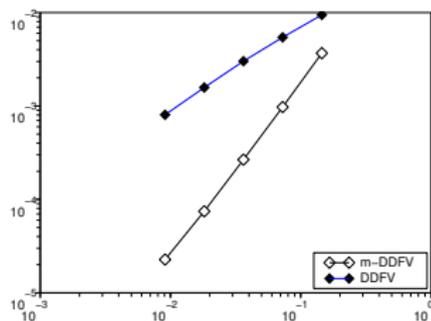
$H^1$

# DDFV vs M-DDFV

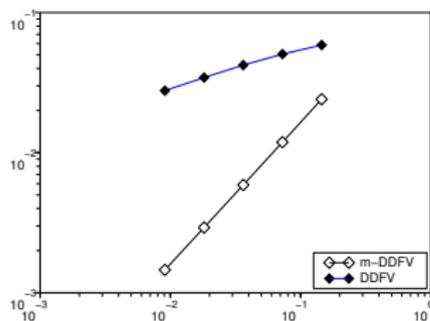
UN EXEMPLE NON-LINÉAIRE

$$\begin{cases} \text{Pour } x \in \Omega_1, & \varphi(x, \xi) = |\xi|^{p-2}\xi, \\ \text{Pour } x \in \Omega_2, & \varphi(x, \xi) = (A\xi, \xi)^{\frac{p-2}{2}} A\xi, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

ON CHOISIT  $p = 3.0$



$L^\infty$  - ordres 1.71 et 0.97



$W^{1,p}$  - ordres 1.0 et 0.3

$$\varphi(x, \xi) = |\xi|^{p_i-2} \xi \text{ dans } \Omega_i$$

$$u(x) = \begin{cases} x_1 \left( \left( \lambda^{\frac{p_2-1}{p_1-1}} - 1 \right) (2x_1 - 1) + 1 \right) & \text{pour } x_1 \leq 0.5 \\ (1 - x_1) \left( (1 + \lambda) (2x_1 - 1) + 1 \right) & \text{pour } x_1 \geq 0.5 \end{cases}$$

↔ Sauts de gradient importants à l'interface

On prend  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 4$

h	DDFV $L^p(\Omega)$	m-DDFV $L^p(\Omega)$	DDFV $W^{1,p}(\Omega)$	m-DDFV $W^{1,p}(\Omega)$
7.25E-02	4.70E-01	3.61E-02	2.5E+01	1.41
3.63E-02	2.36E-01	9.14E-02	2.03E+01	6.62E-01
1.81E-02	1.19E-01	2.24E-03	1.65E+01	3.11E-01
9.07E-03	6.01E-02	4.46E-04	1.34E+01	1.47E-01
ordres	0.98	2.11	0.30	1.08

Si  $\varphi$  provient d'un potentiel  $\Phi$

$$\begin{cases} \varphi(x, \xi) &= \nabla_{\xi} \Phi(x, \xi), \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^2 \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \Phi(x, 0) &= 0, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{cases}$$

## PROPOSITION

La solution  $u^T$  du schéma  $m$ -DDFV est l'unique minimum de

$$\begin{aligned} J^T(v^T) &= 2 \sum_{D \in \mathfrak{D}} \sum_{Q \in \Omega_D} |Q| \Phi_Q(\nabla_Q^{\mathcal{N}} v^T) \\ &\quad - \sum_{\kappa} |\kappa| f_{\kappa} v_{\kappa} - \sum_{\kappa^*} |\kappa^*| f_{\kappa^*} v_{\kappa^*}, \quad \forall v^T \in \mathbb{R}^T \end{aligned}$$

avec  $\Phi_Q(\cdot) = \frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi(x, \cdot) dx.$

**Notation :**  $\Delta = (\mathbb{R}^4)^{\mathfrak{D}}$ .

## PROPOSITION

Le couple  $(u^T, (\delta^{\mathfrak{D}}(\nabla_{\mathfrak{D}}^T u^T))_{\mathfrak{D}})$  est l'unique minimum de la fonctionnelle

$$J^{T, \Delta}(v^T, \tilde{\delta}) = 2 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{Q \in \mathfrak{Q}_{\mathfrak{D}}} |Q| \Phi_Q(\nabla_{\mathfrak{D}}^T v^T + B_Q \tilde{\delta}^{\mathfrak{D}}) - \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} - \sum_{\mathcal{K}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*}, \quad \forall v^T \in \mathbb{R}^T, \quad \forall \tilde{\delta} \in \Delta.$$

## PRINCIPE

Pour un diamant  $\mathfrak{D}$  fixé,  $\delta^{\mathfrak{D}}(\nabla_{\mathfrak{D}}^T u^T)$  minimise la contribution élémentaire

$$\tilde{\delta}^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^4 \mapsto \sum_{Q \in \mathfrak{Q}_{\mathfrak{D}}} |Q| \Phi_Q(\nabla_{\mathfrak{D}}^T u^T + B_Q \tilde{\delta}^{\mathfrak{D}}).$$

FONCTIONNELLE NON QUADRATIQUE (voir (Glowinsky & al.))

On se donne une famille  $\mathcal{A} = (A_Q)_{Q \in \Omega}$  de matrices  $2 \times 2$  SDP

$$\begin{aligned}
 L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{T}, \Delta}(v^{\mathcal{T}}, \tilde{\delta}, g, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} & 2 \sum_{Q \in \Omega} |Q| \Phi_Q(g_Q) - \sum_{\kappa} |\kappa| f_{\kappa} v_{\kappa} - \sum_{\kappa^*} |\kappa^*| f_{\kappa^*} v_{\kappa^*} \\
 & + 2 \sum_{Q \in \Omega} |Q| (\lambda_Q, g_Q - \nabla_D^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} - B_Q \tilde{\delta}^D) \\
 & + \sum_{Q \in \Omega} |Q| \left( A_Q (g_Q - \nabla_D^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} - B_Q \tilde{\delta}^D), (g_Q - \nabla_D^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} - B_Q \tilde{\delta}^D) \right),
 \end{aligned}$$

$$\forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \forall \tilde{\delta} \in \Delta, \forall g, \lambda \in (\mathbb{R}^2)^{\Omega}.$$

### THÉORÈME

La solution  $u^{\mathcal{T}}$  du schéma  $m$ -DDFV s'obtient à partir de l'unique point-selle du Lagrangien  $L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{T}, \Delta}$ .

- Terme d'augmentation standard :  $A_Q = r \text{Id}$ .

- Etape 1 : Trouver  $(u^{\mathcal{T},n}, \delta_{\mathcal{D}}^n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times \Delta$  solution de

$$2 \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}| \left( A_{\mathcal{Q}} (\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} + B_{\mathcal{Q}} \delta_{\mathcal{D}}^n - g_{\mathcal{Q}}^{n-1}), \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \right) \\ = \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*} + 2 \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}| (\lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}), \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| {}^t B_{\mathcal{Q}} A_{\mathcal{Q}} (B_{\mathcal{Q}} \delta_{\mathcal{D}}^n + \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} - g_{\mathcal{Q}}^{n-1}) - \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| {}^t B_{\mathcal{Q}} \lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1} = 0, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}.$$

- Etape 1 : Trouver  $(u^{\mathcal{T},n}, \delta_{\mathcal{D}}^n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times \Delta$  solution de

$$2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega} |\mathcal{Q}| \left( A_{\mathcal{Q}} (\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} + B_{\mathcal{Q}} \delta_{\mathcal{D}}^n - g_{\mathcal{Q}}^{n-1}), \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \right) \\ = \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*} + 2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega} |\mathcal{Q}| (\lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}), \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| {}^t B_{\mathcal{Q}} A_{\mathcal{Q}} (B_{\mathcal{Q}} \delta_{\mathcal{D}}^n + \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} - g_{\mathcal{Q}}^{n-1}) - \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| {}^t B_{\mathcal{Q}} \lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1} = 0, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}.$$

- Etape 2 : Sur chaque  $\mathcal{Q}$ , trouver  $g_{\mathcal{Q}}^n \in \mathbb{R}^2$  solution de

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(g_{\mathcal{Q}}^n) + \lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1} + A_{\mathcal{Q}}(g_{\mathcal{Q}}^n - \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} - B_{\mathcal{Q}} \delta_{\mathcal{D}}^n) = 0.$$

- Etape 1 : Trouver  $(u^{T,n}, \delta_D^n) \in \mathbb{R}^T \times \Delta$  solution de

$$2 \sum_{Q \in \mathfrak{Q}} |Q| \left( A_Q (\nabla_D^T u^{T,n} + B_Q \delta_D^n - g_Q^{n-1}), \nabla_D^T v^T \right) \\ = \sum_{\kappa} |\kappa| f_{\kappa} v_{\kappa} + \sum_{\kappa^*} |\kappa^*| f_{\kappa^*} v_{\kappa^*} + 2 \sum_{Q \in \mathfrak{Q}} |Q| (\lambda_Q^{n-1}, \nabla_D^T v^T), \quad \forall v^T \in \mathbb{R}^T.$$

$$\sum_{Q \in \mathfrak{Q}_D} |Q|^t B_Q A_Q (B_Q \delta_D^n + \nabla_D^T u^{T,n} - g_Q^{n-1}) - \sum_{Q \in \mathfrak{Q}_D} |Q|^t B_Q \lambda_Q^{n-1} = 0, \quad \forall D \in \mathfrak{D}.$$

- Etape 2 : Sur chaque  $Q$ , trouver  $g_Q^n \in \mathbb{R}^2$  solution de

$$\varphi_Q(g_Q^n) + \lambda_Q^{n-1} + A_Q(g_Q^n - \nabla_D^T u^{T,n} - B_Q \delta_D^n) = 0.$$

- Etape 3 : Sur chaque  $Q$  calculer  $\lambda_Q^n \in \mathbb{R}^2$  par

$$\lambda_Q^n = \lambda_Q^{n-1} + A_Q(g_Q^n - \nabla_D^T u^{T,n} - B_Q \delta_D^n).$$

## THÉORÈME

*Pour toute famille de matrices d'augmentation  $\mathcal{A}$ , l'algorithme précédent converge vers l'unique solution du schéma  $m$ -DDFV.*

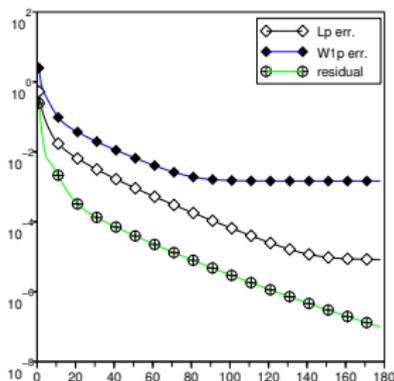
► Preuve de la convergence

Bien qu'issu de l'optimisation, le solveur itératif et le théorème sont valables aussi dans le cas **non-potentiel**.

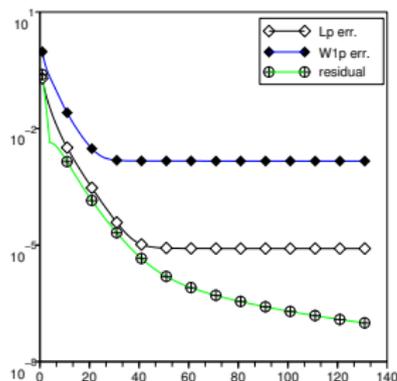
## THÉORÈME

Pour toute famille de matrices d'augmentation  $\mathcal{A}$ , l'algorithme précédent converge vers l'unique solution du schéma  $m$ -DDFV.

► Preuve de la convergence



augmentation isotrope  
 $A_Q = r \text{ Id.}$



augmentation anisotrope  
 $A_Q$  adaptée au problème

## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

► Problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-2\eta(x)\mathbf{D}\mathbf{u} + p\operatorname{Id}) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} p(x)dx = 0. & \end{array} \right. \quad (\text{S})$$

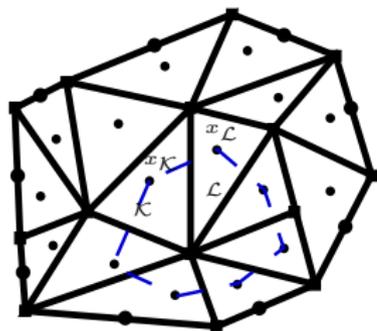
avec  $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$ ,

- $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$ ,
- $\eta \in C^2(\Omega)$  avec

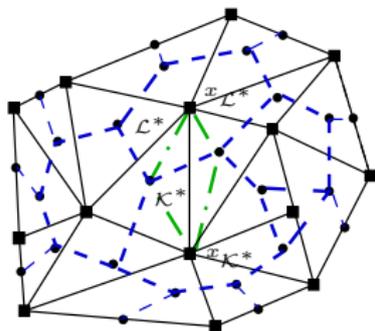
$$0 < \underline{C}_\eta \leq \eta(x) \leq \bar{C}_\eta, \quad \forall x \in \Omega.$$

► Objectifs

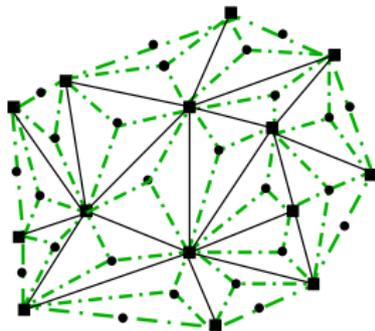
- Ecrire un schéma DDFV bien posé pour (S).
- Démontrer des estimations d'erreur pour ce problème.



Primal mesh  $\mathfrak{M}$



Dual mesh  $\mathfrak{M}^*$



Diamond mesh  $\mathfrak{D}$

Maillage primal

Maillage dual

Maillage diamant

$$\rightsquigarrow \mathbf{u}^{\mathfrak{M}} = (\mathbf{u}_{\kappa})_{\kappa \in \mathfrak{M}}$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{u}^{\mathfrak{M}^*} = (\mathbf{u}_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*}$$

$$\rightsquigarrow p^{\mathfrak{D}} = (p^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}}$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = (\mathbf{u}^{\mathfrak{M}}, \mathbf{u}^{\mathfrak{M}^*}),$$

$$\rightsquigarrow \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$$

$\rightsquigarrow$  Opérateurs discrets :  $\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$  et  $\text{div}^{\mathcal{T}}(\xi^{\mathfrak{D}})$ .

**DÉFINITION** (Conditions aux limites de Dirichlet)

$$\mathbb{E}_0^{\mathcal{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}, \forall \kappa \in \partial \mathfrak{M}, \mathbf{u}_{\kappa} = 0, \forall \kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*, \mathbf{u}_{\kappa^*} = 0 \}.$$

# LE CAS D'UNE VISCOSITÉ CONSTANTE $\eta = 1$

Inconnues en vitesse : centres et sommets

Inconnues en pression : cellules **diamants**.

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\nabla \mathbf{u} + p\operatorname{Id}) = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = \operatorname{Tr}(\nabla \mathbf{u}) = 0. \end{cases}$$

Inconnues en vitesse : centres et sommets  
Inconnues en pression : cellules **diamants**.

$$\begin{cases} \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) = \mathbf{f}^{\mathcal{T}}, \\ \operatorname{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = 0. \end{cases}$$

- On ne sait pas si le problème discret est bien posé sur un maillage général.
- En revanche, on sait que le problème est bien posé sur des maillages constitués de
  - triangles conformes à angles aigus
  - rectangles non conformes

(Delcourte '07)

# LE CAS D'UNE VISCOSITÉ CONSTANTE $\eta = 1$

Inconnues en vitesse : centres et sommets

Inconnues en pression : cellules **diamants**.

$$\begin{cases} \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) = \mathbf{f}^{\mathcal{T}}, \\ \operatorname{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = 0. \end{cases}$$

- On ne sait pas si le problème discret est bien posé sur un maillage général.
- En revanche, on sait que le problème est bien posé sur des maillages constitués de
  - triangles conformes à angles aigus
  - rectangles non conformes

(Delcourte '07)

- On n'a pas d'inégalité inf-sup uniforme pour ce problème.
- Les estimations d'erreur que l'on peut obtenir sont donc faibles (et ne concernent que sur la vitesse).

(Krell '08)

# LE CAS D'UNE VISCOSITÉ CONSTANTE $\eta = 1$

Inconnues en vitesse : centres et sommets

Inconnues en pression : cellules **diamants**.

Que faire ?

► Stabilisation de l'équation de conservation de la masse par un terme en pression (ou en des “dérivées” de la pression)

$$\begin{cases} \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) = \mathbf{f}^{\mathcal{T}}, \\ \operatorname{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) + S^{\mathcal{D}}(p^{\mathcal{D}}) = 0. \end{cases} \quad (\text{Stab})$$

- Existence et unicité pour tout maillages DDFV.
- Estimations d'erreur optimales en vitesse et pression si on choisit une stabilisation par une sorte de laplacien de pression (inspiré de **(Brezzi–Pitkäranta '84)**). **(Krell '09)**

► Alternative possible (duale) : approcher la pression aux centres et sommets et la vitesse sur les diamants, puis se ramener à des formulations en tourbillon. **(Delcourte–Domelevo–Omnès '07)**

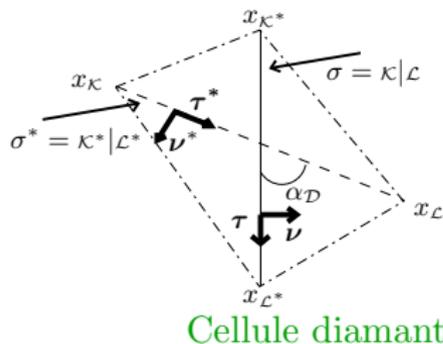
## PROBLÈME DE STOKES INCOMPRESSIBLE PAR VOLUMES FINIS

- Maillages décalés
  - Schémas MAC (Harlow–Welsh '65), (Nicolaidis '92)
  - Schéma cell-centered (Blanc-Eymard-Herbin '05)
  - DDFV (Delcourte-Domelevo-Omnès '07), (Krell '08-'09)  
≈ généralisation de MAC en maillage quelconque
- Schémas colocalisés
  - Schémas cell-centered (Eymard-Herbin-Latché '06 →'08)
  - Schémas volumes finis mixtes (Droniou-Eymard '06)

## GRADIENT DISCRET D'UN CHAMP DE VECTEURS DE $(\mathbb{R}^2)^T$

$$\nabla^{\mathcal{D}} : (\mathbb{R}^2)^T \longrightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$$

$$\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix} \mapsto (\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T)_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}}$$



$$\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T = \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left( \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{|\sigma^*|} \otimes \boldsymbol{\nu} + \frac{\mathbf{u}_{L^*} - \mathbf{u}_{K^*}}{|\sigma|} \otimes \boldsymbol{\nu}^* \right).$$

Définition équivalente

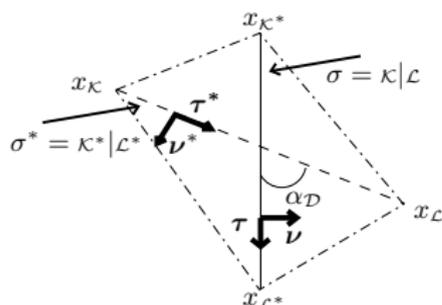
$$\begin{cases} \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T \cdot (x_L - x_K) = \mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K, \\ \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T \cdot (x_{L^*} - x_{K^*}) = \mathbf{u}_{L^*} - \mathbf{u}_{K^*}. \end{cases}$$

## DIVERGENCE DISCRÈTE D'UN CHAMP DE VECTEURS

$$\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T = \operatorname{Tr} \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T = \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left( \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{|\sigma^*|} \cdot \boldsymbol{\nu} + \frac{\mathbf{u}_{L^*} - \mathbf{u}_{K^*}}{|\sigma|} \cdot \boldsymbol{\nu}^* \right).$$

GRADIENT DISCRET D'UN CHAMP DE VECTEURS DE  $(\mathbb{R}^2)^T$

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{D}} : (\mathbb{R}^2)^T &\longrightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}} \\ \mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix} &\longmapsto (\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T)_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \end{aligned}$$



Cellule diamant

TENSEUR DES TAUX DE DÉFORMATION DISCRET

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\mathcal{D}} : (\mathbb{R}^2)^T &\longrightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}} \\ \mathbf{u}^T &\longmapsto (\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T)_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \end{aligned}$$

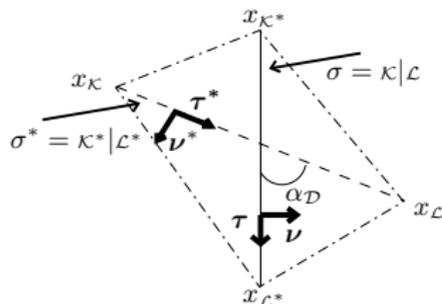
avec

$$\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T = \frac{1}{2} \left( \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T + {}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T) \right)$$

## GRADIENT DISCRET D'UN CHAMP DE VECTEURS DE $(\mathbb{R}^2)^T$

$$\nabla^{\mathfrak{D}} : (\mathbb{R}^2)^T \longrightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$$

$$\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix} \mapsto (\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^T)_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$$



Cellule diamant

## DIVERGENCE DISCRÈTE D'UN CHAMP DE MATRICES DE $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$

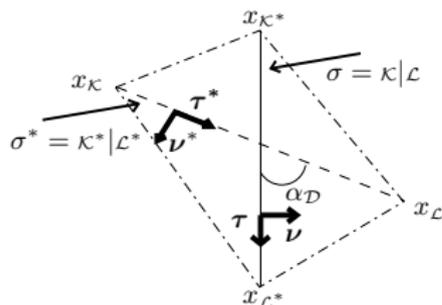
$$\operatorname{div}^T : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^T$$

$$\kappa \in \mathfrak{M}, \quad \frac{1}{|\kappa|} \int_{\kappa} \operatorname{div}(\xi(x)) dx = \frac{1}{|\kappa|} \sum_{\sigma \subset \partial \kappa} \int_{\sigma} \xi(s) \nu ds$$

$$\operatorname{div}^{\kappa} \xi^{\mathfrak{D}} = \frac{1}{|\kappa|} \sum_{\sigma \subset \partial \kappa} |\sigma| \xi^{\mathfrak{D}} \nu$$

## GRADIENT DISCRET D'UN CHAMP DE VECTEURS DE $(\mathbb{R}^2)^T$

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{D}} : (\mathbb{R}^2)^T &\longrightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}} \\ \mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix} &\mapsto (\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T)_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \end{aligned}$$



Cellule diamant

## DIVERGENCE DISCRÈTE D'UN CHAMP DE MATRICES DE $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$

$$\operatorname{div}^T : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^T$$

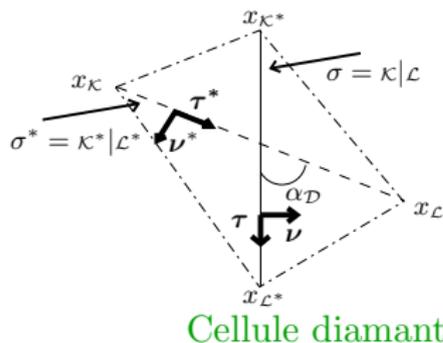
$$\kappa \in \mathfrak{M}, \quad \operatorname{div}^{\kappa} \xi^{\mathcal{D}} = \frac{1}{|\kappa|} \sum_{\sigma \subset \partial \kappa} |\sigma| \xi^{\mathcal{D}} \nu$$

$$\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*, \quad \operatorname{div}^{\kappa^*} \xi^{\mathcal{D}} = \frac{1}{|\kappa^*|} \sum_{\sigma^* \subset \partial \kappa^*} |\sigma^*| \xi^{\mathcal{D}} \nu^*$$

$$\operatorname{div}^{\mathfrak{M}} \xi^{\mathcal{D}} = \left( (\operatorname{div}^{\kappa} \xi^{\mathcal{D}})_{\kappa \in \mathfrak{M}} \right) \quad \operatorname{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi^{\mathcal{D}} = \left( (\operatorname{div}^{\kappa^*} \xi^{\mathcal{D}})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} \right).$$

GRADIENT DISCRET D'UN CHAMP DE VECTEURS DE  $(\mathbb{R}^2)^T$

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathfrak{D}} : (\mathbb{R}^2)^T &\longrightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}} \\ \mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix} &\mapsto (\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^T)_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \end{aligned}$$



OUTIL FONDAMENTAL (Dualité discrète)

$$\forall \xi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}, \forall \mathbf{u}^T \in \mathbb{E}_0^T, \quad - \int_{\Omega} \mathbf{div}^T(\xi^{\mathfrak{D}}) \cdot \mathbf{u}^T = \int_{\Omega} (\xi^{\mathfrak{D}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^T).$$

# INÉGALITÉ DE KORN DISCRÈTE

## LEMME

Pour tout  $\mathbf{u}^\mathcal{T} \in (\mathbb{R}^2)^\mathcal{T}$ ,

$$\|\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}\|_2 \leq \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}\|_2.$$

## LEMME

Pour tout  $\mathbf{u}^\mathcal{T} \in \mathbb{E}_0^\mathcal{T}$ ,

$$\operatorname{div}^\mathcal{T} \left( {}^t \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\mathcal{T} \right) = \operatorname{div}^\mathcal{T} \left( \operatorname{Tr}(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}) \operatorname{Id} \right).$$

## THÉORÈME (INÉGALITÉ DE KORN DISCRÈTE)

Pour tout  $\mathbf{u}^\mathcal{T} \in \mathbb{E}_0^\mathcal{T}$ ,

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}\|_2 \leq \sqrt{2} \|\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}\|_2.$$

► Preuve

On note

$$\eta_{\mathcal{D}} = \eta(x_{\mathcal{D}}).$$

► Sur les cellules primales  $\kappa$

$$\begin{aligned} \int_{\kappa} \mathbf{f} &= \int_{\kappa} \operatorname{div}(-2\eta \mathbf{D}\mathbf{u} + p\operatorname{Id}) = \sum_{\sigma \subset \partial\kappa} \int_{\sigma} (-2\eta \mathbf{D}\mathbf{u} + p\operatorname{Id}) \boldsymbol{\nu} \\ &\approx |\kappa| \operatorname{div}^{\kappa}(-2\eta^{\mathcal{D}} \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) := \sum_{\sigma \subset \partial\kappa} |\sigma| (-2\eta_{\mathcal{D}} \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) \boldsymbol{\nu}. \end{aligned}$$

► Sur les cellules duales  $\kappa^*$

$$\begin{aligned} \int_{\kappa^*} \mathbf{f} &= \int_{\kappa^*} \operatorname{div}(-2\eta \mathbf{D}\mathbf{u} + p\operatorname{Id}) = \sum_{\sigma^* \subset \partial\kappa^*} \int_{\sigma^*} (-2\eta \mathbf{D}\mathbf{u} + p\operatorname{Id}) \boldsymbol{\nu}^* \\ &\approx |\kappa^*| \operatorname{div}^{\kappa^*}(-2\eta^{\mathcal{D}} \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) := \sum_{\sigma^* \subset \partial\kappa^*} |\sigma^*| (-2\eta_{\mathcal{D}} \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) \boldsymbol{\nu}^* \end{aligned}$$

- Sur les cellules diamants  $\mathcal{D}$

$$\int_{\mathcal{D}} 0 = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{Tr}(\nabla \mathbf{u}) \approx |\mathcal{D}| \operatorname{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

- On stabilise cette équation à la (Brezzi–Pitkäranta '84) :

$$\operatorname{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = 0$$

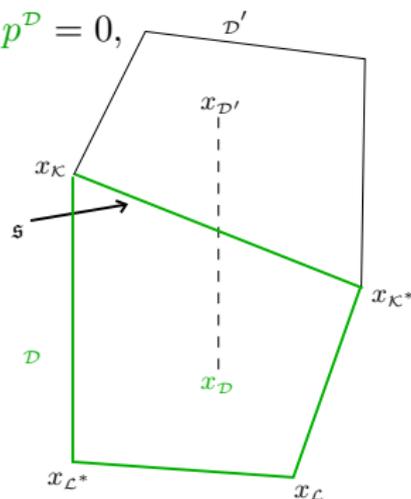
devient

$$\operatorname{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) - \lambda h_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0,$$

avec  $\lambda > 0$  et

$$\Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathcal{D}' \in \partial \mathcal{D}} \frac{h_{\mathcal{D}}^2 + h_{\mathcal{D}'}^2}{h_{\mathcal{D}}^2} (p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}}),$$

$h_{\mathcal{D}}$  est le diamètre du diamant  $\mathcal{D}$ .



$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^{\mathcal{T}} \text{ et } p^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \text{ tels que,} \\
 \operatorname{div}^{\mathfrak{M}}(-2\eta^{\mathcal{D}} D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}}, \\
 \operatorname{div}^{\mathfrak{M}^*}(-2\eta^{\mathcal{D}} D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, \\
 \operatorname{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) - \lambda h_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0, \\
 \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} |\mathcal{D}| p^{\mathcal{D}} = 0.
 \end{array} \right. \quad (\text{S-DDFV})$$

### THÉORÈME (EXISTENCE ET UNICITÉ)

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage DDFV.

Pour tout valeur de  $\lambda > 0$ , le schéma (S-DDFV) admet une *unique* solution.

► Preuve

## THÉORÈME

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage DDFV général. On note  $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$  la solution du schéma (S-DDFV).

On suppose :

- $\eta$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $\bar{\Omega}$
- La solution exacte du problème vérifie  $(\mathbf{u}, p) \in (H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$ ,

Il existe alors  $C(\text{reg}(\mathcal{T}), \mathbf{u}, p, \eta) > 0$  :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})$$

et

$$\|p - p^\mathfrak{D}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})$$

**Taux de convergence optimal.**

► La forme bilinéaire associée au problème

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}^\tau (-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \operatorname{Id}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^\tau + \int_{\Omega} (\operatorname{Tr}(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}) \tilde{p}^\mathfrak{D}.$$

On sait qu'on n'a pas la coercivité au sens traditionnel

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}).$$

On a seulement une estimée

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \lambda |p^\mathfrak{D}|_h^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D})$$

avec  $|p^\mathfrak{D}|_h^2 = \sum_{s \in \mathfrak{S}} (h_{\mathfrak{D}}^2 + h_{\mathfrak{D}'}^2) (p^{\mathfrak{D}'} - p^\mathfrak{D})^2.$

- La forme bilinéaire associée au problème

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}^\tau (-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \operatorname{Id}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^\tau + \int_{\Omega} (\operatorname{Tr}(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) - \lambda h_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}) \tilde{p}^\mathfrak{D}.$$

On sait qu'on n'a pas la coercivité au sens traditionnel

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}).$$

On a seulement une estimée

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \lambda |p^\mathfrak{D}|_h^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D})$$

avec  $|p^\mathfrak{D}|_h^2 = \sum_{s \in \mathfrak{S}} (h_\mathfrak{D}^2 + h_{\mathfrak{D}'}^2) (p^{\mathfrak{D}'} - p^\mathfrak{D})^2.$

- Idée : Trouver  $\tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}$  ( $\approx \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}$ ) pour avoir l'inégalité inf-sup

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2 \leq C_2 \frac{B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D})}{\|\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{u}}^\tau\|_2 + \|\tilde{p}^\mathfrak{D}\|_2}.$$

## PROPOSITION

Pour tout  $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$  avec  $\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| p^\mathfrak{D} = 0$ , il existe

$(\tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$  et  $C_1, C_2 > 0$  :

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{u}}^\tau\|_2 + \|\tilde{p}^\mathfrak{D}\|_2 \leq C_1 (\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2),$$

et

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}).$$

► Preuve

## PROPOSITION

Pour tout  $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$  avec  $\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| p^\mathfrak{D} = 0$ , il existe

$(\tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$  et  $C_1, C_2 > 0$  :

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{u}}^\tau\|_2 + \|\tilde{p}^\mathfrak{D}\|_2 \leq C_1 (\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2),$$

et

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}).$$

► Preuve

## COROLLAIRE

La solution  $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$  du schéma (S-DDFV), vérifie

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C \|\mathbf{f}^\tau\|_2^2.$$

## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

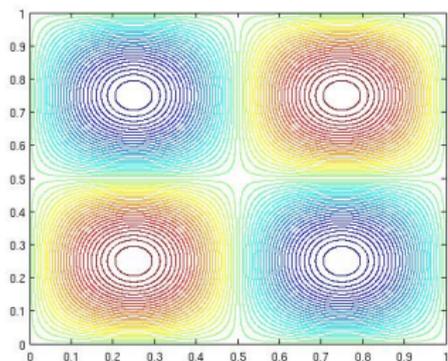
## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \\ -\frac{1}{2} \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \end{pmatrix},$$

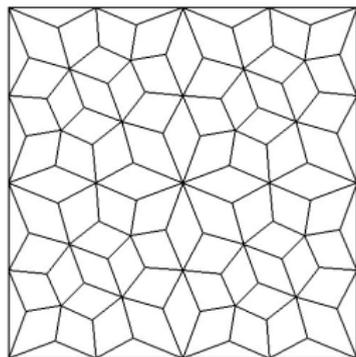
$$p(x, y) = \frac{1}{8} \cos(4\pi x) \sin(4\pi y),$$

$$\eta(x, y) = 1.$$



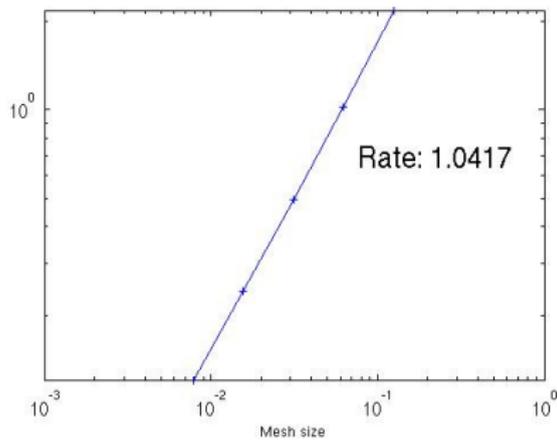
Lignes de courant

Maillage



$$\|p - p^{\mathfrak{D}}\|_2 / \|p\|_2$$

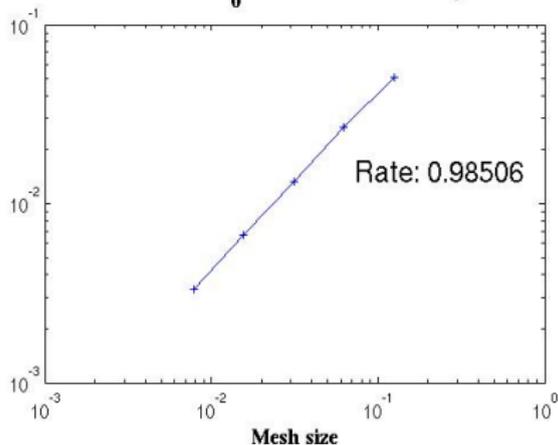
Error in  $L^2$ -norm of the pressure



Ordre = 1.04

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{H_0^1} / \|\mathbf{u}\|_{H_0^1}$$

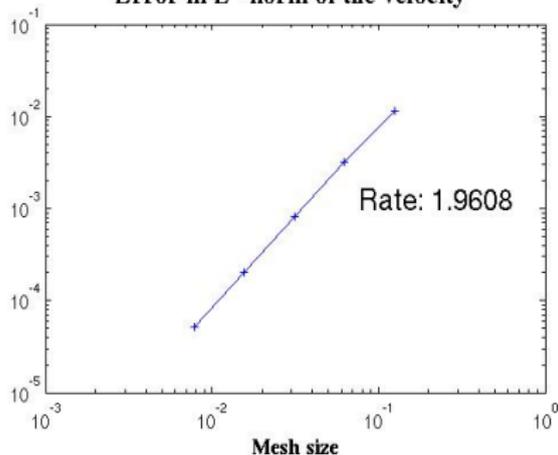
Error in  $H_0^1$ -norm of the velocity



Ordre = 0.99

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 / \|\mathbf{u}\|_2$$

Error in  $L^2$ -norm of the velocity

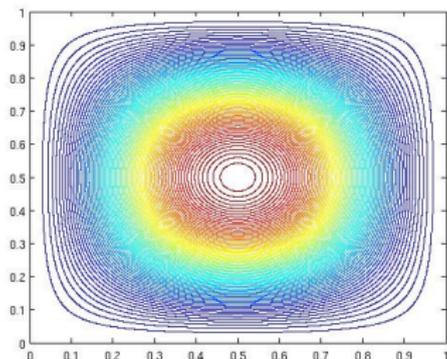


Ordre = 1.96

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 1000x^2(1-x)^2 2y(1-y)(1-2y) \\ -1000y^2(1-y)^2 2x(1-x)(1-2x) \end{pmatrix},$$

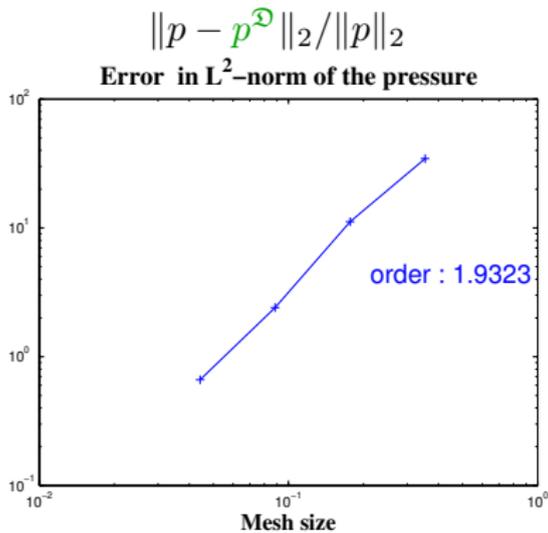
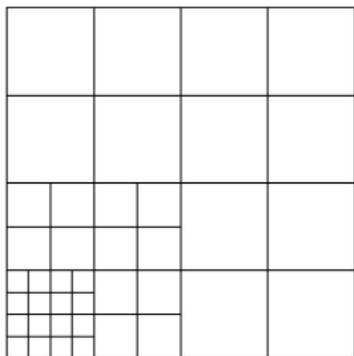
$$p(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{2}{3},$$

$$\eta(x, y) = 2x + y + 1.$$



Lignes de courant

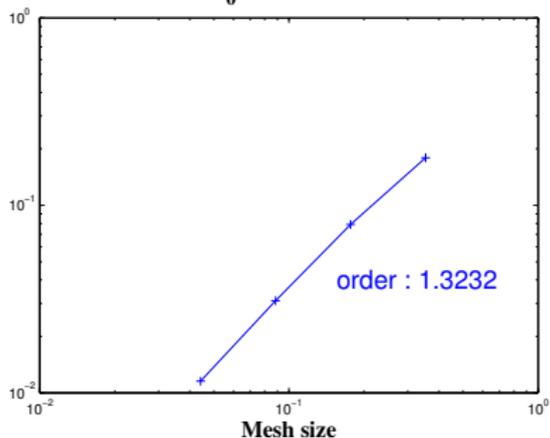
Maillage



Ordre = 1.9

$$\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{H_0^1}}{\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}}$$

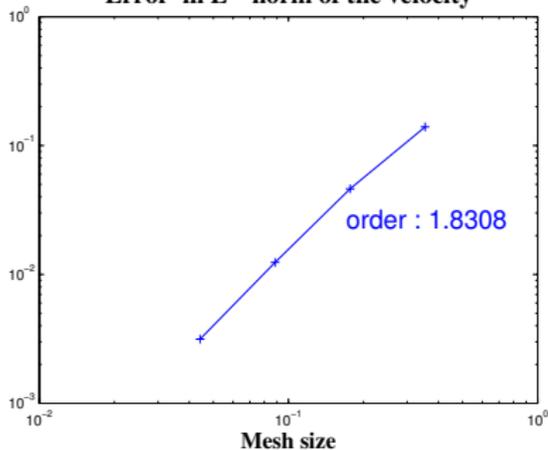
Error in  $H_0^1$ -norm of the velocity



Ordre = 1.3

$$\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2}$$

Error in  $L^2$ -norm of the velocity

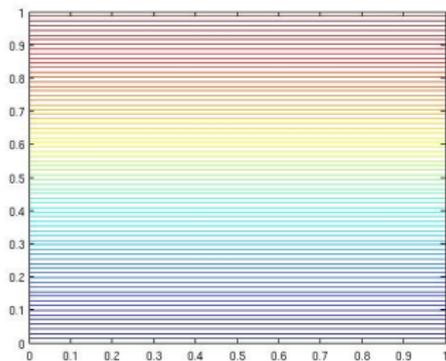


Ordre = 1.8

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \begin{cases} y^2 - 0.5y & \text{pour } y > 0.5 \\ 10^4(y^2 - 0.5y) & \text{sinon.} \end{cases} \\ 0 \end{pmatrix}$$

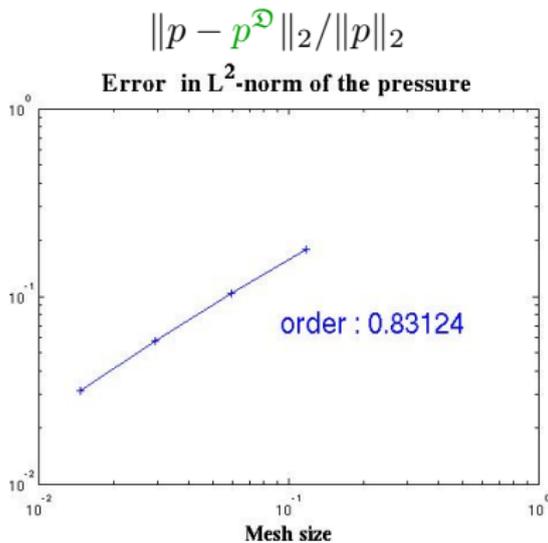
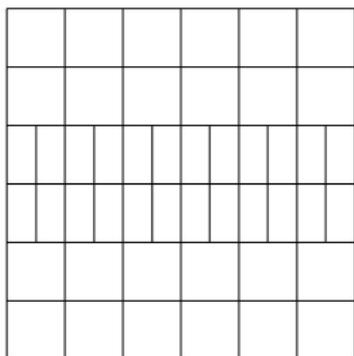
$$p(x, y) = 2x - 1,$$

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y > 0.5 \\ 10^{-4} & \text{sinon.} \end{cases}$$



Lignes de courant

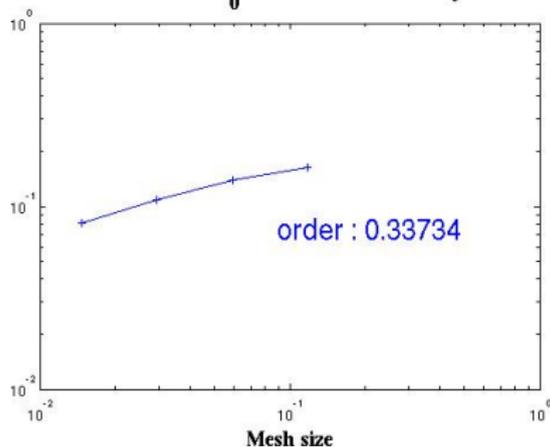
Maillage



Ordre = 0.83

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{H_0^1} / \|\mathbf{u}\|_{H_0^1}$$

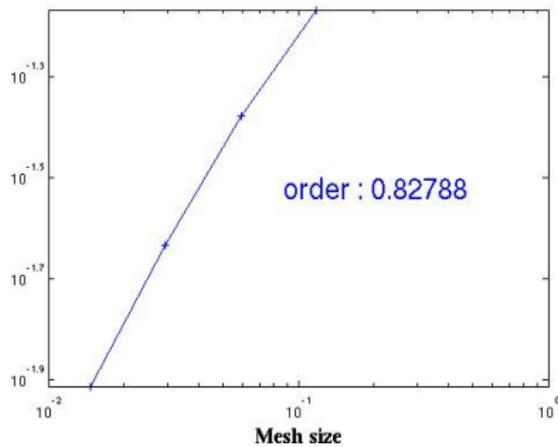
Error in  $H_0^1$ -norm of the velocity



Ordre = 0.34

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 / \|\mathbf{u}\|_2$$

Error in  $L^2$ -norm of the velocity



Ordre = 0.83

## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

## LE PROBLÈME

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-2\eta_i \mathbf{D}\mathbf{u} + p\mathbf{Id}) = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega_i, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} p(x) dx = 0, \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \llbracket 2\eta \mathbf{D}\mathbf{u} - p\mathbf{Id} \rrbracket \vec{\mathbf{n}} = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (S_{\Gamma})$$

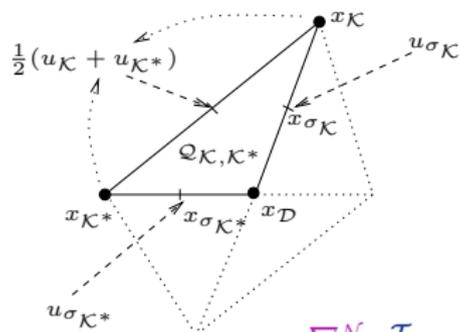
- $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  et  $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ ,
- $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ ,
- $\vec{\mathbf{n}}$  est une normale à  $\Gamma$  et  $\llbracket a \rrbracket = (a|_{\Omega_1} - a|_{\Omega_2})|_{\Gamma}$  est le saut sur  $\Gamma$ .
- Viscosité  $\eta$  constante par morceaux

$$\eta = \begin{cases} \eta_1 > 0, & \text{dans } \Omega_1, \\ \eta_2 > 0, & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

**HYPOTHÈSE SIMPLIFICATRICE** : la pression est continue sur  $\Gamma$ .

► On construit  $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$  constant sur chaque quart de diamant

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} 1_{\mathcal{Q}} \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}},$$



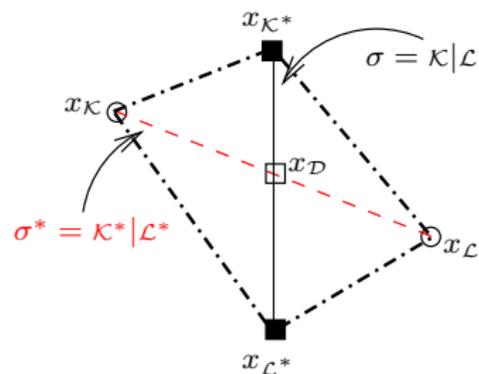
$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathcal{Q}_{K,K^*}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) \cdot \frac{1}{2}(x_{\mathcal{D}} - x_K) &= \mathbf{u}_{\sigma_{K^*}} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_K + \mathbf{u}_{K^*}), \\ (\nabla_{\mathcal{Q}_{K,K^*}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) \cdot \frac{1}{2}(x_{\mathcal{D}} - x_{K^*}) &= \mathbf{u}_{\sigma_K} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_K + \mathbf{u}_{K^*}). \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + {}^t(B_{\mathcal{Q}} \boldsymbol{\delta}^{\mathcal{D}}), \quad \forall \mathcal{Q} \subset \mathcal{D}.$$

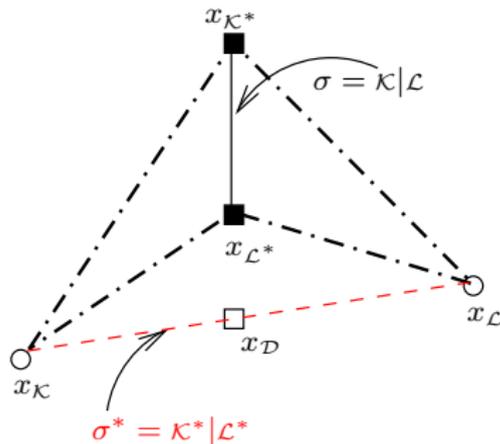
- les  $B_{\mathcal{Q}}$  sont les mêmes qu'avant (ne dépendent que de  $\mathcal{T}$ ).
- $\boldsymbol{\delta}^{\mathcal{D}} = {}^t(\boldsymbol{\delta}_K, \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{L}}, \boldsymbol{\delta}_{K^*}, \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{L}^*}) \in M_{4,2}(\mathbb{R})$  est à déterminer.
- $B_{\mathcal{Q}_{K,K^*}} = \frac{1}{|\mathcal{Q}_{K,K^*}|} (|\sigma_K| \boldsymbol{\nu}^*, 0, |\sigma_{K^*}| \boldsymbol{\nu}, 0).$

$$\rightsquigarrow \mathbb{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \left( \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + {}^t \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \right), \quad \forall \mathcal{Q} \subset \mathcal{D}.$$

Cellules diamants convexes



Cellules diamants **non** convexes



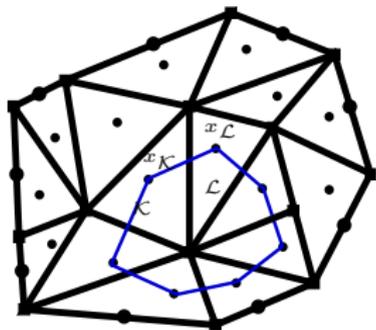
Définition des quarts de diamants ?

**Alternative** → Maillage dual barycentrique :

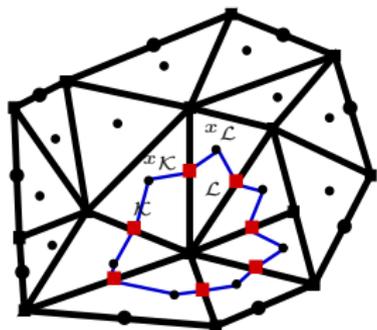
(Hermeline '00), (Delcourte–Domelevo–Omnes '07)

Alternative  $\longrightarrow$  Maillage dual barycentrique :

(Hermeline '00), (Delcourte–Domelevo–Omnes '07)

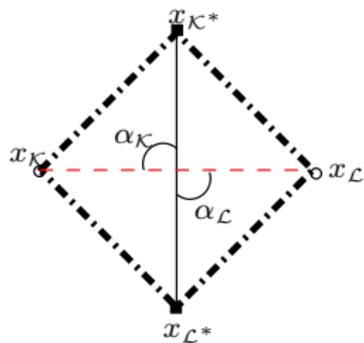


Maillage dual classique



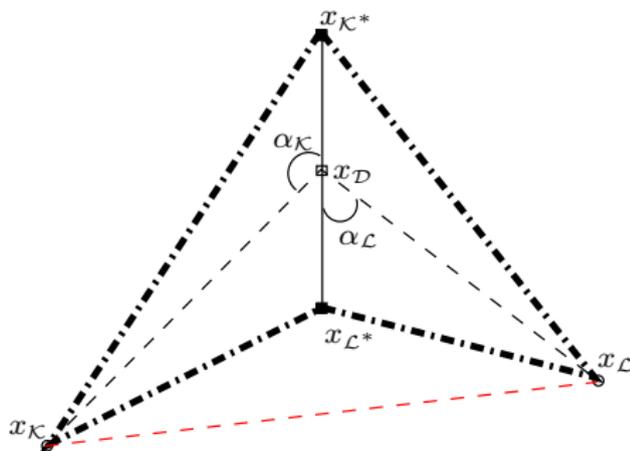
Maillage dual barycentrique

# MAILLAGE DUAL BARYCENTRIQUE

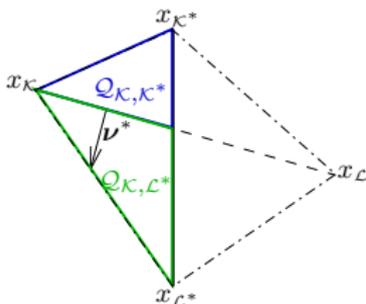


$$\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{L}}$$

---  $\mathcal{D}$



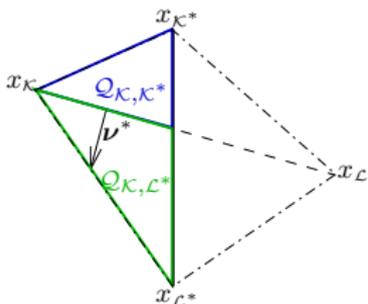
$$\alpha_{\mathcal{K}} \neq \alpha_{\mathcal{L}}$$



### CONSERVATIVITÉ LOCALE DES FLUX EXACTS

A travers  $\sigma_K$ , elle s'écrit

$$\int_{\sigma_K} \eta|_{\overline{Q_{K,K^*}}} \text{Du}|_{\overline{Q_{K,K^*}}} \cdot \nu^* ds = \int_{\sigma_K} \eta|_{\overline{Q_{K,L^*}}} \text{Du}|_{\overline{Q_{K,L^*}}} \cdot \nu^* ds.$$



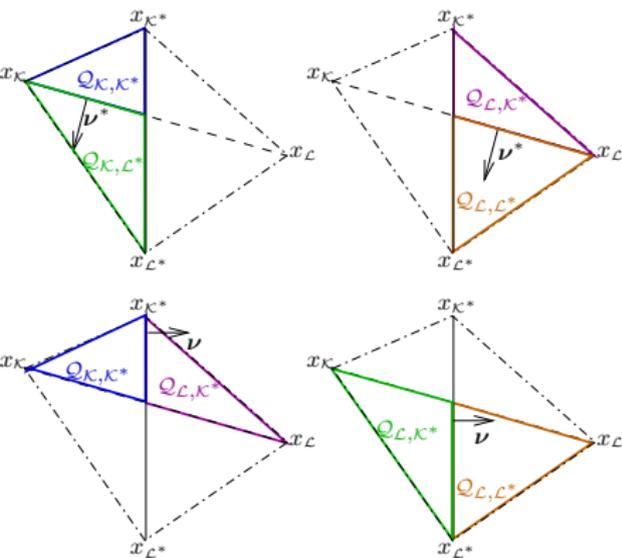
► CONSERVATIVITÉ LOCALE DES FLUX NUMÉRIQUES

On note  $\eta_{\mathcal{Q}} = \eta(x_{\mathcal{Q}})$ .

On impose alors à la matrice  $4 \times 2$ ,  $\delta^{\mathcal{D}}$  de vérifier

$$\underbrace{\eta_{\mathcal{Q}_{K,K^*}}(2\mathbf{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{K,K^*}}\delta^{\mathcal{D}} + {}^t(B_{\mathcal{Q}_{K,K^*}}\delta^{\mathcal{D}}))}_{\stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{\mathcal{Q}_{K,K^*}}(\delta^{\mathcal{D}})} \boldsymbol{\nu}^*$$

$$= \underbrace{\eta_{\mathcal{Q}_{K,L^*}}(2\mathbf{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{K,L^*}}\delta^{\mathcal{D}} + {}^t(B_{\mathcal{Q}_{K,L^*}}\delta^{\mathcal{D}}))}_{\stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{\mathcal{Q}_{K,L^*}}(\delta^{\mathcal{D}})} \boldsymbol{\nu}^*$$



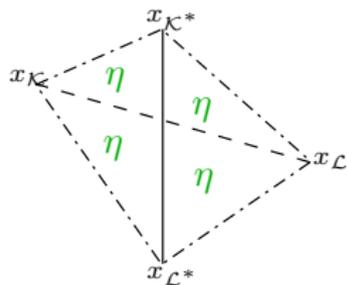
$$\begin{cases} \varphi_{Q_{K,K^*}}(\delta^{\mathcal{D}})\nu^* = \varphi_{Q_{K,L^*}}(\delta^{\mathcal{D}})\nu^* \\ \varphi_{Q_{L,K^*}}(\delta^{\mathcal{D}})\nu^* = \varphi_{Q_{L,L}}(\delta^{\mathcal{D}})\nu^* \\ \varphi_{Q_{K,K^*}}(\delta^{\mathcal{D}})\nu = \varphi_{Q_{L,K^*}}(\delta^{\mathcal{D}})\nu \\ \varphi_{Q_{K,L}}(\delta^{\mathcal{D}})\nu = \varphi_{Q_{L,L}}(\delta^{\mathcal{D}})\nu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{Q \in \Omega_{\mathcal{D}}} |Q| \varphi_Q(\delta^{\mathcal{D}}) B_Q = 0. \quad (*)$$

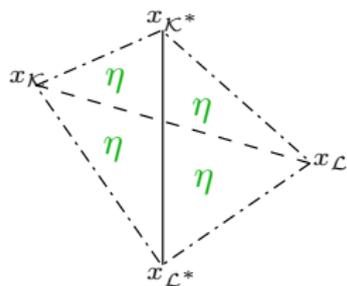
## PROPOSITION

Pour tout  $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$  et tout  $D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_{2,2}^S(\mathbb{R})$ , il existe au moins un  $\delta^{\mathcal{D}}(D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}},2}(\mathbb{R})$  vérifiant  $(*)$ .

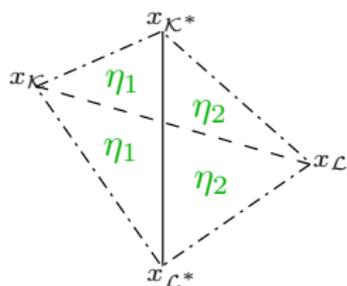
► Preuve



$\Rightarrow \delta^{\mathcal{D}} = 0$  et donc  $D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \forall \mathcal{Q}$ .



$$\Rightarrow \delta^{\mathcal{D}} = 0 \text{ et donc } D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \forall \mathcal{Q}.$$



$$\Rightarrow \delta_{\mathcal{K}} = 0, \quad \delta_{\mathcal{L}} = 0 \quad \text{et} \quad \delta_{\mathcal{K}^*} = \delta_{\mathcal{L}^*}.$$

Tous les calculs se font alors à la main (ou avec MAPLE ...).

# COMPARAISON ENTRE LES TENSEURS DES TAUX DE DÉFORMATION DISCRETS

## PROPOSITION

*Il existe  $C(\text{reg}(\mathcal{T}), \eta) > 0$ , telle que pour tout  $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$  :*

$$\|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

# COMPARAISON ENTRE LES TENSEURS DES TAUX DE DÉFORMATION DISCRETS

## PROPOSITION

Il existe  $C(\text{reg}(\mathcal{T}), \eta) > 0$ , telle que pour tout  $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$  :

$$\|\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|\mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \|\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

- La première inégalité s'obtient à partir de :

$$|\mathcal{D}| \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}.$$

- Deuxième inégalité : on utilise la définition des nouveaux gradients

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \eta_{\mathcal{Q}} \|\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \eta_{\mathcal{Q}} (\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

On remplace dans le schéma S-DDFV, le tenseur des contraintes visqueuses discret  $\eta^{\mathfrak{D}} \mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$  par

$$\varphi_{\mathfrak{D}}(\eta, \mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathfrak{D}}} |\mathfrak{Q}| \eta_{\mathfrak{Q}} \left( \underbrace{\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \frac{1}{2} \left[ B_{\mathfrak{Q}} \delta^{\mathfrak{P}}(\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) + {}^t(B_{\mathfrak{Q}} \delta^{\mathfrak{P}}(\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})) \right]}_{= \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}} \right)$$

Trouver  $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^{\mathcal{T}}$  et  $p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$  tels que,

$$\operatorname{div}^{\mathfrak{M}}(-2\varphi_{\mathfrak{D}}(\eta, \mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) + p^{\mathfrak{D}} \operatorname{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}},$$

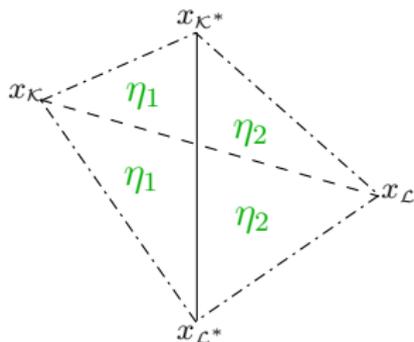
$$\operatorname{div}^{\mathfrak{M}*}(-2\varphi_{\mathfrak{D}}(\eta, \mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) + p^{\mathfrak{D}} \operatorname{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}*}, \quad (\text{S-m-DDFV})$$

$$\operatorname{Tr}(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0,$$

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} |\mathfrak{D}| p^{\mathfrak{D}} = 0.$$

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\eta, \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \eta_{\mathcal{Q}} \left( \underbrace{\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \frac{1}{2} \left[ B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) + {}^t(B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})) \right]}_{= \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}} \right)$$

SI  $\eta$  EST CONSTANTE PAR MAILLES PRIMALES



$$\varphi_{\mathcal{D}} \left( \eta, \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{(h_1+h_2)\eta_1\eta_2}{h_2\eta_1+h_1\eta_2} \alpha & \frac{(h_1+h_2)\eta_1\eta_2}{h_2\eta_1+h_1\eta_2} \gamma \\ \frac{(h_1+h_2)\eta_1\eta_2}{h_2\eta_1+h_1\eta_2} \gamma & \frac{(h_1+h_2)\eta_1\eta_2}{h_1+h_2} \beta \end{pmatrix}, \text{ dans le repère } (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}^*).$$

CAS D'UN MAILLAGE CARTÉSIEN : généralisation de MAC

## THÉORÈME

*Pour tout maillage  $\mathcal{T}$ , il existe une unique solution  $(\mathbf{u}^\mathcal{T}, p^\mathcal{T})$  au schéma S-m-DDFV pour tout  $\lambda > 0$ .*

► Preuve

## THÉORÈME (NOUVELLE INÉGALITÉ DE KORN DISCRÈTE)

*Il existe une constante  $C(\text{reg}(\mathcal{T})) > 0$  telle que, pour tout  $\mathbf{u}^\mathcal{T} \in \mathbb{E}_0^\mathcal{T}$*

$$\|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \|\mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

► Preuve

## THÉORÈME

On suppose que  $\eta$  est Lipschitzienne sur chaque quart de diamant :

$$|\eta(x) - \eta(x')| \leq C_\eta |x - x'|, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}, \forall x, x' \in \bar{\mathcal{Q}}.$$

Si  $\mathbf{u}$  est régulière sur chaque quart de diamant  $\mathcal{Q}$  et si  $p \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|\nabla \mathbf{u} - \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq C \text{ size}(\mathcal{T}),$$

$$\|p - p^{\mathfrak{D}}\|_2 \leq C \text{ size}(\mathcal{T}).$$

## REMARQUES

- L'ordre 1 est optimal.
- La construction du schéma et son analyse se généralise au cas (plus réaliste) où on prend en compte les discontinuités de pression.

- Inégalité de Korn discrète.
- Stabilité du schéma S-m-DDFV.
- **Estimation de consistance.** Si  $\mathbf{u}$  est régulière **sur chaque quart de diamant**  $\mathcal{Q}$ , la difficulté principale est la preuve de la consistance du nouveau gradient

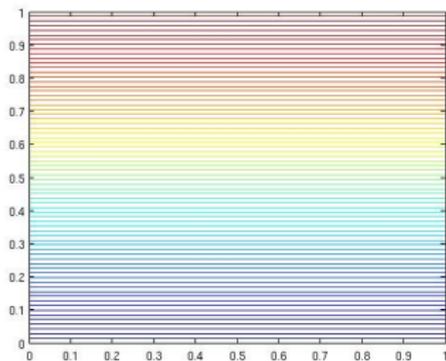
$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} |D\mathbf{u}(x) - D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}|^2 dx \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}|^2) dx.$$

C'est délicat car la construction des nouveaux gradients ne fait intervenir que leur partie symétrique.

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \begin{cases} y^2 - 0.5y & \text{pour } y > 0.5 \\ 10^4(y^2 - 0.5y) & \text{sinon.} \end{cases} \\ 0 \end{pmatrix}$$

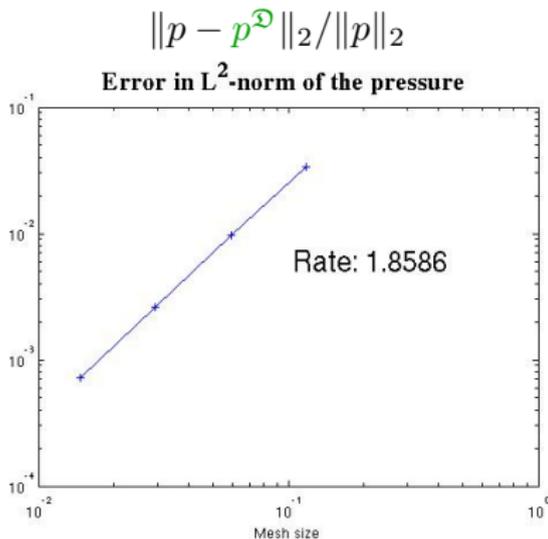
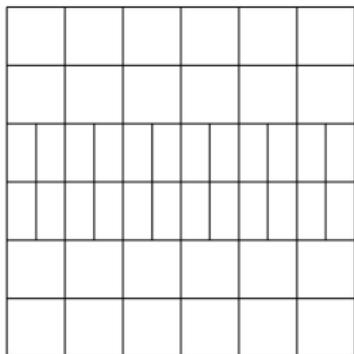
$$p(x, y) = 2x - 1,$$

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y > 0.5 \\ 10^{-4} & \text{sinon.} \end{cases}$$



Lignes de courant

Maillage

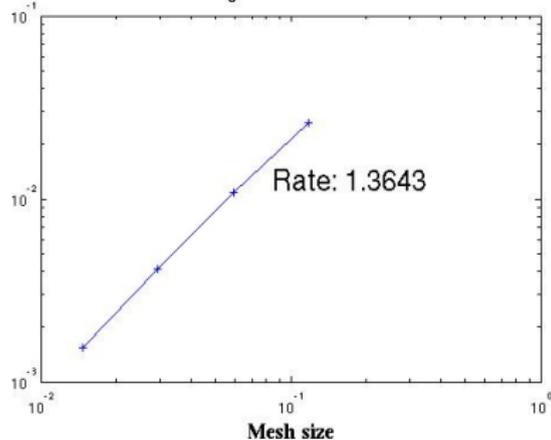


Ordre pour S-m-DDFV = 1.85

Ordre pour S-DDFV = 0.83

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{H_0^1} / \|\mathbf{u}\|_{H_0^1}$$

Error in  $H_0^1$ -norm of the velocity

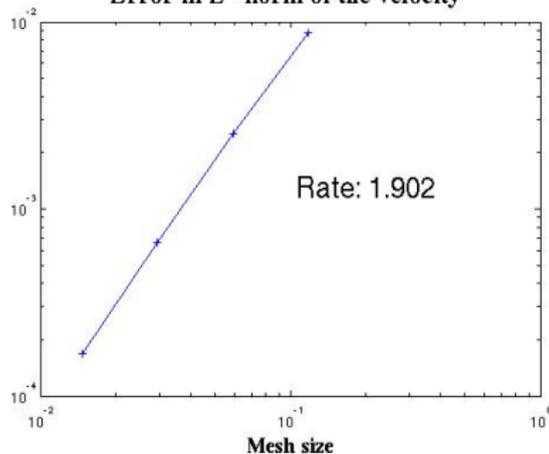


Ordre pour S-m-DDFV = 1.36

Ordre pour S-DDFV = 0.34

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 / \|\mathbf{u}\|_2$$

Error in  $L^2$ -norm of the velocity



Ordre pour S-m-DDFV = 1.9

Ordre pour S-DDFV = 0.83

## 1 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LA DIFFUSION SCALAIRE

- Introduction
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV
  - La méthode en 1D
  - La méthode en 2D
  - DDFV vs m-DDFV
  - Un solveur non-linéaire

## 2 LES SCHÉMAS DDFV ET M-DDFV POUR LE PROBLÈME DE STOKES

- La méthode DDFV pour Stokes
- Résultats numériques
- Le problème avec viscosité discontinue
- Bilan

- Grâce à un **terme stabilisant** (d'autres choix sont possibles), l'approche DDFV avec vitesse aux centres et aux sommets et pression sur les diamants a toutes les bonnes propriétés attendues :
  - Système bien posé et stable sur des maillages très généraux.
  - Structure algébrique du système discret identique à celle du problème continu et à celle d'autres schémas plus connus
    - ↪ adaptation de solveurs et préconditionneurs efficaces
  - **Estimations d'erreur :**
    - Ordre 1 en pression en norme  $L^2$
    - Ordre 1 en vitesse en norme  $H^1$ .
    - Numériquement : ordre 2 en vitesse en norme  $L^2$ .
  - Implémentation en parcourant les arêtes (=les diamants).
- **Viscosité discontinue :** on garde les bonnes propriétés en adoptant l'approche S-m-DDFV.  
Celle-ci est assez lourde sur le papier mais indolore numériquement.

- **Extensions possibles**

- Prise en compte des discontinuités de pression.
- Conditions aux limites en contrainte ou sauts de contrainte dans le système (tension de surface).
- Dépendance non-linéaire de la viscosité en fonction de  $D\mathbf{u}$ .
- Ajout du terme non-linéaire  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  de Navier-Stokes en utilisant les flux de masse stabilisés.
- Le cas 3D.

FIN DE LA TROISIÈME PARTIE !

► On veut montrer que  $\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \sqrt{2} \|\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$  :

$$2\|\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 = \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \int_{\Omega} ({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) : \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

► On veut montrer que  $\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \sqrt{2} \|\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$  :

$$2\|\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 = \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \int_{\Omega} ({}^t(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

On utilise la formule de Stokes discrète

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ({}^t(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) &= - \int_{\Omega} \mathbf{div}^{\mathcal{T}} ({}^t(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})) \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{div}^{\mathcal{T}} (\text{Tr}(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) \text{Id}) \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

► On veut montrer que  $\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \sqrt{2} \|\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$  :

$$2\|\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 = \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \int_{\Omega} ({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) : \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

On utilise la formule de Stokes discrète

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) : \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) &= - \int_{\Omega} \mathbf{div}^{\mathcal{T}} ({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})) \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{div}^{\mathcal{T}} (\text{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) \text{Id}) \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

A nouveau par Stokes discret et  $\text{Tr} \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = (\text{Id} : \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})$  :

$$\int_{\Omega} ({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) : \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \int_{\Omega} (\text{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) \text{Id} : \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \|\text{Tr} \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 \geq 0.$$

◀ Retour

Soient  $\mathbf{u}^\mathcal{T} \in \mathbb{E}_0^\mathcal{T}$  et  $p^\mathcal{D} \in \mathbb{R}^\mathcal{D}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}^{\text{mi}}(-2\eta^\mathcal{D} \mathbf{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\mathcal{T} + p^\mathcal{D} \operatorname{Id}) = 0, \\ \operatorname{div}^{\text{mi}*}(-2\eta^\mathcal{D} \mathbf{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\mathcal{T} + p^\mathcal{D} \operatorname{Id}) = 0, \\ \operatorname{Tr}(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}) - \lambda h_\mathcal{D}^2 \Delta^\mathcal{D} p^\mathcal{D} = 0, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} |D| p^\mathcal{D} = 0. \end{array} \right.$$

Soient  $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0^\tau$  et  $p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$  tels que

$$\begin{cases} \operatorname{div}^{\mathfrak{m}}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \operatorname{Id}) = 0, \\ \operatorname{div}^{\mathfrak{m}^*}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \operatorname{Id}) = 0, \\ \operatorname{Tr}(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} |\mathfrak{D}| p^\mathfrak{D} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}^\tau(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \operatorname{Id}) \cdot \mathbf{u}^\tau \\ = \int_{\Omega} (2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau : \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) - \int_{\Omega} \operatorname{Tr}(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) p^\mathfrak{D}. \end{aligned}$$

Soient  $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0^\tau$  et  $p^\mathcal{D} \in \mathbb{R}^\mathcal{D}$  tels que

$$\begin{cases} \operatorname{div}^{\text{mi}}(-2\eta^\mathcal{D} D^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathcal{D} \operatorname{Id}) = 0, \\ \operatorname{div}^{\text{mi}*}(-2\eta^\mathcal{D} D^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathcal{D} \operatorname{Id}) = 0, \\ \operatorname{Tr}(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) - \lambda h_{\mathcal{D}}^2 \Delta^\mathcal{D} p^\mathcal{D} = 0, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} |p^\mathcal{D}| = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}^\tau(-2\eta^\mathcal{D} D^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathcal{D} \operatorname{Id}) \cdot \mathbf{u}^\tau \\ = \int_{\Omega} (2\eta^\mathcal{D} D^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau : D^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) - \int_{\Omega} \operatorname{Tr}(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) p^\mathcal{D}. \end{aligned}$$

L'équation de conservation de la masse donne

$$- \int_{\Omega} \operatorname{Tr}(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) p^\mathcal{D} = - \int_{\Omega} \lambda h_{\mathcal{D}}^2 \Delta^\mathcal{D} p^\mathcal{D} p^\mathcal{D} = \lambda |p^\mathcal{D}|_h^2,$$

$$\text{où } |p^\mathcal{D}|_h^2 = \sum_{s \in \mathcal{G}} (h_s^2 + h_{s'}^2) (p^{s'} - p^s)^2 \sim h^2 \|p\|_{H^1}^2.$$

On utilise l'inégalité de Korn discrète

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(-2\eta^{\mathcal{D}} D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \geq \underline{C}_{\eta} \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \lambda |p^{\mathcal{D}}|_h^2.$$

On utilise l'inégalité de Korn discrète

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(-2\eta^{\mathcal{D}} \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \geq \underline{C}_{\eta} \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \lambda |p^{\mathcal{D}}|_h^2.$$

On trouve donc

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 = 0 \quad \text{et} \quad |p^{\mathcal{D}}|_h^2 = 0.$$

D'où  $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \mathbf{0}$  et  $p^{\mathcal{D}} = c$ .

Par la condition de normalisation  $\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} |_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0$ , on obtient  $p^{\mathcal{D}} = 0$ .

◀ Retour

## LEMME

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage de  $\Omega$ . Il existe  $C > 0$  qui dépend seulement de  $\text{reg}(\mathcal{T})$ , telle que pour tout  $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2$  et tout  $p^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ , on a

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} (\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}^{\mathcal{T}}) - \text{div}(\mathbf{v})) \, dx \leq C |p^{\mathcal{D}}|_h \|\mathbf{v}\|_{H^1}.$$

où  $\mathbf{v}^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} \mathbf{v}$  est la projection-moyenne de  $\mathbf{v}$  sur le maillage. [▶ Preuve](#)

## LEMME

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage de  $\Omega$ . Il existe  $C > 0$  qui dépend seulement de  $\text{reg}(\mathcal{T})$ , telle que pour tout  $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2$  et tout  $p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ , on a

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} (\text{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{v}^{\mathcal{T}}) - \text{div}(\mathbf{v})) \, dx \leq C |p^{\mathfrak{D}}|_h \|\mathbf{v}\|_{H^1}.$$

où  $\mathbf{v}^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} \mathbf{v}$  est la projection-moyenne de  $\mathbf{v}$  sur le maillage. [▶ Preuve](#)

- D'après le lemme de Necas, il existe  $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2$  tel que

$$\text{div}(\mathbf{v}) = -p^{\mathfrak{D}}, \quad \|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq C \|p^{\mathfrak{D}}\|_{L^2}.$$

- On calcule  $B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, 0)$  et, avec le lemme, on trouve

$$B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, 0) \geq C_1 \|p^{\mathfrak{D}}\|_{L^2}^2 - C_2 \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 - C_3 |p^{\mathfrak{D}}|_h^2.$$

- On a déjà vu que

$$B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}) \geq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 + \lambda |p^{\mathfrak{D}}|_h^2.$$

- Pour  $\xi > 0$  assez petit, on pose  $\tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}} = \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \xi \mathbf{v}^{\mathcal{T}}$ ,  $\tilde{p}^{\mathfrak{D}} = p^{\mathfrak{D}}$ . [◀ Retour](#)

- Expression de la divergence discrète de  $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2|\mathcal{D}|} \left( |\sigma| (\mathbf{v}_{\mathcal{L}} - \mathbf{v}_{\mathcal{K}}) \cdot \boldsymbol{\nu} + |\sigma^*| (\mathbf{v}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*}) \cdot \boldsymbol{\nu}^* \right). \\ \implies \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}} &= \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{v}_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{D}, \mathfrak{s}}. \end{aligned}$$

- Expression de la divergence discrète de  $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2|\mathcal{D}|} \left( |\sigma| (\mathbf{v}_{\mathcal{L}} - \mathbf{v}_{\mathcal{K}}) \cdot \boldsymbol{\nu} + |\sigma^*| (\mathbf{v}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*}) \cdot \boldsymbol{\nu}^* \right). \\ \implies \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}} &= \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{v}_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{D}, \mathfrak{s}}. \end{aligned}$$

- Par conservativité locale :

$$\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}) = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{s}} \underbrace{\frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{s}} \left( \frac{\mathbf{v}_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*}}{2} - \mathbf{v} \right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{D}, \mathfrak{s}}}_{\stackrel{\text{def}}{=} R_{\mathfrak{s}}(\mathbf{v})}$$

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} p^{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}) = \sum_{\mathfrak{s}} m_{\mathfrak{s}} (p^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{D}'}) R_{\mathfrak{s}}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathfrak{s}}.$$

- Par conservativité locale :

$$\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}) = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{s}} \underbrace{\frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{s}} \left( \frac{\mathbf{v}_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*}}{2} - \mathbf{v} \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} R_{\mathfrak{s}}(\mathbf{v})} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{D}, \mathfrak{s}}.$$

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} p^{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}) = \sum_{\mathfrak{s}} m_{\mathfrak{s}} (p^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{D}'}) R_{\mathfrak{s}}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathfrak{s}}.$$

- Par Cauchy-Schwarz on a

$$\left| \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} p^{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}) \right| \leq \underbrace{\left( \sum_{\mathfrak{s}} m_{\mathfrak{s}}^2 (p^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{D}'})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq C |p^{\mathfrak{D}}|_h} \underbrace{\left( \sum_{\mathfrak{s}} |R_{\mathfrak{s}}(\mathbf{v})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq C \|\mathbf{v}\|_{H^1}}$$

◀ Retour

On a un problème linéaire

$$\sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathfrak{Q}| \varphi_{\mathfrak{Q}}(\delta^{\mathcal{D}}) B_{\mathfrak{Q}} = 0 \iff \mathcal{A} \delta^{\mathcal{D}} = \mathcal{B}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T),$$

avec  $\mathcal{A} : M_{4,2}(\mathbb{R}) \mapsto M_{2,4}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{B} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \mapsto M_{4,2}(\mathbb{R})$ .

On a un problème linéaire

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \varphi_{\mathcal{Q}}(\delta^{\mathcal{D}}) B_{\mathcal{Q}} = 0 \iff \mathcal{A} \delta^{\mathcal{D}} = \mathcal{B}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}),$$

avec  $\mathcal{A} : M_{4,2}(\mathbb{R}) \mapsto M_{2,4}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{B} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \mapsto M_{4,2}(\mathbb{R})$ .

ETUDIONS LE NOYAU DE  $\mathcal{A}$

On multiplie par  $\delta^{\mathcal{D}}$  et on prend la trace

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \underbrace{(2\eta_{\mathcal{Q}} \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \eta_{\mathcal{Q}} (B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}}))}_{\varphi_{\mathcal{Q}}(\delta^{\mathcal{D}})} : B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} = 0.$$

Si donc  $\mathcal{B}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})$  est nul, on obtient

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \eta_{\mathcal{Q}} ({}^t \delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} : B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}) = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \eta_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 = 0.$$

On en déduit

$${}^t \delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}.$$

## 2 CAS À CONSIDÉRER

- **Cas 1** : Si  $\alpha_{\mathcal{K}} \neq \alpha_{\mathcal{L}}$ ,

$${}^t\delta^{\mathcal{D}} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}, \implies \delta^{\mathcal{D}} = 0.$$

## PROPOSITION

Il existe un **unique**  $\delta^{\mathcal{D}}$  vérifiant  $\mathcal{A}\delta^{\mathcal{D}} = \mathcal{B}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}})$ .

**MAIS** on a seulement une estimation

$$\|\delta^{\mathcal{D}}\| \leq \frac{C}{|\sin(\alpha_{\mathcal{K}} - \alpha_{\mathcal{L}})|} \|\mathbf{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|.$$

**MORALITÉ** : Le maillage dual barycentrique est à éviter si  $\alpha_{\mathcal{K}}$  et  $\alpha_{\mathcal{L}}$  sont trop proches !

## 2 CAS À CONSIDÉRER

- Cas 1 : Si  $\alpha_{\mathcal{K}} \neq \alpha_{\mathcal{L}}$ ,

$${}^t\delta^{\mathcal{D}}B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}} = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}, \implies \delta^{\mathcal{D}} = 0.$$

- Cas 2 : Si  $\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{L}}$ ,

$${}^t\delta^{\mathcal{D}}B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}} = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}, \text{ implique seulement}$$

$$\delta^{\mathcal{D}} \in \text{Vect}(\delta_0), \quad \delta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -\frac{{}^t\nu}{|\sigma_{\mathcal{K}}|} \\ \frac{\nu}{|\sigma_{\mathcal{L}}|} \\ \frac{{}^t\nu^*}{|\sigma_{\mathcal{K}^*}|} \\ -\frac{\nu^*}{|\sigma_{\mathcal{L}^*}|} \end{pmatrix}$$

- Néanmoins,  $\mathcal{B}(D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}})$  est toujours dans l'image de  $\mathcal{A}$ .
- On détermine complètement  $\delta^{\mathcal{D}}$  en demandant  $(\delta^{\mathcal{D}}, \delta_0) = 0$ .
- On a alors une estimation

$$\|\delta^{\mathcal{D}}\| \leq C\|D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|.$$

Soient  $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0^\tau$  et  $p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$  tels que

$$\begin{cases} \operatorname{div}^\tau(-2\varphi^\mathfrak{D}(\eta, \mathbf{D}^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) + p^\mathfrak{D}\operatorname{Id}) = 0, \\ \operatorname{Tr}(\nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) - \lambda h_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| p^\mathfrak{D} = 0. \end{cases}$$

Soient  $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0^\tau$  et  $p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$  tels que

$$\begin{cases} \operatorname{div}^\tau(-2\varphi^\mathfrak{D}(\eta, \mathbf{D}^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) + p^\mathfrak{D}\operatorname{Id}) = 0, \\ \operatorname{Tr}(\nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) - \lambda h_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} |p^\mathfrak{D}| = 0. \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}^\tau(-2\varphi^\mathfrak{D}(\eta, \mathbf{D}^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) + p^\mathfrak{D}\operatorname{Id}) \cdot \mathbf{u}^\tau = \int_{\Omega} (2\varphi^\mathfrak{D}(\eta, \mathbf{D}^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) + \lambda |p^\mathfrak{D}|_h^2.$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 2(\varphi^\mathfrak{D}(\eta, \mathbf{D}^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) \\ &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_\mathfrak{D}} |\mathfrak{Q}| \eta_\mathfrak{Q} (\mathbf{D}_\mathfrak{Q}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau : 2\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) \end{aligned}$$

Soient  $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0^\tau$  et  $p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$  tels que

$$\begin{cases} \operatorname{div}^\tau(-2\varphi^\mathfrak{D}(\eta, \mathbf{D}^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) + p^\mathfrak{D}\operatorname{Id}) = 0, \\ \operatorname{Tr}(\nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) - \lambda h_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| p^\mathfrak{D} = 0. \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}^\tau(-2\varphi^\mathfrak{D}(\eta, \mathbf{D}^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) + p^\mathfrak{D}\operatorname{Id}) \cdot \mathbf{u}^\tau = \int_{\Omega} (2\varphi^\mathfrak{D}(\eta, \mathbf{D}^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) + \lambda |p^\mathfrak{D}|_h^2.$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 2(\varphi^\mathfrak{D}(\eta, \mathbf{D}^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau) \\ &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_\mathfrak{D}} |\mathfrak{e}| \eta_\mathfrak{Q} (\mathbf{D}_\mathfrak{Q}^\mathfrak{N} \mathbf{u}^\tau : 2\mathbf{D}_\mathfrak{Q}^\mathfrak{N} \mathbf{u}^\tau \underbrace{- B_\mathfrak{Q} \delta^\mathfrak{D} - {}^t \delta^\mathfrak{D} B_\mathfrak{Q}}_{\text{contribution nulle}}) \end{aligned}$$

car, par définition de  $\delta^\mathfrak{D}$ , on a

$$\sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_\mathfrak{D}} |\mathfrak{e}| \eta_\mathfrak{Q} (\mathbf{D}_\mathfrak{Q}^\mathfrak{N} \mathbf{u}^\tau : B_\mathfrak{Q} \delta^\mathfrak{D}) = 0.$$

On utilise l'inégalité de Korn pour le nouveau gradient

$$0 = \int_{\Omega} (2\varphi^{\mathfrak{D}}(\eta, \mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) + \lambda |p^{\mathfrak{D}}|_h^2 \geq C \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \lambda |p^{\mathfrak{D}}|_h^2.$$

Il vient

$$\|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 = 0 \quad \text{et} \quad |p^{\mathfrak{D}}|_h^2 = 0.$$

et donc

$$\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \mathbf{0},$$

$$p^{\mathfrak{D}} = 0.$$

◀ Retour

- Comme  $\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |_{\mathcal{Q}} B_{\mathcal{Q}} = 0$ , on trouve

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |_{\mathcal{Q}} \|\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 = |\mathcal{D}| \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 + \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

- Comme  $\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |_{\mathcal{Q}} B_{\mathcal{Q}} = 0$ , on trouve

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |_{\mathcal{Q}} \|\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 = |\mathcal{D}| \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 + \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{P}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

- On démontre (c'est la partie assez difficile) que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{P}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{P}} + {}^t \delta^{\mathcal{P}} {}^t B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2,$$

- Comme  $\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| B_{\mathcal{Q}} = 0$ , on trouve

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 = |\mathcal{D}| \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 + \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

- On démontre (c'est la partie assez difficile) que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2,$$

- On utilise la définition de  $\delta^{\mathcal{D}}$  pour obtenir

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C |\mathcal{D}| \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Il s'en suit

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq |\mathcal{D}| \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 + C |\mathcal{D}| \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2$$

- Comme  $\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| B_{\mathcal{Q}} = 0$ , on trouve

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 = |\mathcal{D}| \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 + \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{P}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

- On démontre (c'est la partie assez difficile) que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{P}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{P}} + {}^t \delta^{\mathcal{P}t} B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2,$$

- On utilise la définition de  $\delta^{\mathcal{P}}$  pour obtenir

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{P}} + {}^t \delta^{\mathcal{P}t} B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C |\mathcal{D}| \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Il s'en suit

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \|\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq |\mathcal{D}| \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 + C |\mathcal{D}| \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2$$

- Korn DDFV "standard" + comparaison entre  $D_{\Omega}^{\mathcal{N}}$  et  $D^{\mathcal{D}}$

$$\|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 \leq C \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 \leq C' \|D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2.$$

[Retour](#)

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\text{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise  $\chi_{\sigma}(x, y)$ , une direction  $\xi$  et  $y(x)$  la projection d'un point  $x \in \Omega$  sur le bord selon  $\xi$ .
- Somme télescopique :

$$|u_{\mathcal{K}}|^p = |u_{\mathcal{K}_1}|^p = \sum_{i=1}^{m-1} (|u_{\mathcal{K}_i}|^p - |u_{\mathcal{K}_{i+1}}|^p) + |u_{\mathcal{K}_m}|^p,$$

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\text{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise  $\chi_{\sigma}(x, y)$ , une direction  $\xi$  et  $y(x)$  la projection d'un point  $x \in \Omega$  sur le bord selon  $\xi$ .
- Somme télescopique :

$$|u_{\mathcal{K}}|^p \leq C_p \left( \sum_{i=1}^{m-1} |u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}| (|u_{\mathcal{K}_i}|^{p-1} + |u_{\mathcal{K}_{i+1}}|^{p-1}) \right) + |u_{\mathcal{K}_m}|^p.$$

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\text{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise  $\chi_{\sigma}(x, y)$ , une direction  $\xi$  et  $y(x)$  la projection d'un point  $x \in \Omega$  sur le bord selon  $\xi$ .
- Somme télescopique :

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} |\mathcal{K}| |u_{\mathcal{K}}|^p \leq C_p \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}| (|u_{\mathcal{K}}|^{p-1} + |u_{\mathcal{L}}|^{p-1}) \left( \int_{\Omega} \chi_{\sigma}(x, y(x)) dx \right).$$

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\text{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise  $\chi_{\sigma}(x, y)$ , une direction  $\xi$  et  $y(x)$  la projection d'un point  $x \in \Omega$  sur le bord selon  $\xi$ .
- Somme télescopique :

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} |\mathcal{K}| |u_{\mathcal{K}}|^p \leq C'_p \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right| (|u_{\mathcal{K}}|^{p-1} + |u_{\mathcal{L}}|^{p-1}).$$

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\text{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise  $\chi_{\sigma}(x, y)$ , une direction  $\xi$  et  $y(x)$  la projection d'un point  $x \in \Omega$  sur le bord selon  $\xi$ .
- Somme télescopique :

$$\|u^{\text{m}}\|_{L^p}^p \leq C'_p \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^p + |u_{\mathcal{L}}|^p) \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\text{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise  $\chi_{\sigma}(x, y)$ , une direction  $\xi$  et  $y(x)$  la projection d'un point  $x \in \Omega$  sur le bord selon  $\xi$ .
- Somme télescopique :

$$\|u^{\text{m}}\|_{L^p}^p \leq C'_p \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^p + |u_{\mathcal{L}}|^p) \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

- On obtient le résultat si on montre maintenant que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^p + |u_{\mathcal{L}}|^p) \leq C \|u^{\text{m}}\|_{L^p}^p + C \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma|d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right|^p.$$

ON VEUT MONTRER

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{KL}} (|u_{\mathcal{K}}|^p + |u_{\mathcal{L}}|^p) \leq C \|u^{\text{mi}}\|_{L^p}^p + C \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{KL}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{KL}}} \right|^p.$$

ON VEUT MONTRER

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^p + |u_{\mathcal{L}}|^p) \leq C \|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^p}^p + C \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right|^p.$$

- On a tout d'abord

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^p + |u_{\mathcal{L}}|^p) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| (d_{\mathcal{K}\sigma} + d_{\mathcal{L}\sigma}) (|u_{\mathcal{K}}|^p + |u_{\mathcal{L}}|^p) \\ &\leq C \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} |\mathcal{K}| |u_{\mathcal{K}}|^p + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| (d_{\mathcal{L}\sigma} |u_{\mathcal{K}}|^p + d_{\mathcal{K}\sigma} |u_{\mathcal{L}}|^p). \end{aligned}$$

ON VEUT MONTRER

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^p + |u_{\mathcal{L}}|^p) \leq C \|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^p}^p + C \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right|^p.$$

- On a tout d'abord

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^p + |u_{\mathcal{L}}|^p) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| (d_{\mathcal{K}\sigma} + d_{\mathcal{L}\sigma}) (|u_{\mathcal{K}}|^p + |u_{\mathcal{L}}|^p) \\ &\leq C \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} |\mathcal{K}| |u_{\mathcal{K}}|^p + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| (d_{\mathcal{L}\sigma} |u_{\mathcal{K}}|^p + d_{\mathcal{K}\sigma} |u_{\mathcal{L}}|^p). \end{aligned}$$

- On remarque maintenant que

$$d_{\mathcal{L}\sigma} |u_{\mathcal{K}}|^p \leq \begin{cases} 2^p d_{\mathcal{L}\sigma} |u_{\mathcal{L}}|^p, & \text{si } |u_{\mathcal{K}}| \leq 2|u_{\mathcal{L}}| \\ 2^p d_{\mathcal{L}\sigma} |u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}|^p, & \text{si } |u_{\mathcal{K}}| > 2|u_{\mathcal{L}}| \end{cases}.$$

Pour simplifier, on suppose que  $\varphi$  ne dépend pas de  $x$ .

## GRANDES ÉTAPES

- Estimation d'énergie :

$$\sup_n \|u^{T_n}\|_{1,p,T_n} \leq C(\Omega, f).$$

Pour simplifier, on suppose que  $\varphi$  ne dépend pas de  $x$ .

## GRANDES ÉTAPES

- Estimation d'énergie :

$$\sup_n \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,p,\mathcal{T}_n} \leq C(\Omega, f).$$

- Théorème de compacité faible  $L^p$  (similaire à celui de VF4) :  
Il existe  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tel que (modulo sous-suite !)

$$u^{\mathfrak{M}_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \text{ dans } L^p(\Omega),$$

$$u^{\mathfrak{M}_n^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \text{ dans } L^p(\Omega),$$

$$\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nabla u \text{ dans } (L^p(\Omega))^2.$$

- Il faut montrer que  $u$  est bien la solution du problème et la convergence forte du gradient et du flux. Par unicité, on aura toutes les convergences souhaitées.

On peut supposer  $\varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \zeta$ , dans  $(L^{p'}(\Omega))^2$ .

## L'ASTUCE DE MINTY

- Soit  $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ . On prend  $v^{T_n} = \mathbb{P}^{T_n} \theta$  dans le schéma

$$\int_{\Omega} f \mathbb{P}^{\mathfrak{M}_n} \theta \, dx + \int_{\Omega} f \mathbb{P}^{\mathfrak{M}_n^*} \theta \, dx = 2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| (\varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}), \nabla^{T_n} \mathbb{P}^{T_n} \theta).$$

On peut supposer  $\varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \zeta$ , dans  $(L^{p'}(\Omega))^2$ .

## L'ASTUCE DE MINTY

- Soit  $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ . On prend  $v^{T_n} = \mathbb{P}^{T_n} \theta$  dans le schéma

$$\int_{\Omega} f \theta \, dx = \int_{\Omega} (\zeta, \nabla \theta) \, dx, \quad \forall \theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

On peut supposer  $\varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \zeta$ , dans  $(L^{p'}(\Omega))^2$ .

## L'ASTUCE DE MINTY

- Soit  $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ . On prend  $v^{T_n} = \mathbb{P}^{T_n} \theta$  dans le schéma

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} (\zeta, \nabla v) \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On peut supposer  $\varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \zeta$ , dans  $(L^{p'}(\Omega))^2$ .

## L'ASTUCE DE MINTY

- Soit  $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ . On prend  $v^{T_n} = \mathbb{P}^{T_n} \theta$  dans le schéma

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} (\zeta, \nabla v) \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

- On utilise la monotonie du schéma

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left( \varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}) - \varphi(\nabla^{T_n} \mathbb{P}^{T_n} \theta), \nabla^{T_n} u^{T_n} - \nabla^{T_n} \mathbb{P}^{T_n} \theta \right) \geq 0.$$

On peut supposer  $\varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \zeta$ , dans  $(L^{p'}(\Omega))^2$ .

## L'ASTUCE DE MINTY

- Soit  $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ . On prend  $v^{T_n} = \mathbb{P}^{T_n} \theta$  dans le schéma

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} (\zeta, \nabla v) \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

- On utilise la monotonie du schéma

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left( \varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}) - \varphi(\nabla^{T_n} \mathbb{P}^{T_n} \theta), \nabla^{T_n} u^{T_n} - \nabla^{T_n} \mathbb{P}^{T_n} \theta \right) \geq 0.$$

Comme  $u^{T_n}$  est solution du schéma, on a

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left( \varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}), \nabla^{T_n} u^{T_n} \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(u^{\mathfrak{M}_n} + u^{\mathfrak{M}_n^*}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\Omega} f u \, dx.$$

On peut supposer  $\varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \zeta$ , dans  $(L^{p'}(\Omega))^2$ .

### L'ASTUCE DE MINTY

- Soit  $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ . On prend  $v^{T_n} = \mathbb{P}^{T_n} \theta$  dans le schéma

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} (\zeta, \nabla v) \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

- On utilise la monotonie du schéma

$$\int_{\Omega} f u \, dx - \int_{\Omega} (\zeta, \nabla \theta) - \int_{\Omega} (\varphi(\nabla \theta), \nabla u - \nabla \theta) \, dx \geq 0.$$

On peut supposer  $\varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \zeta$ , dans  $(L^{p'}(\Omega))^2$ .

### L'ASTUCE DE MINTY

- Soit  $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ . On prend  $v^{T_n} = \mathbb{P}^{T_n} \theta$  dans le schéma

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} (\zeta, \nabla v) \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

- On utilise la monotonie du schéma

$$\int_{\Omega} (\zeta - \varphi(\nabla \theta), \nabla u - \nabla \theta) \, dx \geq 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

On peut supposer  $\varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \zeta$ , dans  $(L^{p'}(\Omega))^2$ .

### L'ASTUCE DE MINTY

- Soit  $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ . On prend  $v^{T_n} = \mathbb{P}^{T_n} \theta$  dans le schéma

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} (\zeta, \nabla v) \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

- On utilise la monotonie du schéma

$$\int_{\Omega} (\zeta - \varphi(\nabla v), \nabla u - \nabla v) \, dx \geq 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On peut supposer  $\varphi(\nabla^{T_n} u^{T_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \zeta$ , dans  $(L^{p'}(\Omega))^2$ .

## L'ASTUCE DE MINTY

- Soit  $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ . On prend  $v^{T_n} = \mathbb{P}^{T_n} \theta$  dans le schéma

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} (\zeta, \nabla v) \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

- On utilise la monotonie du schéma

$$\int_{\Omega} (\zeta - \varphi(\nabla v), \nabla u - \nabla v) \, dx \geq 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

- On prend  $v = u + t\psi$  et on fait tendre  $t$  vers 0 pour obtenir

$$\operatorname{div}(\varphi(\nabla u)) = \operatorname{div}(\zeta) = -f.$$

- Pour la convergence forte du gradient, il faut travailler un peu plus...

[◀ Retour](#)

On suppose  $u \in \mathcal{C}^\infty([-1, 0]) \cap \mathcal{C}^\infty([0, 1]) \cap \mathcal{C}^0([-1, 1])$  et on estime

$$R = |\partial_x u^+(0) - \nabla_N^+ \mathbb{P}^\mathcal{T} u|,$$

où  $\mathbb{P}^\mathcal{T} u = (u(x_{i+\frac{1}{2}}))_{0 \leq i \leq N+M-1}$  est la proj. de la solution  $u$  sur  $\mathcal{T}$ .

On suppose  $u \in \mathcal{C}^\infty([-1, 0]) \cap \mathcal{C}^\infty([0, 1]) \cap \mathcal{C}^0([-1, 1])$  et on estime

$$R = |\partial_x u^+(0) - \nabla_N^+ \mathbb{P}^\mathcal{T} u|,$$

où  $\mathbb{P}^\mathcal{T} u = (u(x_{i+\frac{1}{2}}))_{0 \leq i \leq N+M-1}$  est la proj. de la solution  $u$  sur  $\mathcal{T}$ .

RAPPEL :

$$\nabla_N^+ \mathbb{P}^\mathcal{T} u = \frac{u(x_{N+\frac{1}{2}}) - \tilde{u}}{h_N^+}, \quad \nabla_N^- \mathbb{P}^\mathcal{T} u = \frac{\tilde{u} - u(x_{N-\frac{1}{2}})}{h_N^-},$$

où  $\tilde{u}$  est tel que  $\varphi_+(\nabla_N^+ \mathbb{P}^\mathcal{T} u) = \varphi_-(\nabla_N^- \mathbb{P}^\mathcal{T} u)$ .

On suppose  $u \in \mathcal{C}^\infty([-1, 0]) \cap \mathcal{C}^\infty([0, 1]) \cap \mathcal{C}^0([-1, 1])$  et on estime

$$R = |\partial_x u^+(0) - \nabla_N^+ \mathbb{P}^\mathcal{T} u|,$$

où  $\mathbb{P}^\mathcal{T} u = (u(x_{i+\frac{1}{2}}))_{0 \leq i \leq N+M-1}$  est la proj. de la solution  $u$  sur  $\mathcal{T}$ .

RAPPEL :

$$\nabla_N^+ \mathbb{P}^\mathcal{T} u = \frac{u(x_{N+\frac{1}{2}}) - \tilde{u}}{h_N^+}, \quad \nabla_N^- \mathbb{P}^\mathcal{T} u = \frac{\tilde{u} - u(x_{N-\frac{1}{2}})}{h_N^-},$$

où  $\tilde{u}$  est tel que  $\varphi_+(\nabla_N^+ \mathbb{P}^\mathcal{T} u) = \varphi_-(\nabla_N^- \mathbb{P}^\mathcal{T} u)$ .

ON S'ATTEND À CE QUE  $\tilde{u} \approx u(x_N) = u(0)$  :

$$R \leq C \underbrace{\left| \partial_x u^+(0) - \frac{u(x_{N+1/2}) - u(x_N)}{h_N^+} \right|}_{\leq Ch} + C \underbrace{\left| \frac{u(x_N) - \tilde{u}}{h_N^+} \right|}_{\text{à estimer!}}.$$

FORMULES DE TAYLOR DE PART ET D'AUTRES DE LA SINGULARITÉ :

$$\frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} = \partial_x u^-(0) + T_1(h_N^-),$$

$$\frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} = \partial_x u^+(0) + T_2(h_N^+),$$

où  $T_1(h_N^-), T_2(h_N^+) = O(h)$ .

FORMULES DE TAYLOR DE PART ET D'AUTRES DE LA SINGULARITÉ :

$$\frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} = \partial_x u^-(0) + T_1(h_N^-),$$

$$\frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} = \partial_x u^+(0) + T_2(h_N^+),$$

où  $T_1(h_N^-), T_2(h_N^+) = O(h)$ .

CONDITION DE TRANSMISSION SUR LE PB CONTINU :

$$\varphi_-(\partial_x u^-(0)) = \varphi_+(\partial_x u^+(0)).$$

FORMULES DE TAYLOR DE PART ET D'AUTRES DE LA SINGULARITÉ :

$$\frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} = \partial_x u^-(0) + T_1(h_N^-),$$

$$\frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} = \partial_x u^+(0) + T_2(h_N^+),$$

où  $T_1(h_N^-), T_2(h_N^+) = O(h)$ .

CONDITION DE TRANSMISSION SUR LE PB CONTINU :

$$\varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) = \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} - T_2(h_N^+) \right).$$

FORMULES DE TAYLOR DE PART ET D'AUTRES DE LA SINGULARITÉ :

$$\frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} = \partial_x u^-(0) + T_1(h_N^-),$$

$$\frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} = \partial_x u^+(0) + T_2(h_N^+),$$

où  $T_1(h_N^-), T_2(h_N^+) = O(h)$ .

CONDITION DE TRANSMISSION SUR LE PB CONTINU :

$$\varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) = \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} - T_2(h_N^+) \right).$$

DÉFINITION DE  $\tilde{u}$

$$\varphi_- \left( \frac{\tilde{u} - u(-h_N^-)}{h_N^-} \right) = \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - \tilde{u}}{h_N^+} \right).$$

FORMULES DE TAYLOR DE PART ET D'AUTRES DE LA SINGULARITÉ :

$$\frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} = \partial_x u^-(0) + T_1(h_N^-),$$

$$\frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} = \partial_x u^+(0) + T_2(h_N^+),$$

où  $T_1(h_N^-), T_2(h_N^+) = O(h)$ .

CONDITION DE TRANSMISSION SUR LE PB CONTINU :

$$\varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) = \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} - T_2(h_N^+) \right).$$

DÉFINITION DE  $\tilde{u}$

$$\varphi_- \left( \frac{\tilde{u} - u(-h_N^-)}{h_N^-} \right) = \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - \tilde{u}}{h_N^+} \right).$$

**Il faut faire apparaitre des termes  $(\varphi^\pm(\xi) - \varphi^\pm(\eta), \xi - \eta)$  !**

$$\begin{aligned}
 & \left( \varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) - \varphi_- \left( \frac{\bar{u} - u(-h_N^-)}{h_N^-} \right) \right) \left( \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^-} \right) \\
 & + \left( \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - \bar{u}}{h_N^+} \right) - \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} - T_2(h_N^+) \right) \right) \left( \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^+} \right) \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) - \varphi_- \left( \frac{\bar{u} - u(-h_N^-)}{h_N^-} \right) \right) \left( \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) \\
 & + \left( \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - \bar{u}}{h_N^+} \right) - \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} - T_2(h_N^+) \right) \right) \left( \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^+} \right) \\
 & = \\
 & - T_1(h_N^-) \left( \varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) - \varphi_- \left( \frac{\bar{u} - u(-h_N^-)}{h_N^-} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) - \varphi_- \left( \frac{\bar{u} - u(-h_N^-)}{h_N^-} \right) \right) \left( \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) \\
 & + \left( \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - \bar{u}}{h_N^+} \right) - \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} - T_2(h_N^+) \right) \right) \left( \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^+} + T_2(h_N^+) \right) \\
 & = \\
 & - T_1(h_N^-) \left( \varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) - \varphi_- \left( \frac{\bar{u} - u(-h_N^-)}{h_N^-} \right) \right) \\
 & + T_2(h_N^+) \left( \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - \bar{u}}{h_N^+} \right) - \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} - T_2(h_N^+) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) - \varphi_- \left( \frac{\bar{u} - u(-h_N^-)}{h_N^-} \right) \right) \left( \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) \\ & + \left( \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - \bar{u}}{h_N^+} \right) - \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} - T_2(h_N^+) \right) \right) \left( \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^+} + T_2(h_N^+) \right) \\ & = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - T_1(h_N^-) \left( \varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) - \varphi_- \left( \frac{\bar{u} - u(-h_N^-)}{h_N^-} \right) \right) \\ & + T_2(h_N^+) \left( \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - \bar{u}}{h_N^+} \right) - \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} - T_2(h_N^+) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right|^p + \left| \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^+} + T_2(h_N^+) \right|^p \\ & \leq Ch \left( 1 + \left| \frac{u(0) - \bar{u}}{h} \right|^{p-2} \right) \left( Ch + \left| \frac{u(0) - \bar{u}}{h} \right| \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) - \varphi_- \left( \frac{\bar{u} - u(-h_N^-)}{h_N^-} \right) \right) \left( \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) \\
 & + \left( \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - \bar{u}}{h_N^+} \right) - \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} - T_2(h_N^+) \right) \right) \left( \frac{u(0) - \bar{u}}{h_N^+} + T_2(h_N^+) \right) \\
 & = \\
 & - T_1(h_N^-) \left( \varphi_- \left( \frac{u(0) - u(-h_N^-)}{h_N^-} - T_1(h_N^-) \right) - \varphi_- \left( \frac{\bar{u} - u(-h_N^-)}{h_N^-} \right) \right) \\
 & + T_2(h_N^+) \left( \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - \bar{u}}{h_N^+} \right) - \varphi_+ \left( \frac{u(h_N^+) - u(0)}{h_N^+} - T_2(h_N^+) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{u(0) - \bar{u}}{h} \right| \leq Ch^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\rightsquigarrow R = |\partial_x u^+(0) - \nabla_N^+ \mathbb{P}^\tau u| \leq Ch + Ch^{\frac{1}{p-1}}.$$

$$|\partial_x u^+(0) - \nabla_N^+ \mathbb{P}^T u| \leq Ch + Ch^{\frac{1}{p-1}}$$

$$|\partial_x u^+(0) - \nabla_N^+ \mathbb{P}^T u| \leq Ch + Ch^{\frac{1}{p-1}}$$

FLUX NUMÉRIQUE CALCULÉ SUR  $u$  :

$$F_N = \varphi_+(\nabla_N^+ \mathbb{P}^T u)$$

FLUX EXACT :

$$\varphi_+(\partial_x u^+(0))$$

$$|\partial_x u^+(0) - \nabla_N^+ \mathbb{P}^T u| \leq Ch + Ch^{\frac{1}{p-1}}$$

FLUX NUMÉRIQUE CALCULÉ SUR  $u$  :

$$F_N = \varphi_+(\nabla_N^+ \mathbb{P}^T u)$$

FLUX EXACT :

$$\varphi_+(\partial_x u^+(0))$$

ESTIMATION DE CONSISTANCE

$$\begin{aligned} |\varphi_+(\partial_x u^+(0)) - F_N| &= |\varphi_+(\partial_x u^+(0)) - \varphi_+(\nabla_N^+ \mathbb{P}^T u)| \\ &\leq C |\partial_x u^+(0) - \nabla_N^+ \mathbb{P}^T u| \left( |\partial_x u^+(0)| + |\nabla_N^+ \mathbb{P}^T u| \right)^{p-1} \\ &\leq Ch^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

$$\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T = \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} (\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \forall \mathcal{Q} \subset \mathcal{D},$$

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}} u^T = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} 1_{\mathcal{Q}} \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T,$$

$$|\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T.$$

## COMPARAISON DES GRADIENTS

- ▶  $\|\nabla^T u^T\|_{L^p} \leq \|\nabla^{\mathcal{N}} u^T\|_{L^p}.$
- ▶  $\|\nabla^{\mathcal{N}} u^T\|_{L^p} \leq C(1 + \|\nabla^T u^T\|_{L^p}).$

## ESTIMATION D'ÉNERGIE

- ▶  $\|\nabla^{\mathcal{N}} u^T\|_{L^p} \leq C \left( 1 + \|f\|_{L^{p'}}^{\frac{1}{p-1}} \right).$

Toutes les constantes dépendent de  $\text{reg}(\mathcal{T})$ .

## LA CONSISTANCE DU NOUVEAU GRADIENT

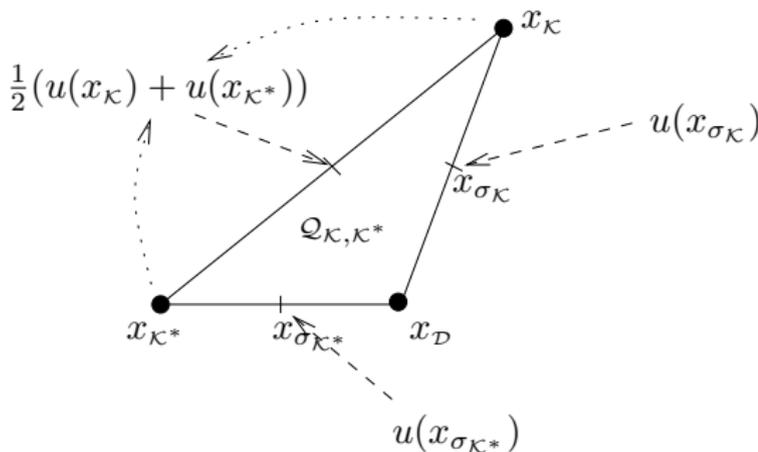
### PROPOSITION

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla u(x) - \nabla^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u(x)|^p dx$$

$$\leq C \text{size}(\mathcal{T})^{\frac{p}{p-1}} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (1 + |\nabla u|^p + |\nabla^2 u|^p) dx, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}.$$

**Démonstration :** On introduit  $\mathbb{P}^\Omega u$  une projection affine de  $u$  sur les quarts de diamants  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\kappa, \kappa^*}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{Q}_{\kappa, \kappa^*}}^\Omega u(x_{\sigma\kappa}) &= u(x_{\sigma\kappa}), \\ \mathbb{P}_{\mathcal{Q}_{\kappa, \kappa^*}}^\Omega u(x_{\sigma\kappa^*}) &= u(x_{\sigma\kappa^*}), \\ \mathbb{P}_{\mathcal{Q}_{\kappa, \kappa^*}}^\Omega u\left(\frac{x_\kappa + x_{\kappa^*}}{2}\right) &= \frac{u(x_\kappa) + u(x_{\kappa^*})}{2}. \end{aligned}$$



- Le gradient de  $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}^{\Omega} u$  est donné par

$$\nabla_{\mathbb{P}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}^{\Omega}} u = \frac{2}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left( \frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}}) + u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}}|} \nu + \frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}}) + u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}^*}|} \nu^* \right).$$

- Le gradient de  $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}, \mathcal{K}^*}^{\Omega} u$  est donné par

$$\nabla \mathbb{P}_{\mathcal{Q}, \mathcal{K}^*}^{\Omega} u = \frac{2}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left( \frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}}) + u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}}|} \nu + \frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}}) + u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}^*}|} \nu^* \right).$$

- L'erreur de consistance de cette projection

$$T_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) = \nabla u(z) - \nabla \mathbb{P}_{\overline{\mathcal{Q}}}^{\Omega} u, \quad \forall z \in \mathcal{Q}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{D}.$$

est classiquement contrôlée par

$$\int_{\mathcal{Q}} |T_{\overline{\mathcal{Q}}}(z)|^p dx \leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \int_{\mathcal{Q}} |\nabla^2 u(z)|^p dx, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{D}.$$

- Le gradient de  $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}, \mathcal{K}^*}^{\Omega} u$  est donné par

$$\nabla \mathbb{P}_{\mathcal{Q}, \mathcal{K}^*}^{\Omega} u = \frac{2}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left( \frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}}) + u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}}|} \nu + \frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}}) + u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}^*}|} \nu^* \right).$$

- L'erreur de consistance de cette projection

$$T_{\mathcal{Q}}(z) = \nabla u(z) - \nabla \mathbb{P}_{\mathcal{Q}}^{\Omega} u, \quad \forall z \in \mathcal{Q}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}.$$

est classiquement contrôlée par

$$\int_{\mathcal{Q}} |T_{\mathcal{Q}}(z)|^p dx \leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \int_{\mathcal{Q}} |\nabla^2 u(z)|^p dx, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}.$$

- On a alors

$$\nabla u(z) - \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u(z) = T_{\mathcal{Q}}(z) + B_{\mathcal{Q}} \bar{\delta}$$

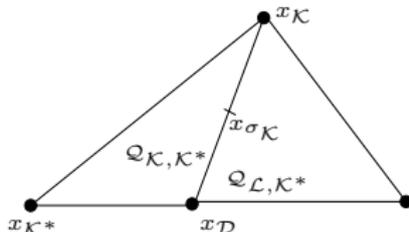
avec par exemple :

$$\bar{\delta}_{\mathcal{K}^*} = u(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}) - \frac{1}{2} \left( u(x_{\mathcal{K}^*}) + \frac{|\sigma_{\mathcal{L}}| u(x_{\mathcal{K}}) + |\sigma_{\mathcal{K}}| u(x_{\mathcal{L}})}{|\sigma_{\mathcal{K}}| + |\sigma_{\mathcal{L}}|} \right) = O(\text{size}(\mathcal{T})),$$

alors que  $B_{\mathcal{Q}} = O(\text{size}(\mathcal{T})^{-1})$ .

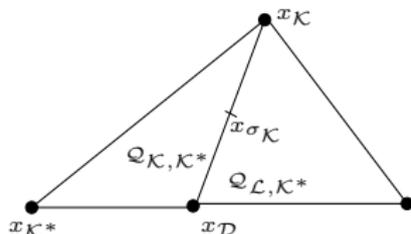
En utilisant la définition de  $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$  et la continuité des flux sur chaque arête du diamant on obtient

$$\begin{aligned}
 & \left( \left( \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}|} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} \varphi(x, \nabla u(x)) - \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}|} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} \varphi(x, \nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^T u) \right), \nu^* \right) \\
 - & \left( \left( \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}|} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}} \varphi(x, \nabla u(x)) - \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}|} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}} \varphi(x, \nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^T u) \right), \nu^* \right) \\
 & = R_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*},\sigma_{\mathcal{K}}}^{\varphi} - R_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*},\sigma_{\mathcal{K}}}^{\varphi}.
 \end{aligned}$$



En utilisant la définition de  $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$  et la continuité des flux sur chaque arête du diamant on obtient

$$\begin{aligned}
 & \left( \left( \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}|} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \varphi(x, \nabla u(x)) - \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}|} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \varphi(x, \nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^T u) \right), \nu^* \right) \\
 - & \left( \left( \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}|} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \varphi(x, \nabla u(x)) - \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}|} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \varphi(x, \nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^T u) \right), \nu^* \right) \\
 & = R_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}, \sigma_{\mathcal{K}}}^{\varphi} - R_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}, \sigma_{\mathcal{K}}}^{\varphi}.
 \end{aligned}$$



$$\times |\sigma_{\mathcal{K}}| \overline{\delta_{\mathcal{K}}}$$

En utilisant la définition de  $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$  et la continuité des flux sur chaque arête du diamant on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\varphi(x, \nabla u(x)) - \varphi(x, \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^T u), B_{\mathcal{Q}} \bar{\delta}) \, dx \\ \leq \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| |B_{\mathcal{Q}} \bar{\delta}| \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}} |R_{\mathcal{Q}, \sigma}^{\varphi}| \end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$  et la continuité des flux sur chaque arête du diamant on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\varphi(x, \nabla u(x)) - \varphi(x, \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^T u), \nabla u(x) - \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^T u + T_{\overline{\mathcal{Q}}}(x)) \, dx \\ \leq \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| |B_{\mathcal{Q}} \bar{\delta}| \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}} |R_{\mathcal{Q}, \sigma}^{\varphi}| \end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$  et la continuité des flux sur chaque arête du diamant on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\varphi(x, \nabla u(x)) - \varphi(x, \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^T u), \nabla u(x) - \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^T u) dx \\ & \leq \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}} \left( \int_{\mathcal{Q}} |\nabla u(x) - \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^T u(x)| dx + \int_{\mathcal{Q}} |T_{\overline{\mathcal{Q}}}(x)| dx \right) \\ & \quad \times \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}} (|R_{\mathcal{Q},\sigma}^{\varphi}| + |R_{\mathcal{Q},\sigma}^x|) \\ & \quad + \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\varphi(x, \nabla u(x)) - \varphi(x, \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}^T u), T_{\overline{\mathcal{Q}}}(x)) dx, \end{aligned}$$

◀ Retour

## DÉFINITIONS

$$v^{T,n} = u^{T,n} - u^T, h_{\mathcal{Q}}^n = g_{\mathcal{Q}}^n - g_{\mathcal{Q}}, \mu_{\mathcal{Q}}^n = \lambda_{\mathcal{Q}}^n - \lambda_{\mathcal{Q}}, \beta_{\mathcal{D}}^n = \delta_{\mathcal{D}}^n - \delta^{\mathcal{D}}.$$

$$(f, g)_{\alpha, \mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}} |\varrho| (A_{\mathcal{Q}}^{\alpha} f_{\mathcal{Q}}, g_{\mathcal{Q}}), \quad \|f\|_{\alpha, \mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} (f, f)_{\alpha, \mathcal{A}}^{\frac{1}{2}}.$$

## EQUATIONS POUR LES ERREURS

$$\begin{aligned} (\nabla^T v^{T,n} + \mathcal{B}\beta^n - h^n, \nabla^T w^T)_{1, \mathcal{A}} + (h^n - h^{n-1}, \nabla^T w^T)_{1, \mathcal{A}} \\ = (\mu^{n-1}, \nabla^T w^T)_{0, \mathcal{A}}, \quad \forall w^T \in \mathbb{R}^T. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\varrho| {}^t B_{\mathcal{Q}} A_{\mathcal{Q}} (B_{\mathcal{Q}} \beta_{\mathcal{D}}^n + \nabla_{\mathcal{D}}^T v^{T,n} - h_{\mathcal{Q}}^n) + \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\varrho| {}^t B_{\mathcal{Q}} A_{\mathcal{Q}} (h_{\mathcal{Q}}^n - h_{\mathcal{Q}}^{n-1}) \\ - \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\varrho| {}^t B_{\mathcal{Q}} \mu_{\mathcal{Q}}^{n-1} = 0, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(g_{\mathcal{Q}}^n) - \varphi_{\mathcal{Q}}(g_{\mathcal{Q}}) + \mu_{\mathcal{Q}}^{n-1} + A_{\mathcal{Q}}(h_{\mathcal{Q}}^n - \nabla_{\mathcal{D}}^T v^{T,n} - B_{\mathcal{Q}} \beta_{\mathcal{D}}^n) = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}. \quad (3)$$

$$\mu_{\mathcal{Q}}^n = \mu_{\mathcal{Q}}^{n-1} + A_{\mathcal{Q}}(h_{\mathcal{Q}}^n - \nabla_{\mathcal{D}}^T v^{T,n} - B_{\mathcal{Q}} \beta_{\mathcal{D}}^n), \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}. \quad (4)$$